УДК 621.924.046:621.822.82

Ю.П. Самарин, А.Н. Филин, В.Г. Рахчеев, Д.А. Лапенков

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЛИЯНИЯ НЕПЛОСКОСТНОСТИ ТОРЦА КОЛЕЦ КОНИЧЕСКИХ ПОДШИПНИКОВ НА ФОРМИРОВАНИЕ ДОРОЖЕК КАЧЕНИЯ ПРИ ШЛИФОВАНИИ

Выполнен теоретический анализ влияния неплоскостности базовых торцовых поверхностей на отклонения формы дорожек качения конических подшипников при шлифовании. Полученные результаты позволяют назначать оптимальную точность базовых торцовых поверхностей в зависимости от классности подшипников и достигать ее более оптимальными методами обработки.

В подшипниковой промышленности широко применяется метод обработки дорожек качения колец бесцентровых кругло- и внутришлифовальных станков. При этом точность формы и взаимного расположения поверхностей изделия существенно зависит от точности базирования. Влияние погрешностей центрирующей конической поверхности достаточно подробно освещено в литературе [1,2], влиянию же погрешностей торцовой базы до последнего времени не уделялось достаточного внимания.

Как правило , после операции плоского шлифования колец подшипников их торцы имеют неплоскостность, которая сказывается на точности формы и расположения шлифуемой дорожки качения. Количественно степень этого влияния зависит от схемы базирования изделия. Рассмотрим наиболее часто встречающийся на практике случай базирования кольца на вращающейся торцовой опоре.

При установке изделия с искаженной формой торца на торцовую опору ось кольца не совпадает с осью вращения шпинделя станка. Погрешность торца вызывает поворот оси вращения кольца.

Рассмотрим процесс формирования и виды погрешностей формы профиля конического кольца подшипника при шлифовании , вызванных отсутствием соосности осей заготовки кольца и шпинделя станка. Будем рассматривать два вида погрешностей формы профилей готовой детали:

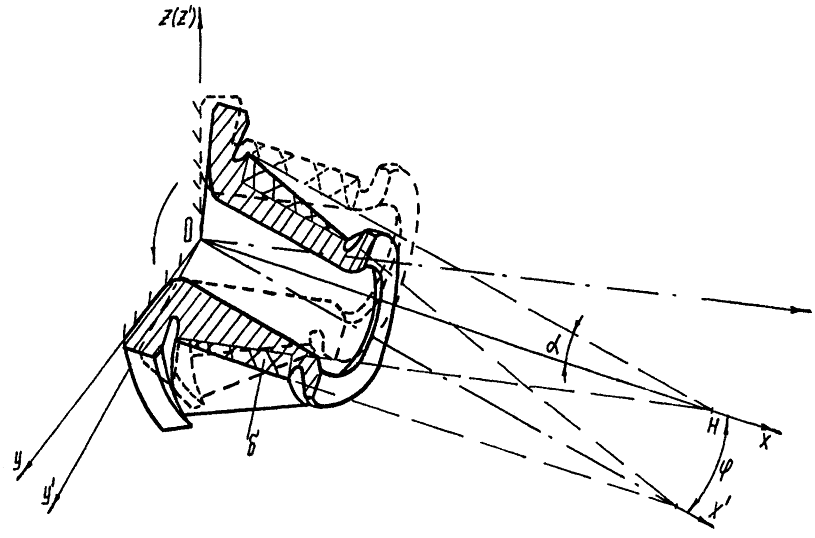
- погрешности формы профиля дорожки качения в осевом сечении;
- погрешность формы профиля дорожки качения в ее различных поперечных сечениях.

Для удобства расчета погрешностей формы конического профиля, вызванной отсутствием соосности осей заготовки и шпинделя станка, представим обрабатываемое коническое кольцо подшипника в виде конической заготовки с образующей $Y=(H-X)\operatorname{tg}\alpha+\delta$, где H- высота конуса полученной детали; α- номинальный угол конуса детали; δ- величина удаленного припуска. Путем снятия припуска δ требуется получить коническую деталь с образующей $Y=(H-X)\operatorname{tg}\alpha$.

