

# Дифференциальные уравнения

УДК 517.956

М. Е. ЛЕРНЕР

## ПРИНЦИПЫ МАКСИМУМА И МЕТОДИКА ПОСТАНОВКИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И СМЕШАННОГО ТИПОВ В КОНЕЧНЫХ ОДНО- И МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

*Для гиперболических уравнений приводится новое доказательство с помощью «базисных» областей сформулированных ранее автором принципов максимума в более широком классе решений. На их основе ставятся новые краевые задачи  $A^*$ ,  $A^{**}$ ,  $\Phi^*$ , и доказывается единственность их решений, а также разрешимость поставленной ранее автором задачи «А» в классе ограниченных и кусочно-регулярных решений. Окончательно и положительно решен вопрос о возможности постановки краевой задачи, разрешимой в классе функций, непрерывных в замыканиях вышеуказанных областей (задача  $A^*$ ).*

*Предлагается методика постановки краевых задач на основе принципов максимума для уравнений смешанного типа, гиперболических в одно- и многосвязных подобластях произвольной формы с одной или несколькими, в том числе замкнутыми, линиями изменения типа уравнения. Указываются работы автора, в которых удалось реализовать эту методику: доказать разрешимость поставленных на ее основе краевых задач.*

Существенное место в теории дифференциальных уравнений занимают принципы максимума. Они дают оценки и единственность краевых задач, и отсюда подчас следует их разрешимость: А. Хаар, Е. Хопф, А. Н. Тихонов, С. Зарембо, Г. Жиро, А. В. Бицадзе, П. Жермен и Р. Бадер, К. И. Бабенко, О. А. Олейник, С. Агмон, Л. Ниренберг и М. Х. Проттер, Х. Вайнбергер, С. П. Пулькин и другие. Принципы максимума стали самостоятельным объектом монографий и исследований [1—3].

Как показано в [2, 4—11] и в данной статье, принципы максимума могут быть положены в основу методики постановки новых краевых задач, в частности, задач с нелокальными краевыми условиями с их носителями на границе области. Эти задачи можно интерпретировать как обратные краевые задачи или как задачи управления, теория и приложения которых в настоящее время продолжают интенсивно развиваться.

Принципы максимума могут также иметь самостоятельное значение вне связи с краевыми задачами: применяться для исследования качественных свойств физических процессов [12, 13] и специальных функций [1].

Данная статья и посвящена важной проблеме качественной теории дифференциальных уравнений — принципам максимума и их приложениям к постановке новых краевых задач.

### 1. Уравнения гиперболического типа

Для уравнений эллиптического и параболического типов формулированию принципов максимума предшествовали постановки краевых задач в классах непрерывных функций в областях нефиксированной,

произвольной формы, и они рассматривались как принципы максимума этих задач [1, 14]. Для гиперболических уравнений принципы максимума до нашей работы [6] формулировались лишь в характеристических треугольниках и четырехугольниках — «классических» областях. Что же касается принципов максимума в неклассических односвязных и, тем более, в многосвязных областях, то они не были обнаружены и не было ясно, имеют ли вообще они место. Следует отметить, что в неклассических односвязных областях определенной формы гиперболические уравнения и системы рассматриваются, например, в механике [16], теплофизике [17—19], теории оптимального управления в задачах математической физики [20, 21]. Однако к рассмотрению гиперболических уравнений в многосвязных областях произвольной формы можно прийти из следующих соображений. Пусть струна, совершающая плоские «вынужденные» колебания, в момент времени  $t_1$  на одном из ее участков пристанет, прилипнет по ее профилю к некоторому предмету и в результате этого распадется на две колеблющиеся струны. Допустим, что затем концы струн, находящиеся на этом предмете, станут отходить от него и в момент времени  $t_2$  сольются, т. е. образуется одна колеблющаяся струна. Следовательно, в течение времени  $t_2 - t_1$  существовала «мертвая» зона, зона «молчания» струны. Таким образом, возникнет двусвязная область, в которой следует рассматривать гиперболическое уравнение, описывающее колебание струны. Отсюда ясно, как можно прийти к рассмотрению гиперболических уравнений в более, чем в двусвязных областях. Такая интерпретация рассмотрения гиперболических уравнений в многосвязных областях возникла на Самарском городском семинаре «Актуальные проблемы механики и математики» под руководством профессора Ю. П. Самарина (соавтора работы [16]).

Следует также отметить, что решения гиперболических уравнений и их производные могут терпеть разрывы при переходе через характеристики [22, с. 123]. Это является серьезным препятствием при постановке для них краевых задач в неклассических областях в классе непрерывных функций.

Для волнового и более общих гиперболических уравнений краевые задачи с данными на всей границе односвязных областей определенной формы исследовались и методами функционального анализа [23—32].

В принятой в [6, 8, 9, 13, 14] терминологии и обозначениях рассмотрим в области  $H$  уравнение

$$Lu \equiv u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0, \quad (1)$$

где  $a, a_x, b, b_y, c \in C^0(\bar{H})$ . Ось  $Ox$  направлена слева направо, ось  $Oy$  — снизу вверх. Граница  $\gamma$  области  $H$  может состоять из одного или нескольких попарно непересекающихся простых замкнутых контуров, каждый из которых может состоять из конечного числа прямолинейных отрезков и гладких дуг (сторон области  $H$ , их концы — ее вершины, образованные ими углы — ее углы). Каждая открытая дуга во внутренних точках не касается характеристик и с любой из них может пересекаться только в одной точке, она может быть либо «строго» восходящей ( $y = y(x)$ ,  $y'(x) > 0$ ), либо «строго» нисходящей ( $y = y(x)$ ,  $y'(x) < 0$ ) линией. Такие области, контуры, дуги считаются правильными [14]. Для удобства нехарактеристические прямолинейные стороны считаются также правильными дугами [14].

Точка  $Q \in \gamma$  считается левой (верхней) граничной точкой области  $H$ , если она может быть левым (верхним) концом горизонтального (вертикального) открытого отрезка, содержащегося в  $H$ ,  $\gamma_L(\gamma_B)$  — множество таких точек. Ясно, что следует понимать под  $\gamma_{\text{пр}}(\gamma_n)$ . На  $\gamma$  могут быть точки, не принадлежащие ни  $\gamma_L$  и ни  $\gamma_{\text{пр}}$ , ни  $\gamma_B$  и ни  $\gamma_n$  [14].

