Краткие сообщения

Дифференциальные уравнения

УДК 517.956

М.Е. Лернер

СУЩЕСТВЕННО НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО, ПАРАБОЛИЧЕСКОГО И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ

Ставятся краевые задачи, содержащие только нелокальные краевые условия и дополнительно заданные в граничной точке искомой функции.

В открытом квадрате D с вершинами в точках O (0; 0), A (0; 1), B (1; 1), C (1; 0) рассмотрим уравнения

$$Lu \equiv u_{xx} + u_{yy} + a(x,y)u_x + b\,(x,y)u_y + c(x,y)u = 0\ ; \tag{1}$$

$$Mu \equiv u_y - u_{xx}a(x,y)u_x + c(x,y)u = 0\ ; \tag{2}$$

$$Nu \equiv u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0\ ; \tag{3}$$

$$a(x,y),\ b(x,y),\ \ c(x,y) \in C^0(\overline{D}).$$

З а д а ч а 1. Найти функцию $u(x,y)$ со свойствами:

1) $Lu \equiv 0$ в D;
2) $u \in C^0(\overline{D}) \cap C^1[\overline{D} \setminus (O \cup A \cup B \cup C)] \cap C^2(D)$;
3) $u(1;y) - u(0,y) = \varphi_1(y),\ \ 0 \le y \le 1,\ \ \varphi_1(y) \in C^0[0;1]$;
4) $u_x(1;y) - u_x(0,y) = \psi_1(y),\ \ 0 < y < 1,\ \ \psi_1(y) \in C^0(0;1)$;
5) $u(x;1) - u(x,0) = \varphi_2(x),\ \ 0 \le x \le 1,\ \ \varphi_2(x) \in C^0[0;1]$;
6) $u_y(x,1) - u_y(x,0) = \psi_2(x),\ \ 0 < x < 1,\ \ \psi_2(x) \in C^0(0;1)$;
7) $u(0,0) = u_0$.

Здесь $\varphi_1(y),\ \psi_1(y),\ \varphi_2(x),\ \psi_2(x)$ – заданные функции, u_0 – заданная константа, $\varphi_1(1) - \varphi_1(0) = \varphi_2(1) - \varphi_2(0)$ – условие согласования.

Т е о р е м а 1. Решение задачи 1 единственно, если $c(x,y) \le 0$ в D.

Доказательство теоремы 1. Пусть $u(x,y)$ – решение однородной задачи 1, но $u(x,y) \not\equiv 0$ в D. Без ограничения общности можно считать $\max\limits_{\overline{D}} u > 0$. В силу хорошо известного принципа максимума для эллиптических уравнений он не может достигаться в D и не может достигаться в точках O, A, B и C ввиду однородных для функции $u(x,y)$ краевых условий 3, 5 и 7.

1. Пусть $\max\limits_{\overline{D}} u = u(0,y_0),\ \ 0 < y_0 < 1$. Тогда $u_x(0,y_0) < 0$ [2], а в силу однородного для функции $u(x,y)$ краевого условия 3 $\max\limits_{\overline{D}} u = u(1,y_0)$ и $u_x(1,y_0) > 0$ [2], что вместе с предыдущим противоречит однородному краевому условию 4. К этому же противоречию придем, предположив, что $\max\limits_{\overline{D}} u = u(1,y_0)$. Следовательно, $\max\limits_{\overline{D}} u$ не может достигаться на $OA \cup BC$.

2. Пусть $\max\limits_{\overline{D}} u = u(x_0, 0)$, $0 < x_0 < 1$. Тогда в силу [2] и однородного краевого условия 5 придем в противоречие с однородным краевым условием 6. Значит, $\max\limits_{\overline{D}} u$ не может достигаться на $OC \cup AB$, а отсюда и предыдущего в $\overline{D}$. Следовательно, $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

З а д а ч а 2. Найти функцию $u(x, y)$ со свойствами:

1) $Mu \equiv 0$ в D;
2) $u \in C^0(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \setminus \overline{OC}) \cap C^2(D)$;
3) $u(1; y) - u(0, y) = \varphi_1(y)$, $0 \le y \le 1$, $\varphi_1(y) \in C^0[0;1]$;
4) $u_x(1; y) - u_x(0, y) = \psi(y)$, $0 < y < 1$, $\psi_1(y) \in C^0(0;1)$;
5) $u(x; 1) - u(x, 0) = \varphi_2(x)$, $0 \le x \le 1$, $\varphi_2(x) \in C^0[0;1]$;
6) $u(0, 0) = u_0$.