Для исследования влияния неплоскостности базового торца колец конических подшипников на точность формы дорожек качения рассмотрим, во-первых, случай, когда оси шпинделя станка и заготовки находятся в одной плоскости, образуют плоский угол и пересекаются в точке, расположенной на расстоянии от центра плоскости шпинделя станка. Представленный на рис. 1 случай соответствует ситуации, когда оси шпинделя станка и заготовки находятся в одной плоскости и образуют плоский угол φ и пересекаются в точке, расположенной в центре плоскости шпинделя.

Введем пространственные декартовы системы координат OXYZ, определяющую положение получаемой детали, и OX′Y′Z′, определяющую положение обрабатываемой заготовки , следующим образом:

- ось OX совместим с осью вращения шпинделя станка, которая одновременно и будет являться осью вращения полученной детали; ось OY направим перпендикулярно оси вращения горизонтально , а ось OZ -вертикально;
- ось OX′ совместим с осью заготовки , которая повернута относительно оси OX на угол φ из-за погрешности торца , ось OY′ расположим в плоскости OXY и направим перпендикулярно оси OX′ , а ось OZ′ совместим с осью OZ .



Р и с. 1. Схема к определению погрешности формы дорожки качения колец конических подшипников от погрешности базового торца

Координаты любой точки M(X′,Y′,Z′) в системе координат OX′Y′Z′ выражаются через координаты той же точки M(X,Y,Z) в исходной системе координат с помощью соотношений

X′=XCosφ-YSinφ;

Y′=XSinφ+Ycosφ; Z′=Z

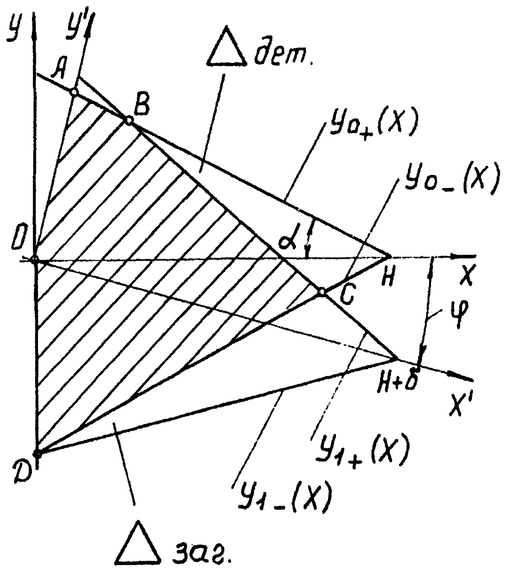
Коническая поверхность детали в системе координат OXYZ имеет образующую $Y = Y_0(X) = (H - X)tg\alpha$ и определяется уравнением

$$Y^2 + Z^2 = Y_0^2(X) = (H - X)^2 tg^2\omega . \quad (1)$$

Коническая поверхность заготовки в системе координат OX′Y′Z′ имеет образующую $Y^1 = Y_1^1(X^1) = (H - X)tg\alpha + \delta$ и определяется уравнением

$$Y^{12} + Z^{12} = Y_1^{12}(X^1) - [(H - X^1)tg\alpha + \delta] .$$

Тогда в исходной системе координат OXYZ коническая поверхность заготовки определяется уравнением $(X \sin\varphi + Y\cos\varphi)^2 + Z^2 - [(H - (X\cos\varphi - Y\sin\varphi))tg\alpha + \delta]^2$.



Р и с. 2. Схема расположения осей детали XOY и заготовки X^{1}OY^1 в декартовых системах координат (пересечение в центре плоскости шпинделя станка)

Рассмотрим плоское сечение (рис. 2), проходящее через оси заготовки и шпинделя станка, и в нем декартову систему координат XOY. Начало системы O совпадает с точкой пересечения осей заготовки и шпинделя, ось OX совмещена с осью шпинделя, а ось OY перпендикулярна ей.