Допустим, что при некоторых условиях для произвольного решения  $u(x, y)$  уравнения (1) из некоторого класса  $R_*$  справедливо утверждение:  $\max_H |u|$  при  $lu = u_y + a(x, y)u = 0$  на  $\bar{\gamma}_L$  достигается (только) на  $\bar{\gamma}_B$  (строгий принцип максимума модуля в классе  $R_*$  с данными на  $\bar{\gamma}_L$  и достижением его на  $\bar{\gamma}_B$ ). Отсюда следует постановка и единственность решения, по крайней мере в классе  $R_*$ , следующих краевых задач с локальными и нелокальными краевыми условиями.

**Задача А.** Найти решение  $u(x, y)$  уравнения (1) по его следу  $\tau(x)$  на  $\gamma_B$  и следу  $v(y)$  оператора  $lu$  на  $\bar{\gamma}_L \setminus \delta_L$  ( $a(x, y)$  — коэффициент уравнения (1),  $\delta_L$  — множество вершин области  $H$  из  $\bar{\gamma}_L$ ).

**Задача  $\Phi_\alpha$ .** Найти решение  $u(x, y)$  уравнения (1): 1) по следу  $v(y)$  оператора  $lu$  на  $\bar{\gamma}_L \setminus \delta_L$ ; 2) по его следу  $\tau(x)$  на  $\bar{\gamma}_B \setminus \gamma_B^*$ ; 3) по разности  $u(Q_1) - \alpha(Q_2)u(Q_2) = g(Q_1)$ .

Здесь  $Q_1$  — произвольная точка из  $\gamma_B^*$ ,  $Q_2 \in \sigma$ ,  $Q_2 = \varphi(Q_1)$ ,  $\varphi(Q_1)$  — биекция  $\gamma_B^*$  на  $\sigma$ ,  $\gamma_B^*$  и  $\sigma$  — совокупности попарно непересекающихся замкнутых связных частей соответственно из  $\bar{\gamma}_B$  и  $\gamma \setminus \bar{\gamma}_B$ ,  $\alpha(Q_2)$  — известная функция,  $|\alpha(Q_2)| < 1$  ( $|\alpha(Q_2)| \leq 1$ ).

Как отмечено в [13, 14] частными случаями задачи А являются классические задачи Гурса, Коши и Дарбу.

**Пример 1.** Пусть  $H_0$  — ступенчатая область с вершинами  $O(0; 0)$ ,  $A(0; 2)$ ,  $B(1; 2)$ ,  $C(1; 1)$ ,  $D(2; 1)$ ,  $E(2; 0)$ . Здесь  $\gamma_L = OA$ ,  $\gamma_B = AB \cup C \cup CD$ ,  $\gamma_n = OE$ ,  $\gamma_{\text{пр}} = BC \cup C \cup DE$ . Проведем отрезки  $CF$  и  $CL$ ;  $F(0; 1)$ ,  $L(1; 0)$ .

В задаче А след  $\tau(x)$  искомой функции  $u(x, y)$  задается на  $\bar{AB}$  ( $\tau(x) = \tau_1(x)$ ) и на  $\bar{CD}$  ( $\tau(x) = \tau_2(x)$ ); след  $v(y)$  оператора  $lu$  — на  $OA$ . Его задание равносильно заданию на  $\bar{OA}$  следа  $\psi(y)$  самой искомой функции,  $\psi_2(2) = \tau_1(0)$ ,  $\psi(y) \in C^1(OA)$ .  $\psi(y)$  должна быть решением задачи Коши для уравнения

$$u_y(0, y) + a(0, y)u(0, y) = v(y), \quad u(0; 2) = \tau_1(0). \quad (2)$$

Следовательно, решение задачи А сводится к последовательному решению классической задачи Гурса, например, в прямоугольных областях  $H_1 = ABCF$ ,  $H_2^1 = FCLO$ ,  $H_2^2 = CDEL$ . Отсюда ясно, что задача А, вообще говоря, не разрешима в классе непрерывных в  $\bar{H}$  функций из-за «сингулярности», «занятости» вершины  $C$  в том смысле, что в ней предопределено значение искомой функции ее следами на части границы примыкающей к ней в точке  $C$  области  $H_1$ . Следовательно, в точке  $C$  функция  $\tau_2(x)$  не может быть задана произвольно.

Однако, как будет видно из дальнейшего, задача А разрешима в классе ограниченных функций.

Чтобы получить непрерывное в  $\bar{H}_0$  и кусочно-регулярное в  $H_0 \setminus CL$  решение уравнения (1) достаточно задать  $u(x, y)$  в точке  $D$ , а  $\tau_2(x)$  как решение на  $x_C \leq x \leq x_D$  двухточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, например,

$\tau''(x) = f(x)$ ,  $f(x) \in C^0[x_C, x_D]$  (задача  $A^*$ ), или же задать  $u(x, y)$  в точках  $A, B$  и  $D$ , а  $\tau_1(x)$  и  $\tau_2(x)$  в виде решений двухточечных краевых задач на  $x_A \leq x \leq x_B$  и  $x_C \leq x \leq x_D$  соответственно для уравнений  $\tau''_1(x) = f_1(x)$  и  $\tau''_2(x) = f_2(x)$  (задача  $A^{**}$ ).

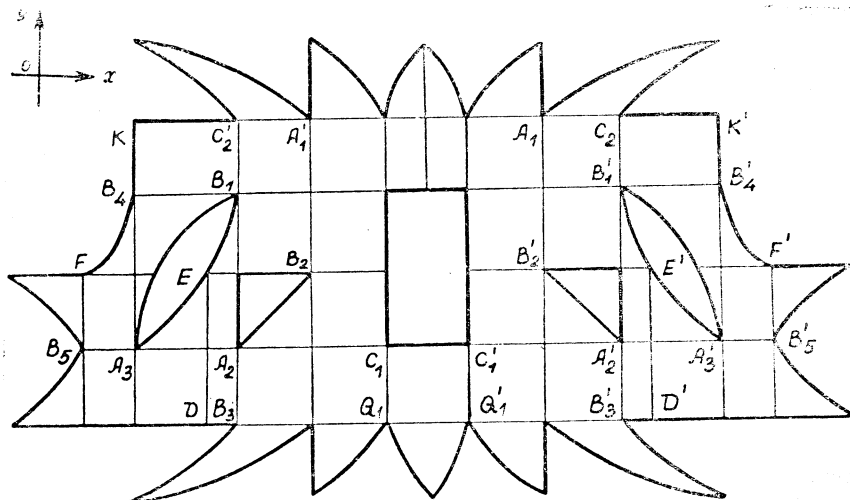


Рис. 1. Иллюстрация к определению сингулярных вершин правильной области

Любую правильную область можно разбить на базисные области, к которым относятся:

1) правильная двуугольная область. Следовательно, ее граница состоит из двух сторон: либо нисходящих (область  $\Omega$ ), либо восходящих (область  $\Omega'$ ), на рис. 1 соответственно области  $B'_1 E' A'_3 B'_1$  и  $B_1 E A_3 B_1$ ;

2) правильная треугольная область  $ABC$ , сторона которой  $AB$  ( $x_A < x_B$ ) есть отрезок горизонтальной характеристики. Здесь возможны области: а) при  $y_C > y_A$ :  $W$  ( $x_C < x_A$ ),  $\Delta$  ( $x_C = x_A$ ),  $V$  ( $x_A < x_C < x_B$ ), а также области  $\Delta'$  и  $W'$ , симметричные  $\Delta$  и  $W$  относительно оси ординат (на рис. 1 они отсечены от области  $H$  отрезком  $C'_2 C_2$ ); б) при  $y_C < y_A$ :  $W_1$ ,  $\Delta_1$ ,  $V_1$ ,  $\Delta'_1$  и  $W'_1$ , симметричные соответственно областям  $W$ ,  $\Delta$ ,  $V$ ,  $\Delta'$  и  $W'$  относительно оси абсцисс (на рис. 1 они отсечены от области  $H$  отрезком  $B_3 B'_3$ );

3) треугольные области  $W_2 = CAE$  и  $W'_2 = BFC$ , отсекаемые вертикальными отрезками  $AE$  и  $BF$  соответственно от  $W_1$  и  $W'_1$ ;

4) правильные четырехугольные области  $ABCD$ , у которых стороны  $AB$  ( $x_A < x_B$ ) и  $CD$  ( $x_C > x_D$ ) — горизонтальные отрезки,  $y_A > y_D$ .

Любая базисная область вертикальными характеристиками может быть разбита на простые области [14]. Такой считается односвязная область, у которой  $\gamma_L$  и  $\gamma_B$  — связные множества и могут быть заданы в виде:

$$a) \gamma_L: x = r(y), \quad r(y) \in C^0[y_n, y_b], \quad y_n = \min_{\Pi} y, \quad y_b = \max_{\Pi} y;$$

$$б) \gamma_B: y = m(x), \quad m(x) \in C^0[x_L, x_{np}] \cap C^1(x_L, x_{np});$$

$$x_L = \min_{\Pi} x, \quad x_{np} = \max_{\Pi} x.$$

Если, кроме этого,  $r(y) \in C^1(y_n, y_v)$  и  $m(x) \in C^2(x_l, x_{np})$ , то область считается простейшей.

Пусть область  $H$  не является простой и отлична от базисной области. Проведем через ее вершины горизонтальные характеристики:  $y = y_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ ,  $y_0 = \max y$ ,  $y_n = \min y$ ;  $y_i > y_{i+1}$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ ;  $G_i = \{(x, y) \in \bar{H} : y_i > y > y_{i+1}\}$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ ;  $H_i = \bar{H} \cap G_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $\gamma^i = \bar{H}_i \cap \{(x, y) : y = y_i\}$ ,  $i = \overline{0, n}$ . Тогда каждое множество  $H_i$  может состоять из конечного числа треугольных и четырехугольных базисных областей  $H_{ij}$  [14], где  $j$  — номер такой области из множества  $H_i$ , приписываемый этим областям в порядке их расположения в полосе  $G_i$  слева направо.

Пусть  $K = H \cap K_0$ ;  $K_0$  — множество проведенных выше характеристик  $y = y_i$ ;  $M = H \cap M_0$ ;  $M_0$  — множество вертикальных характеристик, проведенных через вершины области  $H$  из  $\bar{\gamma}_v$  и каждой точки из  $\gamma \cap K_0$ . Ясно, что характеристики из  $M_0$  могут разбивать каждую базисную область  $H_{ij}$  лишь на конечное число простых областей  $H_{ij}^k$ , которым приписывается номер  $k$  в порядке их расположения в  $H_{ij}$  слева направо (см. пример 1).

### Принципы максимума

**Определение 1.** Решением уравнения (1) класса  $R$  будем считать функцию  $u(x, y)$  со свойствами: 1)  $Lu = 0$  в  $H \setminus K \cup \bar{M}$ ; 2)  $u \in C^0(\bar{H})$ ,  $u_x \in C^0(H \setminus M)$ ,  $u_y \in C^0[(H \setminus K) \cup (\bar{\gamma}_l \setminus \delta_l)]$ ,  $u_{xy} \in C^0[H \setminus (K \cup M)]$ . Если, кроме этого,  $u_y \in C^0[\bar{\gamma} \setminus (\bar{\gamma}_n \setminus \gamma_n)]$ ,  $u_y \in C^0[\bar{\gamma} \setminus (\bar{\gamma}_v \setminus \gamma_v)]$  и  $u(x, y)$  — односторонне непрерывна снизу (сверху) на  $y = y_i$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  ( $i = \overline{1, n}$ ), то  $u(x, y)$  будем считать решением уравнения (1) класса  $R_1$  (класса  $R_2$ ). Пусть здесь и всюду ниже  $Q$  — произвольная точка из  $\bar{H} \setminus (\bar{\gamma}_l \cup \bar{\gamma}_v)$ ,  $PQ$  — отрезок горизонтальной характеристики, проведенной из точки  $Q$  до пересечения с  $\bar{\gamma}_l$  в точке  $P$ ;  $h = a_x + ab - c$ ,  $\beta = \exp\{\int_{PQ} b(x, y) dx\}$ .

**Теорема 1 (Принципы максимума).** Пусть  $u(x, y)$  — решение уравнения (1) класса  $R$  (класса  $R_2$ ),  $lu = 0$  на  $\bar{\gamma}_l$ ,  $u(x, y) \not\equiv 0$  в  $\bar{H}$ . Тогда (только) на  $\bar{\gamma}_v$  достигается:

1)  $\max |u|$ , если он положителен и коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям  $A_1$  [8] или  $A$ : 1)  $a(P) < 0$ ; 2)  $h < 0$  в  $\bar{H} \setminus (\bar{\gamma}_v \setminus \gamma_v)$ ; 3)  $c \leq 0$  в  $\bar{H} \setminus (\bar{\gamma}_v \setminus \gamma_v)$  (принцип максимума (решения));

2)  $\max |u|$ , если коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям  $C$  [8]; 1)  $a(P) < 0$ ; 2)  $a(P) + \int_{PQ} \beta[2|h+c|] dx < 0$  в  $\bar{H} \setminus (\bar{\gamma}_v \setminus \gamma_v)$  —  $\int_{PQ}$

или условиям  $D$  [8]: 1)  $a < 0$  в  $\bar{H} \setminus (\bar{\gamma}_v \setminus \gamma_v)$ ; 2)  $\beta(Q)a(Q) + \int_{PQ} \beta|h| dx < 0$  в  $\bar{H} \setminus (\bar{\gamma}_v \setminus \gamma_v)$  (принцип максимума модуля);

3)  $\max |u| \exp\{mx + ny\}$ , где  $m$  и  $n$  — некоторые числа [9] (мультипликативный принцип максимума модуля).