Здесь $\varphi_1(y)$, $\psi(y)$, $\varphi_2(x)$ – заданные функции, u_0 – заданная константа, $\varphi_1(1) - \varphi_1(0) = \varphi_2(1) - \varphi_2(0)$ – условие согласования.

Т е о р е м а 2. Решение задачи 2 единственно при $c(x, y) \ge 0$.

Доказательство теоремы 2. Пусть функция $u(x, y)$ – решение однородной задачи 2. Следовательно, она удовлетворяет однородным краевым условиям 1 – 6.

Предположим, что $u(x, y) \not\equiv 0$ в $\overline{D}$. Без ограничения общности можно считать $\max\limits_{\overline{D}} u > 0$. Тогда в силу принципа максимума для параболических уравнений [2] он должен достигаться на $\overline{AO} \cup OC \cup \overline{CB}$, а в силу однородных краевых условий 3, 5 и 6 он не может достигаться в точках O, A, B и C.

1. Пусть $\max\limits_{\overline{D}} u = u(0, y_0)$, $0 < y_0 < 1$. Тогда $u_x(0, y_0) < 0$ [2] и в силу однородного краевого условия 3 $\max\limits_{\overline{D}} u = u(1, y_0)$ и $u_x(1, y_0) > 0$ [2], что вместе с предыдущим противоречит однородному краевому условию 4. К этому же противоречию придем, предположив, что $\max\limits_{\overline{D}} u = u(1, y_0)$, $0 < y_0 < 1$. Следовательно, $\max\limits_{\overline{D}} u$ не может достигаться на $OA \cup CB$.

2. Пусть $\max\limits_{\overline{D}} u = u(x_0, 0)$, $0 < x_0 < 1$. Тогда в силу однородного краевого условия 5 он должен достигаться в точке $(x_0, 1)$. Отсюда на основании сильного принципа максимума для параболических уравнений [2] $u(x, y) \equiv const$ в $\overline{D}$ и ввиду $u(0, 0) = 0$ должно быть $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D}$, что приводит к противоречию с $u(x, y) \not\equiv 0$ в $\overline{D}$.

Из пп. 1 и 2 следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

З а д а ч а 3. Найти функцию $u(x, y)$ со свойствами:

1) $Nu \equiv 0$ в D;
2) $u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$;
3) $u(1; y) + u(0, y) = \varphi_1(y)$, $0 \le y \le 1$, $\varphi_1(y) \in C^1[0;1]$;
4) $u(x; 1) + u(x, 0) = \varphi_2(x)$, $0 \le x \le 1$, $\varphi_2(x) \in C^0[0;1]$;
5) $u(0, 0) = u_0$.

Здесь $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(x)$ – заданные функции, подлежащие согласованию по непрерывности функции $u(x, y)$ в $\overline{D}$; u_0 – заданная константа.

Непосредственно можно убедиться, что · справедливо следующее утверждение: для уравнения $u_{xy} = 0$ решение задачи 3 определяется формулой

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left[\varphi_1(y)+\varphi_2(x)-\varphi_1(0)-\varphi_2(0)+2u_0\right]$$

при условиях согласования

$$\varphi_1(1)+\varphi_1(0)=\varphi_2(1)+\varphi_2(0),$$
$$\varphi_1(1)-\varphi_1(0)-2\varphi_2(0)+4u_0=0.$$

Задачу 3, как и задачи 1 и 2, можно редуцировать к системе двух уравнений относительно следов искомой функции на двух смежных сторонах квадрата D.

Обзор работ по нелокальным краевым задачам содержится в [3] и др.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лернер М.Е.* Две существенно нелокальные краевые задачи для уравнений эллиптического типа // Математическое моделирование и краевые задачи : Тр. восьмой межвуз. конф.. Самара, 1998. С. 63–67.
2. *Ландис Е.М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971. 287 с.
3. *Антоневич А.Б.* Линейные функциональные уравнения. Операторный подход. Минск: Университетское, 1988. 231 с.