В данной плоскости сечения предполагаемой детали с номинальным профилем будет треугольник , ограниченный осью OY и двумя ее образующими прямыми , определяемыми в системе координат функциями

$$Y = Y_{0+}(X) = (H - X)tg\alpha ,$$
$$Y = Y_{0-}(X) = -(H - X)tg\alpha .$$

Сечением заготовки будет треугольник, ограниченный осью OY и двумя ее образующими.

Для нахождения функций, определяющих указанные образующие в данной системе координат , рассмотрим в приведенной плоскости другую декартову систему координат X'OY' с началом в точке O , осью OX', совпадающей с осью заготовки , и осью OY' , перпендикулярной ей.

В этом случае базисные векторы исходной системы координат XOY выражаются через базисные векторы новой системы координат X'OY' с помощью равенств

$$i = i^1 Cos\varphi + j^1 Sin\varphi , \; j = -iSin\varphi + j^1 Cos\varphi . \quad (2)$$

Следовательно, для радиуса вектора любой точки M данной плоскости будем иметь

$$X^1 i^1 + Y^1 j^1 = OM = Xi + Yj = (XCos\varphi - YSin\varphi)i + (XSin\varphi + YCos\varphi)j .$$

Таким образом, координаты любой точки плоскости M (X',Y') в новой системе координат

X'OY' будут выражаться через координаты точки M (X,Y) в исходной системе координат XOY с помощью равенств $X^1 = XCos\varphi - YSin\varphi$, $Y^1 = XSin\varphi + YCos\varphi$.

Поэтому в новой системе координат X'OY' прямые образующей заготовки определяются функциями

$$Y^1 = Y_{1+}^1(X^1) = (H - X^1)tg\alpha + \delta\,;\; Y^1 = Y_{1-}^1(X^1) = -(H - X^1)tg\alpha - \delta\,. \qquad (3)$$

Тогда подставляя найденные выражения для координат X' и Y' в уравнения прямых образующей (3) в новой системе координат X'OY' , получим определяющие их функции в исходной системе координат XOY:

$$Y = Y_{1+}(X) = -Xtg\,(\alpha + \varphi) + \frac{\delta Cos\,\alpha + HSin\,\alpha}{Cos\,(\alpha + \varphi)};Y = Y_{1-}(X) = Xtg\,(\alpha - \varphi) - \frac{\delta Cos\,\alpha + HSin\,\alpha}{Cos\,(\alpha - \varphi)}.$$

Итак, сечением детали с номинальным профилем является треугольник Δдет., ограниченный осью OY и прямыми $Y = Y_{0+}(X), Y = Y_{0-}(X)$, а сечением заготовки является треугольник Δзаг., ограниченный осью OY и прямыми $Y = Y_{1+}(X); Y = Y_{1-}(X)$.

Следовательно , контурами реальной детали является многоугольник OABCD , равный пересечению треугольников Δдет. и Δзаг. ,который ограничен осью, сверху ломаной линией вида

$$Y = \min\left\{(H - X)tg\alpha - Xtg(\alpha + \varphi) + \frac{HSin\alpha + \delta Cos\alpha}{Cos(\alpha + \varphi)}\right\}$$

и ломаной линией снизу

$$Y = -\min\left\{(H - X)tg\alpha - Xtg(\alpha - \varphi) + \frac{HSin\alpha + \delta Cos\alpha}{Cos(\alpha - \varphi)}\right\}.$$

Таким образом , погрешность формы профиля готовой детали в осевом сечении рассчитывается как большее из двух чисел:

$$max\left\{\left|(H - X)tg\alpha + Xtg(\alpha + \varphi) - \frac{HSin\alpha + \delta Cos\alpha}{Cos(\alpha - \varphi)}\right| : X \in [0, H]\right\} \text{ и}$$

$$max\left\{\left|(H - X)tg\alpha + Xtg(\alpha - \varphi) - \frac{Hsin\alpha + \delta Cos\alpha}{Cos(\alpha - \varphi)}\right| : X \in [0, H]\right\}.$$

Данный теоретический анализ по исследованию влияния неплоскостности базового торца колец конических подшипников на точность формы дорожек качения в осевом сечении применим к условию , когда оси шпинделя станка и заготовки пересекаются в точке , расположенной в центре плоскости шпинделя станка. В реальных условиях обработки точка пересечения данных осей может находится в любом месте оси вращения шпинделя станка. Исследуем влияние погрешности торца колец подшипников на точность формы дорожек качения применительно к данной ситуации.