**Доказательство.** 1. Покажем, что теорема верна в базисных областях.

1.1. Пусть  $u \in R_2$  в базисной области  $H$  и точка  $Q$  расположена справа от отрезка из множества  $M$ , пересекающего эту область, и

левее нее нет иных таких отрезков,  $Q_0$  — точка пересечения  $PQ$  с этим же отрезком. Возьмем на отрезке  $PQ$  точки  $Q'_0$  и  $Q''_0$  соответственно слева и справа от точки  $Q_0$  и на отрезках  $PQ'_0$  и  $Q''_0Q$  проинтегрируем тождество

$$(\beta u)_x + (\beta au)_x - \beta hu = 0,$$

а затем перейдем к пределу при  $Q'_0 \rightarrow Q_0$  и  $Q''_0 \rightarrow Q_0$ . Тогда с учетом непрерывности  $u(x, y)$  и  $u_y(x, y)$  в  $H$ , как и в случае  $u \in R_2$  [9], получим соотношение

$$\beta(Q)u_y(Q) = [u_y(P) + a(P)u(P)] - \beta(Q)a(Q)u(Q) + \int_{PQ} \beta h u dx, \quad (3)$$

где под  $u_y(Q)$  имеется в виду  $u_y(x_Q, y_Q + 1)$ . Как и при доказательстве леммы 2 [9], можно убедиться, что (3) справедливо и при  $Q \in \gamma \setminus (\bar{\gamma}_l \cup \bar{\gamma}_v)$ . Ясно, что (3) верно, когда область  $H$  пересекается несколькими отрезками из  $M$  и, тем более, когда точка  $Q$  лежит слева от этих отрезков. Из (3) следует

$$\begin{aligned} \beta(Q)u_y(Q) &= [u_y(P) + a(P)u(P)] - a(P)u(Q) - \\ &\quad - \int_{PQ} \beta h [u(Q) - u] dx - u(Q) \int_{PQ} \beta c dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда ввиду  $lu=0$  на  $\bar{\gamma}_l$  при  $\max_{PQ} |u| = u(Q) > 0$  и при этом же из (3)

$$\beta(Q)u_y(Q) \geq -u(Q) [a(P) + \int_{PQ} \beta [2|h| + c] dx], \quad (5)$$

$$\beta(Q)u_y(Q) \geq -u(Q) [\beta(Q)a(Q) + \int_{PQ} \beta |h| dx]. \quad (6)$$

а. Пусть  $\max_H u > 0$  и выполняются условия  $A_1$  или  $A$  и максимум достигается в точке  $Q'$ . Она не может принадлежать  $\bar{H} \setminus (\bar{\gamma}_l \cup \bar{\gamma}_v)$ , так как в силу условий  $A_1$  или  $A$ ,  $lu=0$  на  $\bar{\gamma}_l$  и (4) было бы  $u_y(x_{Q'}, y_{Q'} + 0) > 0$ , что невозможно. Если  $\bar{\gamma}_l$  вертикальная или нисходящая сторона области  $H$ , то точка  $Q'$  не может принадлежать  $\bar{\gamma}_l \setminus \bar{\gamma}_v$  ввиду  $lu=0$  на  $\bar{\gamma}_l$  (ведь тогда было бы  $u_y(x_{Q'}, y_{Q'} + 0) > 0$ , что невозможно). Следовательно,  $\max_H u$  достигается только на  $\bar{\gamma}_v$  (в смысле достигается на  $\bar{\gamma}_v$  и не может достигаться в  $\bar{H} \setminus \bar{\gamma}_v$ ).

б. Пусть  $\max_H |u| > 0$  и выполняются условия  $C$  или  $D$ . Без ограничения общности можно считать  $\max_H |u| = \max_H u > 0$ . Допустим, что он достигается в точке  $Q' \in [\bar{H} \setminus (\bar{\gamma}_l \cup \bar{\gamma}_v)]$ . Тогда в силу условий  $C$  или  $D$ ,  $lu=0$  на  $\bar{\gamma}_l$  из (5) и (6) следует

$$u_y(x_{Q'}, y_{Q'} + 0) > 0, \quad (7)$$

что невозможно. Он также не может достигаться в точке из  $\bar{\gamma}_l \setminus \bar{\gamma}_v$ , так как в ней в силу  $lu=0$  на  $\bar{\gamma}_l$  и  $a(P) < 0$  было бы  $u_y(P) > 0$ . Следовательно,  $\max_H |u|$  достигается только на  $\bar{\gamma}_v$ .

1.2. Пусть  $u \in R$  в базисной области  $H$ .

а. Пусть  $\max u > 0$  и удовлетворяются условия  $A_1$  или  $A$ . Пусть, на-  
 $\bar{H}$   
 пример,  $H = W'$ ,  $x = \varphi(y)$  — уравнение  $\gamma_{np} = BC$ . Допустим, что  $\max u$

не достигается на  $\bar{\gamma}_v$ . Тогда в силу  $u_y \in C^0(W' \cup \gamma_l)$ , условий  $A_1$  и  $A$   
 $lu = 0$  и отсюда ввиду (7) он не может достигаться в  $W'$  и, следова-  
 тельно, должен достигаться в некоторой точке  $Q \in (AB \cup B \cup BC)$ . Значит,  
 в некоторой окрестности точки  $Q$  должна существовать такая точка  
 $Q_0 \in W'$ , что  $u(Q_0) > 0$ ,  $u(Q_0) > \max u$ . Проведем через точку  $Q_0$  линии

$y = y_{Q_0}$  и  $x = \varphi(y) - \varepsilon (\varepsilon > 0)$  и обозначим через  $W'_0 = A'Q_0C'$  открытую  
 $\bar{AC}$   
 треугольную область, отсекаемую ими от области  $W'$  (она также  
 является базисной). В  $W'_0$  функция  $u(x, y) \in R_2$ . Следовательно, в силу  
 п. 1.1, а  $\max u$  достигается только на  $A'C'$  и, стало быть, больше, чем  
 $u(Q_0)$ . Это противоречит  $u(Q_0) > \max u \geq \max u$  и доказывает требуемое

здесь. Ясно, что здесь излишне требование: непрерывность  $a, b, c$  в  $W'$   
 $\bar{AC}$   $\bar{A'C'}$   
 вплоть до  $AB \cup B \cup BC = \gamma \setminus \gamma_l$ .