Предположим, что ось заготовки O′X′ (рис. 3) расположена в координатной плоскости OXY и пересекает ось OY в точке с координатой d.

В этом случае для описания конической поверхности заготовки рассмотрим вспомогательную пространственную декартову систему координат O'X'Y'Z' (рис. 4); начало координат O' находится на оси OY и имеет координату d, ось O'X' совпадает с осью заготовки, ось O'Y' перпендикулярна оси O'X' и расположена в координатной плоскости OXY, а ось O'Z' параллельна оси OZ

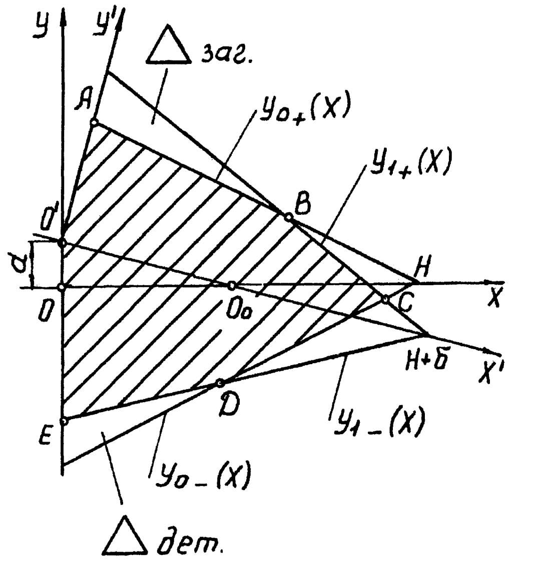
Тогда координаты любой точки M (X',Y',Z') в новой системе координат вычисляются через координаты той же точки M (X,Y,Z) в исходной системе координат с помощью соотношений :

$$\begin{cases} X^1 = XCos\varphi - YSin\varphi + dSin\varphi; \\ Y^1 = XSin\varphi + YCos\varphi - dCos\varphi; \\ Z^1 = Z. \end{cases} \qquad (4)$$

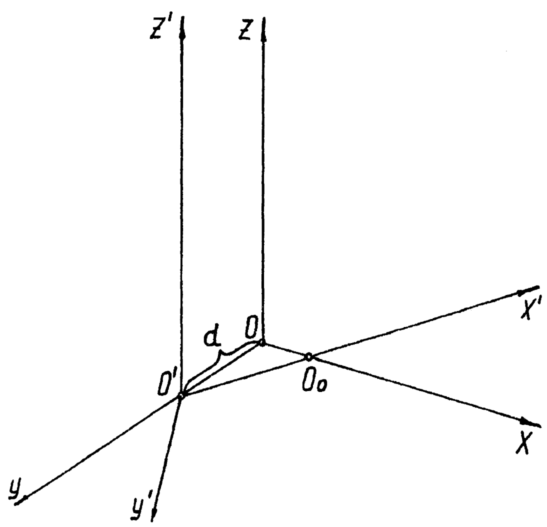
В новой системе координат коническая поверхность заготовки, имеющая образующую $Y^1 = Y_1^1(X^1) = (H - X^1)tg\alpha + \delta$, определяется уравнением

$$Y^{1^2} + Z^{1^2} = Y_1^{1^2}(X^1) = \left[(H - X^1)tg\alpha + \delta\right]^2. \qquad (5)$$

Поэтому в исходной системе координат OXYZ коническая поверхность заготовки определяется уравнением $(Sin\varphi + YCos\varphi - dCos\varphi)^2 + Z^2 = \left[(H - (XCos\varphi - YSin\varphi + dSin\varphi))tg\alpha + \delta\ \right]^2$.



Р и с. 3. Схема расположения осей детали XOY и заготовки X^1OY^1 в декартовых системах координат (пересечение на оси вращения шпинделя станка)



Р и с. 4. Схема расположения осей детали и заготовки в пространственных системах координат OXYZ и $O^1X^1Y^1Z^1$

Следовательно, наибольшая погрешность формы готовой детали будет иметь место в осевом сечении координатной плоскостью OXY с уравнением в ее различных осевых сечениях Z=0.

В этом случае осевым сечением заготовки является треугольник Δзаг. (см. рис. 3), ограниченный в системе осью и прямыми $Y_{1+}(X)$; $Y_{1-}(X)$ с уравнениями

$$XSin\ \varphi + YCos\ \varphi - dCos\ \varphi = (H - (XCos\ \varphi - YSin\ \varphi + dSin\ \varphi))tg\alpha + \delta;$$

$$XSin\ \varphi + YCos\ \varphi - dCos\ \varphi = -(H - (XCos\ \varphi - YSin\ \varphi + dSin\ \varphi))tg\alpha - \delta.$$

Данные уравнения после преобразования имеют вид

$$Y_{1+}(X) = Y = -Xtg(\alpha + \varphi) + \frac{HSin\alpha + \delta Cos\alpha}{Cos(\alpha + \varphi)} + d,$$

$$Y_{1-}(X) = Y = Xtg(\alpha - \varphi) - \frac{HSin\alpha + \delta Cos\alpha}{Cos(\alpha - \varphi)} + d.$$

Сечением номинальной детали является треугольник Δдет. , ограниченный осью и прямыми $Y_{0+}(X)$ и $Y_{0-}(X)$, описываемыми уравнениями (2).

При этом сечением реальной детали будет многоугольник O'ABCDE , который является общей частью, пересечений треугольников Δдет и Δзаг , ограниченный осью , ломаной линией сверху вида

$$Y = min\left\{(H - X)tg\alpha - Xtg(\alpha + \varphi) + \frac{HSin\alpha + \delta Cos\alpha}{Cos(\alpha + \varphi)} + d\right\},$$

и ломаной линией снизу

$$Y = -min\left\{(H - X)tg\alpha - Xtg(\alpha - \varphi) + \frac{HSin\alpha + \delta Cos\alpha}{Cos(\alpha - \varphi)} - d\right\}.$$

Погрешность формы реального профиля готовой детали определяется совокупностью ее размерных погрешностей в различных поперечных сечениях. Рассмотрим качественную картину возникновения погрешности формы готовой детали в ее произвольном поперечном сечении и приведем расчеты количественной оценки этой погрешности формы. Так как поверхностью заготовки является коническая поверхность с осью, образующей с осью шпинделя станка угол φ, то контуром рассматриваемого поперечного сечения заготовки является ***эллипс***. Таким образом, контуром поперечного профиля реальной детали будет пересечение поперечных сечений профиля номинальной детали и профиля заготовки, т. е. пересечение круга и эллипса (рис. 5).

Определим контур поперечного профиля реальной детали. Для этого рассмотрим пространственную систему координат OXYZ, приведенную на рис. 1. В данной системе координат коническая поверхность номинальной детали описана уравнением (1).

Тогда контур поперечного сечения $X = X_0$ номинальной детали является окружностью и определяется уравнением

$$Z^2+Y^2=(H-X_0)^2tg^2\alpha. \qquad (6)$$

Используя уравнения (4) и (5), получим уравнение конической поверхности заготовки в системе координат OXYZ:

$$Z^2+(XSin\varphi+YCos\varphi+Z)^2=$$

$$\left[(H-XCos\varphi+YSin\varphi-Z)tg\alpha+\delta\right]^2.$$

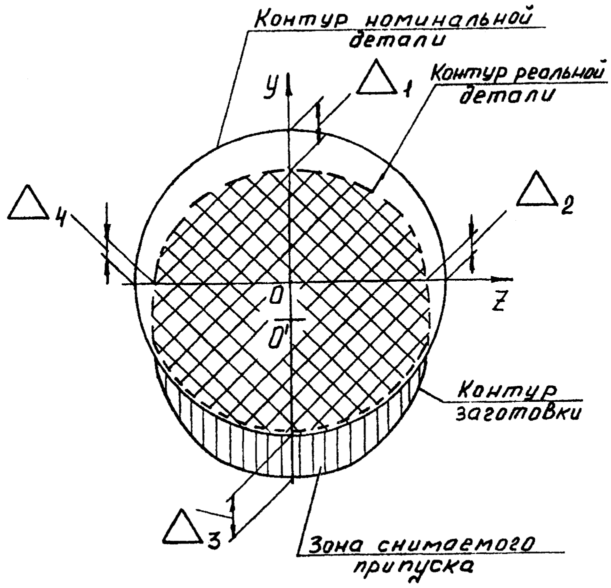


Рис. 5. Определение радиальных погрешностей поперечного сечения готовой детали

Тогда контур поперечного сечения $X=X_0$ заготовки, являющейся эллипсом, определяется уравнением

$$Z^2+\left[(YCos\varphi+Z)+(X_0Sin\varphi)\right]^2=\left[((YSin\varphi-Z)+(H-X_0Cos\varphi))tg\alpha+\delta\right]^2. \qquad (7)$$

Для случая, когда оси шпинделя станка и заготовки пересекаются в точке, расположенной на расстоянии δ от центра плоскости шпинделя станка, контуром поперечного сечения заготовки в системе OYZ является эллипс с уравнением

$$Z^2+(X_0Sin\varphi+YCos\varphi-dCos\varphi)^2=\left[(H-(X_0Cos\varphi-YSin\varphi+dSin\varphi))tg\alpha+\delta\right]^2.$$

Таким образом, поперечным сечением $X=X_0$ реальной детали является общая часть круга (6) – поперечное сечение номинальной детали и эллипса (7) – поперечное сечение заготовки, контур которой определяется уравнением

$$Z^2+Y^2Cos^2\varphi+Z^2+2YZCos\,\varphi+2YX_0Cos\,\varphi Sin\,\varphi+2ZX_0Sin\,\varphi+X_0^2Sin^2\varphi=$$

$$Z^2+(YCos\,\varphi+Z)^2+2X_0Sin\,\varphi(YCos\,\varphi+Z)+X_0^2Sin^2\varphi=(YSin\,\varphi-Z)^2tg^2\alpha+$$

$$+2(H-X_0Cos\,\varphi)tg^2\alpha(YSin-Z)+(H-X_0Cos\,\varphi)^2tg^2\alpha+2\delta tg\alpha(YSin\,\varphi-Z)+$$

$$+2\delta(H-X_0Cos\,\varphi)tg\alpha+\delta^2.$$

Рассмотрим характер изменения погрешности формы реального профиля готовой детали в поперечном сечении $X=X_0$ в полярной системе координат (рис. 6).

Каноническое уравнение эллипса поперечного сечения заготовки имеет вид

$$\frac{(Y-Y_0)^2}{A^2}+\frac{Z^2}{B^2}=1.$$

Центром эллипса является точка $A_1(0,Y_0)$,

где
$$Y_0=\frac{Sin\varphi}{1-\dfrac{Sin^2\varphi}{Cos^2\varphi}}\left[P(X_0)tg\alpha-X_0Cos\varphi\right],$$

$$P(X_0)=(H-X_0Cos\varphi)tg\alpha+\delta,$$

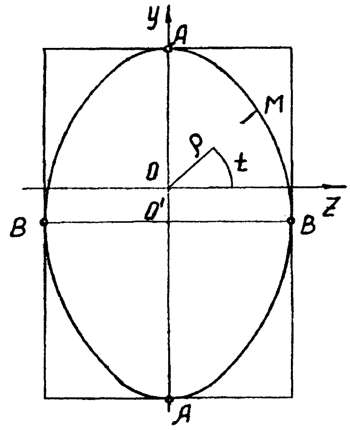
а его большая и меньшая полуоси A и B удовлетворяют соотношениям:

$$A^2=Y_0^2+\frac{P^2(X_0)}{1-\dfrac{Sin^2X}{Cos^2X}};\ B^2=A^2(1-\frac{Sin^2\varphi}{Cos^2\alpha}).$$