С помощью аналогичных построений и аргументации можно убе-  
 диться, что и в остальных базисных областях  $\max u$  достигается на  $\bar{\gamma}_v$   
 $\bar{H}$   
 без указанного ограничения на коэффициенты уравнения (1).

б.  $\max |u| > 0$  и удовлетворяются условия  $C$  или  $D$ . Тогда, повторяя  
 $\bar{H}$   
 предыдущие построения и пользуясь результатами п. 1.1, б относительно  $\max |u|$ , легко убедимся в том, что  $\max |u| = \max |u|$ .  
 $\bar{H}$   $\bar{\gamma}_v$

2. Пусть теперь  $H$  — правильная небазисная область. Как и выше,  
 разобьем ее на базисные области  $H_{ij}$ .

2.1.  $u \in R$ .

а.  $\max u > 0$  и удовлетворяются условия  $A_1$  или  $A$ . Пусть  $i_0$  — наи-  
 $\bar{H}$   
 меньший номер из полос  $G_i$ , содержащих базисные области, в замыка-  
 ниях которых достигается  $\max u$ . Пусть  $H_{i_0 j_0}$  — одна из таких областей.  
 $\bar{H}$

Следовательно, не существует области  $H_{i_0-1 j}$ , в замыкании которой  
 достигается  $\max u$ . Если  $i_0 = 1$ , то в силу п. 1.2, а  $\max u$  достигается на  
 $\bar{H}$   
 границе  $\bar{\gamma}_v^{i_0 j_0}$  области  $H_{i_0 j_0}$  и, следовательно, на  $\bar{\gamma}_v$ . Если же  $i_0 \neq 1$  и  
 $\max u$  не достигается на  $\bar{\gamma}_v$ , то он должен достигаться в силу предыду-  
 $\bar{H}$   
 щего на  $y = y_{i_0-1}$ , а отсюда в некоторой области  $H_{i_0-1 j}$ . Но это невоз-  
 можно в силу сделанного предположения.

б.  $\max |u| > 0$  и удовлетворяются условия  $C$  или  $D$ . Тогда, поль-  
 $\bar{H}$   
 зуясь результатом п. 1.2, б и повторяя предыдущую аргументацию,  
 убедимся в том, что  $\max |u|$  достигается на  $\bar{\gamma}_v$ .  
 $\bar{H}$

2.2.  $u \in R_2$ .

а.  $\max u > 0$  и удовлетворяются условия  $A_1$  или  $A$ . Допустим, что  
 $\bar{H}$   
 $\max u = u(Q')$ , но точка  $Q' \in \bar{\gamma}_v$ . Она не может принадлежать  $\bar{H}_1$ , так  
 $\bar{H}$   
 как в силу п. 1.1, а она принадлежала бы  $\bar{\gamma}_v$ . Она не может принад-

лежать  $\bar{H}_2$ , так как по тем же причинам она должна была бы принадлежать  $\bar{H}_1$ , а отсюда и  $\gamma_v$ . Продолжая этот процесс, придем к выводу, что точка  $Q'$  не может принадлежать и  $\bar{H}_n$ . Следовательно, точка  $Q'$  должна принадлежать только  $\gamma_v$ .

б.  $\max|u| > 0$  и удовлетворяются условия  $C$  или  $D$ . Тогда, пользуясь результатом п. 1.1, б и повторяя предыдущую аргументацию, убедимся, что  $\max|u|$  достигается только на  $\gamma_v$ .

Справедливость последнего утверждения теоремы вытекает из ее предыдущих утверждений и того, что замена  $u = v \exp\{mx + ny\}$  при указанных значениях  $m$  и  $n$  в [9] преобразует уравнение (1) в уравнение, коэффициенты которого удовлетворяют условиям  $C$  [9], причем оператор  $lv$  обладает свойствами оператора  $lu$  [9].

*Замечание 1.* Из доказательства теоремы 1 видно, что в ней излишне требование непрерывности  $a, a_x, b, b_y$  и  $c$  в  $H$  вплоть до  $\gamma \setminus \gamma_l$ . Кроме того, в отличие от [8], [9] принципы максимума распространены на класс  $R$  решений уравнения (1).

*Замечание 2.* Можно показать, что в классе  $R_2$  справедлив принцип максимума типа К. И. Бабенко [9].

Для уточнения строгого принципа максимума и выяснения условий разрешимости задачи  $A$  в классе непрерывных функций приведем следующее.

*Определение 2.* Вершина  $Q_0$  области  $H$  считается сингулярной лишь в следующих случаях.

1.  $Q_0$  — нижний конец восходящей стороны из  $\gamma_v$  и вертикальной или расположенной слева от нее восходящей стороны из  $\gamma_n$  (например, на рис. 1 точки  $A_1$  и  $A_3$ ).

2.  $Q_0$  — верхний конец восходящей стороны из  $\gamma_v$  и: а) либо восходящей и расположенной слева от нее стороны из  $\gamma_n$  (точка  $B_1$ ); б) либо правый конец горизонтальной стороны из  $\gamma_n$  (точки  $B_2$  и  $B_3$ ); в) либо нижний конец вертикальной стороны (точка  $B_4$ ) или нижний конец нисходящей стороны из  $\gamma_n$  (точка  $B_5$ ).

3.  $Q_0$  — нижний конец нисходящей стороны из  $\gamma_v$  и нижний конец вертикальной стороны (точки  $A'_1$  и  $A'_2$ ) или нисходящей и расположенной справа от нее нисходящей стороны из  $\gamma_n$  (точка  $A'_3$ ).

4.  $Q_0$  — верхний конец нисходящей стороны из  $\gamma_v$  и: а) либо нисходящей и расположенной справа от нее стороны из  $\gamma_n$  (точка  $B'_1$ ); б) либо левый конец горизонтальной стороны из  $\gamma_n$  (точки  $B'_2$  и  $B'_3$ ); в) либо нижний конец вертикальной стороны (точка  $B'_4$ ) или восходящей стороны из  $\gamma_n$  (точка  $B'_5$ ).

5.  $Q_0$  — левый конец горизонтальной стороны из  $\gamma_v$  и нижний конец вертикальной стороны (точка  $C_1$ ) или восходящей стороны из  $\gamma_n$  (точка  $C_2$ ).

6.  $Q_0$  — правый конец горизонтальной стороны из  $\gamma_v$  и нижний конец вертикальной стороны (точка  $C'_1$ ) или нисходящей стороны из  $\gamma_n$  (точка  $C'_2$ ). При этом будем говорить, что вершина  $Q_0$  сингулярна или является сингулярным концом стороны из  $\gamma_v$ , что конец этой стороны сингулярен, а сама сторона — сингулярна.

Заметим, что сингулярные вершины отсутствуют у простых и базисных областей.

*Лемма 1.* Пусть  $u(x, y)$  — решение уравнения (1) класса  $R_2$ ,  $lu = 0$  на  $\gamma_l$ ,  $\max|u| > 0$  ( $\max|u| > 0$ ) и коэффициенты уравнения (1) удовлетво-

ряют условиям  $A_1$  или  $A$  (условиям  $C$  или  $D$ ). Тогда  $\max_H (\max_H |u|)$  не может достигаться в сингулярной вершине области  $H$  и достигается только на  $\bar{\gamma}_3 \setminus \delta^*_3$  ( $\delta^*_3$  — множество сингулярных вершин области  $H$ ).

*Доказательство.* Пусть  $\max_H u > 0$  и  $Q_0$  — сингулярная вершина области  $H$ . Из определения такой вершины следует, что из точки  $Q_0$  можно провести вверх вертикальный отрезок, содержащийся в замыкании области  $H$ . Следовательно, так как  $u \in R_2$ , существует  $u_y(x_{Q_0}, y_{Q_0} + 0)$ , причем  $u_y(x_{Q_0}, y_{Q_0} + 0) \leq 0$ . Но тогда, повторяя аргументацию п. 1.1, а (1.1, б) доказательства теоремы 1, придем в противоречие с последним неравенством (получим неравенство  $u_y(x_{Q_0}, y_{Q_0} + 0) > 0$ ).

*Лемма 2.* На каждом внутреннем контуре  $L$  правильной области  $H$  существуют не менее двух сингулярных ее вершин.

*Доказательство.* Ввиду замкнутости множества точек внутреннего контура  $L$  области  $H$  существует  $\min_L u = x_0$ . Он достигается в вершине

из контура  $L$ , которая является концом двух не вертикальных сторон из контура  $L$ , или на его вертикальной стороне, в частности, в ее нижнем конце  $(x_0, y_0)$ . Каждая из этих точек является сингулярной вершиной области  $H$ . Действительно, в первом случае одна из упомянутых выше сторон расположена ниже другой и справа от прямой  $x = x_0$  и, следовательно, содержится в  $\bar{\gamma}_3$ . Во втором случае вершина  $(x_0, y_0)$  является также концом стороны из контура  $L$ , расположенной справа от прямой  $x = x_0$  и, следовательно, содержащейся в  $\bar{\gamma}_3$ .

Обозначив через  $x'_0 = \max_H x$ , путем аналогичных рассуждений придем к заключению о существовании еще одной сингулярной вершины области  $H$ .

*Замечание 3.* Справедлива теорема 1', двойственная теореме 1. Она получается заменой переменной  $y = -t$ . При этом класс  $R_2$  переходит в класс  $R_1$ , условия  $A_1, A, C, D$  — в условия  $B_1, B, L, M$  [8] соответственно, а максимум достигается на  $\bar{\gamma}_n$  [8]. Справедлива также лемма 1', двойственная лемме 1.

*Замечание 4.* Для уравнения  $u_{xy} = 0$  в базисной области  $H$  решение задачи  $A$  в классе  $R$  при  $lu = 0$  определяется формулой  $u(x, y) = \tau(x)$  и, следовательно,  $\max_H u$  достигается на  $\bar{\gamma}_3$  и на  $\bar{\gamma}_n$ . Отсюда и из доказательства теоремы 1 следует справедливость первых утверждений теорем 1 и 1' для этого уравнения.

*Замечание 5.* Изложенные принципы максимума имеют место для гиперболических линейных [9] и векторных уравнений [9], а также для сходных по форме записи с (1) одного класса нелинейных уравнений с производными высоких порядков [33]. Предложенная нами терминология и некоторые наши результаты существенно использованы в [34], [35].

Эти же принципы максимума позволили обнаружить экстремальные свойства функции Римана и получить оценки и условия знакоопределенности решений задач Гурса и Дарбу без фактического ее построения [36], [37], а также исследовать температурный режим при

возвратно-противоточном течении теплоносителя в сверхглубоких скважинах [14].

### Краевые задачи

**Определение 3.** Решением уравнения (1) класса  $R^0$  будем считать функцию  $u(x, y)$  со свойствами: 1)  $Lu=0$  в  $H$ ; 2)  $u \in C^0(\bar{H}) \cap C^1(H)$ ,  $u_y \in C^0[H \cup (\bar{\gamma}_l \times \gamma_{\delta_l})]$ ,  $u_{xy} \in C^0(H)$ . Если, кроме этого,  $u_y \in C^0(\bar{H} \setminus (\bar{\gamma}_n \setminus \gamma_l))$  ( $u_y \in C^0[H \setminus (\bar{\gamma}_b \setminus \gamma_l)]$ ), то функцию  $u(x, y)$  будем считать принадлежащей классу  $R^0_1$  (классу  $R^0_2$ ).

Через  $A^0$  будем обозначать задачу  $A$  в следующей постановке: в простой области  $H$  найти решение  $u(x, y)$  уравнения (1) класса  $R^0$  со свойствами: 1)  $lu = v(y)$  на  $\bar{\gamma}_l \setminus \delta_l$ ,  $v(y) \in C^0(\bar{\gamma}_l \setminus \delta_l)$  и абсолютно интегрируема на  $\bar{\gamma}_l$ ; 2)  $u = \tau(x)$  на  $\bar{\gamma}_b$ ,  $\tau(x) \in C^0(\gamma_b) \cap C^1(\gamma_b)$ .

**Лемма 3** (теорема 1 [14]). Решение задачи  $A^0$  существует и единственно

$$\begin{aligned} u_x &\in C^0[(\bar{H} \setminus \{x, y\} : x = x_l) \cup (\bar{H} \setminus \{x, y\} : x = x_{\text{пр}})]], \\ u_y &\in C^0[(\bar{H} \setminus \{(x, y) : y = y_n\}) \cup (\bar{H} \setminus \{(x, y) : y = y_b\})], \end{aligned}$$

причем  $u_y$  абсолютно интегрируема в замыкании пересечения области  $H$  с любой вертикальной характеристикой (см. (2) и (3) [14]): при  $m(x)$ ,  $\tau(x) \in C^1[x_l, x_{\text{пр}}]$ :  $u_x \in C^0(\bar{H} \setminus \{(x, y) : x = x_{\text{пр}}\})$ ; при  $m(x)$ ,  $\tau(x) \in C^1(x_l, x_{\text{пр}}]$ :  $u_x \in C^0(\bar{H} \setminus \{(x, y) : x = x_l\})$ ; при  $v(y) \in C^0[y_n, y_b]$ :  $u_y \in C^0(\bar{H} \setminus \{(x, y) : y = y_b\})$ ; при  $v(y) \in C^0(y_n, y_b]$ :  $u_y \in C^0(\bar{H} \setminus \{(x, y) : y = y_n\})$ . Если же  $H$  — простейшая область,  $a \in C^2(\bar{H})$ ,  $b, c \in C^1(\bar{H})$ ,  $\tau(x) \in C^2(x_l, x_{\text{пр}})$  и  $v'(y)$  непрерывна на  $(y_n, y_b)$ , то  $u_{xx}, u_{yy} \in C^0(H)$ .