Характер изменения погрешности поперечного сечения готовой детали в координатной плоскости OYZ рассмотрим по двум радиальным направлениям: по оси OY вверх и вниз и по оси OZ влево и вправо.

1. Координата по оси OZ крайней верхней точки детали равна нулю , а ее координата по оси OY

$$A-(Y_0)=A+Y_0.$$



Р и с. 6. Определение погрешности формы готовой детали в поперечном сечении $X=X_0$ в полярной системе координат

Координата по оси OZ крайней верхней точки детали равна нулю, а ее координата по оси OY равна

$R(X_0) = (H - X_0)tg\alpha$, где R (X_0)- радиус детали в сечении $X=X_0$

Если разность $(A + Y_0) - R(X_0) > 0$, то погрешность в этом направлении равна нулю, а если указанная разность отрицательная, то погрешность (см. рис. 5), равна:

$$\Delta_1(X_0) = R(X_0) - (A + Y_0).$$

2. Координата по оси OY крайней правой точки заготовки приближенно равна нулю, а ее координата по оси OZ равна B.

Координата по оси OY крайней верхней точки детали равна нулю, а ее координата по оси OZ равна:

$$R(X_0) = (H - X_0)tg\alpha .$$

Если погрешность B-R(X_0)>0, то погрешность в этом направлении равна нулю, а если указанная разность отрицательная то погрешность равна

$$\Delta_2(X_0) = R(X_0) - B .$$

3. Координата по оси OZ крайней нижней точки равна нулю , а ее координата по оси OY равна $A_+(Y_0) = A - Y_0$. Координата по оси OZ крайней нижней точки детали равна нулю, а ее координата по оси OY равна $R(X_0) = (H - X_0)tg\alpha$. Если разность (A-$Y_0$)-R($X_0$)>0, то погрешность в этом направлении равна нулю, а если разность отрицательная, то погрешность $\Delta_3(X_0) = R(X_0) - (A - Y_0)$.

Рассуждения для направления вдоль оси OZ влево совпадает с рассуждениями для направления вдоль оси OZ вправо.

Таким образом, если считать в качестве погрешности формы готовой детали в поперечном сечении $X=X_0$ наибольшую из радиальных погрешностей в данных четырех направлениях, то

$$(X_0) = max\{\Delta_1(X_0), \Delta_2(X_0), \Delta_3(X_0)\}.$$

Для более детального исследования погрешности формы готовой детали в данном поперечном сечении $X=X_0$ рассмотрим в нем полярную систему координат с полярной осью переменного $\rho \in [0,\infty]$, совпадающей с положительной полуосью OZ, и полярным углом $t \in [0,2\pi]$, который откладывается от нее против часовой стрелки (см. рис. 6). В этом случае декартовы координаты точки сечения M (Z,Y) выражаются через ее полярные координаты M(t,ρ) с помощью равенств Z=ρConst, Y=ρConst.

Полярное уравнение поперечного сечения $X=X_0$ детали получается из его декартового уравнения с помощью замены декартовых переменных Z и Y их выражениями через полярные переменные ρ и t и имеет вид $(H - X_0)^2 tg^2\alpha = Z^2 + Y^2 = \rho^2(Cos^2 t + Sin^2 t) = \rho^2$. После преобразования получаем $\rho = \rho(t) = (H - X_0)tg\alpha$.