**Лемма 4** (следствие 1 [14]). Если  $b'=0$ , то решение задачи  $A^0$  определяется формулой

$$u(x, y) = N(x, y) \left[ \tau(x) + \int_{m(x)}^y N^{-1}(x, s) P(x, s) v(s) ds \right], \quad (8)$$

а для уравнения  $u_{xy}=0$

$$u(x, y) = \tau(x) + \int_{m(x)}^y v(s) ds, \quad (9)$$

причем, если  $H$  — круг  $x^2 + y^2 \leq \rho^2$ , то

$$u(x, y) = \tau(x) + \int_{\sqrt{\rho^2 - x^2}}^y v(s) ds, \quad (10)$$

$$N(x, y) = \exp \left\{ - \int_{m(x)}^y a(x, y) dy \right\}, \quad P(x, y) = \exp \left\{ - \int_{\tau(y)}^x b(x, y) dx \right\}.$$

**Теорема 2.** Решение  $u(x, y)$  задачи  $A$  существует и единственно в классе ограниченных функций со свойствами: 1)  $Lu=0$  в  $H \setminus (K \cup M)$ ; 2)  $lu \in C^0[H \setminus (K \cup M)]$ , если  $\tau(x) \in C^0(\bar{EF}) \cap C^1(EF)$  на каждой открытой стороне  $EF$  из  $\gamma_b$ ,  $v(y) \in C^0(ST)$  на каждой открытой стороне  $ST$  из  $\gamma_l$  и абсолютно интегрируема в ее замыкании.

**Доказательство.** Если  $H$  — простая область, то по лемме 3 теорема доказана.

1. Пусть  $H$  — базисная область, например, четырехугольная область  $ABCD$ ,  $x_A < x_C < x_D < x_B$ . С помощью высот  $CE$  и  $DF$  разобьем ее на три области:  $H_1 = ACE$ ,  $H_2 = ECDF$  и  $H_3 = FDB$ . Обозначим  $\tau_1(x) = \tau(x)$  на  $AC$ ,  $\tau_2(x) = \tau(x)$  на  $\overline{CD}$  и  $\tau_3(x) = \tau(x)$  на  $\overline{DB}$ . По лемме 3 в  $H_1$  существует и единственно решение  $u_1(x, y)$  задачи  $A^0$ , определяемое по  $\tau_1(x)$  на  $\overline{AC}$  и  $v(y)$  на  $\overline{AC} \setminus \delta_\pi$ , причем  $u_1(x, y) \in C^0(\overline{H_1})$ ,  $u_{1x}(x, y) \in C^1(AE)$ ,  $u_{1y}(x, y) \in C^0(CE)$  и абсолютно интегрируема на  $CE$ . Пусть  $l \cdot u_1 = u_{1y} + a(x, y)u = v_1(y)$  на  $CE$ . Тогда по лемме 3 в  $H_2$  существует и единственно решение  $u_2(x, y)$  задачи  $A^0$  по данным  $u_2 = \tau_2(x)$  на  $\overline{CD}$  и  $lu_2 = v_1(y)$  на  $CE$ , причем  $u_2(x, y) \in C^0(\overline{H_2})$ ,  $u_{2x}(x, y) \in C^1(EF)$ ,  $u_{2u}(x, y) \in C^0(DF)$  и абсолютно интегрируема на  $DF$ . Пусть  $lu_2 = v_2(y)$  на  $DF$ . По лемме 3 в области  $H_3$  существует и единственно решение  $u_3(x, y)$  задачи  $A^0$  с данными  $u_3 = \tau_3(x)$  на  $\overline{DB}$  и  $lu_3 = v_2(y)$  на  $DF$ , причем  $u_3(x, y) \in C^0(\overline{H_3})$ ,  $u_{3x}(x, y) \in C^0(FB)$ . Таким образом, в области  $H$  существует ограниченное решение задачи  $A$  с требуемыми свойствами. К такому же результату и таким же путем пришли бы, если бы прямоугольник  $ECDF$  был разбит вертикальными характеристиками на несколько прямоугольников. Аналогично доказывается теорема в остальных базисных областях.

2. Пусть  $H$  непростая и небазисная область. Разобьем ее, как и выше, на базисные области  $H_{ij}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Если отрезки из множества разбивают область  $M$  на несколько базисных или простых областей, то будем их нумеровать в порядке их расположения слева направо  $H^1_{ij}$ ,  $H^2_{ij}$  и так далее, а части ее границ в  $H^k_{ij}$  согласно принятой классификации граничных точек обозначать через  $\gamma^{ij}_\pi$ ,  $\gamma^{ij}_\nu$ ,  $\gamma^{ij}_{\pi\nu}$ ,  $\gamma^{ij}_\pi$ ,  $\gamma^{k_{ij}}_\pi$ ,  $\gamma^{k_{ij}}_\nu$ , а значения на  $H_{ij}$  и  $H^k_{ij}$  искомой функции  $u(x, y)$  — соответственно через  $u_{ij}(x, y)$  и  $u^k_{ij}(x, y)$ .

2.1. Множество  $H_1$  может состоять только из базисных четырехугольных и трехугольных областей  $W$ ,  $\Delta$ ,  $V$ ,  $\Delta'$ ,  $W'$ , в каждой из которых согласно п. 1 существует и единственно решение  $u(x, y)$  задачи  $A$ . При этом  $u^k_{1j} \in C^0(\overline{H^k_{1j}})$ ,  $u^k_{x1j} \in C^0(\gamma^{k_{1j}}_\pi)$ .

2.2.  $i = 2$ . Тогда множество  $H_2$  может состоять лишь из базисных четырехугольных и трехугольных областей  $W_1$ ,  $\Delta_1$ ,  $V_1$ ,  $\Delta'_1$ ,  $W'_2$ , каждую из которых отрезки из  $M$  могут разбивать на базисные и простые области. В каждой из них, как и выше, существует и единственно решение задачи  $A$ . Таким образом, при  $i = 2$  в  $H$  существует и единственно решение задачи  $A$ .