Аналогично для полярного уравнения поперечного сечения $X=X_0$ заготовки имеем

$$\rho^2 C - 2\rho\frac{Y_0 S\,\mathrm{int}}{A^2} + \left(\frac{Y_0^2}{A^2} - 1\right) = 0 .$$

Тогда с учетом соотношения $\frac{Y_0^2}{A^2} - 1 \langle 0$ полярное уравнение поперечного сечения заготовки примет вид

$$\rho = \rho(t) = \frac{\frac{Y_0 S\,int}{A^2} + \sqrt{\frac{Y_0^2 Sin^2 t}{A^4} - C\left(\frac{Y_0^2}{A^2} - 1\right)}}{C},$$

где $C = \frac{Sin^2 t}{A^2} + \frac{Cos^2 t}{B^2}$.

Для координаты центра эллипса O′ (0,Y_0) имеем

$$Y_0 = \frac{Sin\ \varphi}{1 - \frac{Sin^2\varphi}{Cos^2\alpha}}\left[P(X_0)tg\,\alpha - X_0 Cos\ \varphi\right],\ \text{где}\ P(X_0) = (H - X_0 Cos\,\varphi)tg\,\alpha + \delta\ ,$$

а его большая и меньшая полуоси А и В удовлетворяют соотношениям

$$A^2 = Y_0 + \frac{P^2(X_0)}{1 - \frac{Sin^2\varphi}{Cos^2\alpha}}\ ;\ B^2 = A^2\left(1 - \frac{Sin^2\varphi}{Cos^2\alpha}\right).$$

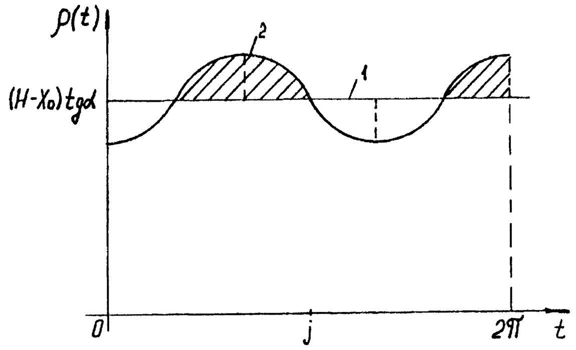
Таким образом, для расчета погрешности формы готовой детали в поперечном сечении $X=X_0$ в любом радиальном направлении, которое определяется значением полярного угла $t\in[0,\pi]$, необходимо иметь графики полярных уравнений детали (рис. 7)

$$\rho = \rho(t) = (H - X_0)tg\alpha$$

(прямая параллельная оси 0t , пересекающая ось 0ρ в точке $\rho=(H\text{-}X_0)tg\alpha$) и заготовки

$$\rho = \rho(t) = \frac{\frac{Y_0 S\,int}{A^2} + \sqrt{\frac{Y_0^2 Sin^2 t}{A^4} - C\left(\frac{Y_0^2}{A^2} - 1\right)}}{C}.$$

Тогда погрешность формы готовой детали в поперечном сечении $X=X_0$ в направлении $t\in[0,\pi]$ вычисляется по формуле



Р и с. 7. Графики полярных уравнений:
1 – детали; 2 – заготовки

$$\Delta(t) = \left|(H - X_0)tg\alpha - \frac{\frac{Y_0 S\,int}{A^2} + \sqrt{\frac{Y_0^2 Sin^2 t}{A^4} - C\left(\frac{Y_0^2}{A^2} - 1\right)}}{C}\right|.$$

Таким образом, выполненный теоретический анализ позволяет количественно оценить влияние неплоскостности базовых торцовых поверхностей на отклонения формы дорожек качения колец конических подшипников при шлифовании. В результате этого открывается возможность в зависимости от классности подшипников назначать оптимальную точность базовых торцовых поверхностей и достигать ее для каждого конкретного случая шлифования более экономичными методами обработки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Романов В.Л.* Некруглость изделий при бесцентровом шлифовании // Станки и инструменты. 1966. №5. С. 6-12.
2. *Альперович Т.А.* Теория копирования погрешностей базовой поверхности при внутреннем бесцентровом шлифовании // Станки и инструменты. 1966. №5. С. 3-7.