2.3.  $i \geq 3$ . Тогда в  $H_2$  возникает та же ситуация, что и в пп. 2.1 и 2.2. Следовательно, в  $H_2$  существует, как и выше, единственно решение  $u_2(x, y)$  задачи  $A$ . Продолжая этот процесс, найдем  $u_n(x, y)$  в  $H_n$  и тем самым завершим доказательство существования и единственности решения задачи  $A$ . При этом  $u(x, y)$  является кусочно-непрерывным и кусочно-регулярным решением уравнения (1):  $Lu = 0$  в  $H^k_{ij}$ ,  $u^k_{ij}(x, y) \in C^0(\overline{H^k_{ij}})$ . Отсюда ясно, что  $u(x, y)$  ограничено в  $H$  и может со своими частными производными первого порядка терпеть разрывы на отрезках характеристик из множеств  $K$  и  $M$ , то есть является решением уравнения (1) с гиперсильными разрывами [22, с. 123].

*Замечание 6.* При отказе от требования 2 решение задачи  $A$  может оказаться не единственным.

С целью постановки для уравнения (1) в конечной одно- или много-связной области произвольной формы краевой задачи, разрешимой в

классе функций, непрерывных в замыкании области (такая необходимость следует из примера 1 и леммы 1), приведем следующее.

*Определение 3.* К множеству  $\tilde{\gamma}_v$  будем относить:

- 1) открытую часть каждой сингулярной горизонтальной стороны (например, на рис. 1 стороны  $KC'_2$ ,  $C_2K'$ ,  $C_1C'_1$ );
- 2) открытую часть каждой сингулярной стороны, если она (часть) содержит хотя бы одну сингулярную вершину области  $H$  и содержится в одной из полос  $G_i$  ( $B_1E$ ,  $EA_3$ ,  $B'_1E'$ ,  $B_4F$ ,  $B_2A_2$  и др.);
- 3) каждую сингулярную вершину области  $H$ .

Может оказаться, что оба конца стороны из  $\gamma_v$  сингулярны и она во внутренней точке пересекается лишь с одной характеристикой  $y=y_i$  (точки  $E$  и  $E'$ ). Тогда эта точка относится к  $\gamma_v \setminus \tilde{\gamma}_v$ , а остальные ее внутренние точки относятся к  $\tilde{\gamma}_v$  ( $B_1E$  и  $B'_1E'$ ). Может оказаться, что один или оба конца стороны сингулярны и она содержится в одной из полос  $G_i$ . Тогда все ее внутренние точки относятся к  $\gamma_v$  ( $B_4F$ ,  $B'_4F'$ ,  $B_2A_2$ ,  $B'_2A'_2$  и др.).

Пусть  $\tau(x)$  — функция, заданная на  $\bar{\gamma}_v \setminus \tilde{\gamma}_v$  (и, следовательно, в изолированных точках этого множества), непрерывная в замыкании всякой связной части из  $\bar{\gamma}_v \setminus \tilde{\gamma}_v$  и непрерывно дифференцируемая во внутренних ее точках;  $v(y)$  и  $\delta_l$  имеют прежний смысл.

*Задача  $A^*$*  (модифицированная задача  $A$ ). Найти решение  $u(x, y)$  уравнения (1) класса  $R$  со свойствами: 1)  $u = \tau(x)$  на  $\bar{\gamma}_v \setminus \tilde{\gamma}_v$ ; 2)  $lu = v(y)$  на  $\bar{\gamma}_l \setminus \delta_l$ ; 3)  $\tau''(x) = \tilde{\tau}(x)$  на  $\tilde{\gamma}_v$ , где  $\tau(x)$  — неизвестный след искомой функции  $u(x, y)$  на  $\tilde{\gamma}_v$ ,  $\tilde{\tau}(x)$  — заданная и абсолютно интегрируемая на  $\tilde{\gamma}_v$  функция.

*Теорема 3.* Решение  $u(x, y)$  задачи  $A^*$  существует и единственно.

*Доказательство.* В базисных и простых областях теорема верна, так как в них задача  $A^*$  является частным случаем задачи  $A$ .

Пусть область  $H$  не является базисной и простой. Как и выше, разобьем ее на области  $H_{ij}$  и  $H^{k_{ij}}$ .

1. Рассмотрим множество  $H_1$ . Оно может состоять из базисных областей  $W$ ,  $\Delta$ ,  $V$ ,  $\Delta'$  и  $W'$  и базисных четырехугольников. Их вершины, расположенные на прямой  $y=y_0$ , не являются сингулярными, так как не являются нижними концами вертикальных, восходящих или нисходящих сторон области  $H$  и не являются общими ни для каких двух таких базисных областей. Следовательно, каждая сторона из  $\gamma_v$  этих же областей может иметь не более одного сингулярного конца, который может находиться только на прямой  $y=y_1$ . При этом функция  $\tau(x)$  задана в расположенных на прямой  $y=y_0$  вершинах сторон из  $\gamma_v$ .

1.1.  $H_1 = H_{11}$  (рис. 2; 1.1). Тогда у  $H_{11}$  нет сингулярных вершин на прямой  $y=y_1$ . Следовательно, функция  $u(x, y)$  задана на  $\gamma^{11}_v$ . Поэтому по лемме 3 в  $H_1$  определена однозначно функция  $u_1(x, y)$ , в частности, на отрезке  $A_1B_1$ . Пусть точка  $A_1$  является правым концом горизонтальной стороны  $MA_1$ , лежащей на прямой  $y=y_1$ . Тогда точка  $M \in \bar{\gamma}_v \setminus \tilde{\gamma}_v$ . Если точка  $A_1$  не является сингулярным концом стороны  $MA_1$ , то на  $MA_1$  задана функция  $\tau(x)$ . Если же  $A_1$  — сингулярный конец стороны  $MA_1$ , то на  $MA_1$  задана функция  $\tau''(x) = \tau(x)$ . Решая на  $MA_1$  двухто-

чечную задачу  $\tau'' = \tilde{\tau}(x)$ ,  $\tau(x_M) = u(M)$ ,  $\tau(x_A) = u_1(A_1)$ , найдем однозначно  $\tau(x)$  на отрезке  $MA_1$ . Пусть точка  $B_1$  является левым концом стороны  $B_1N$ , лежащей на прямой  $y = y_1$ . Тогда, повторяя предыдущие рассуждения, найдем однозначно  $\tau(x)$  на  $B_1N$ .

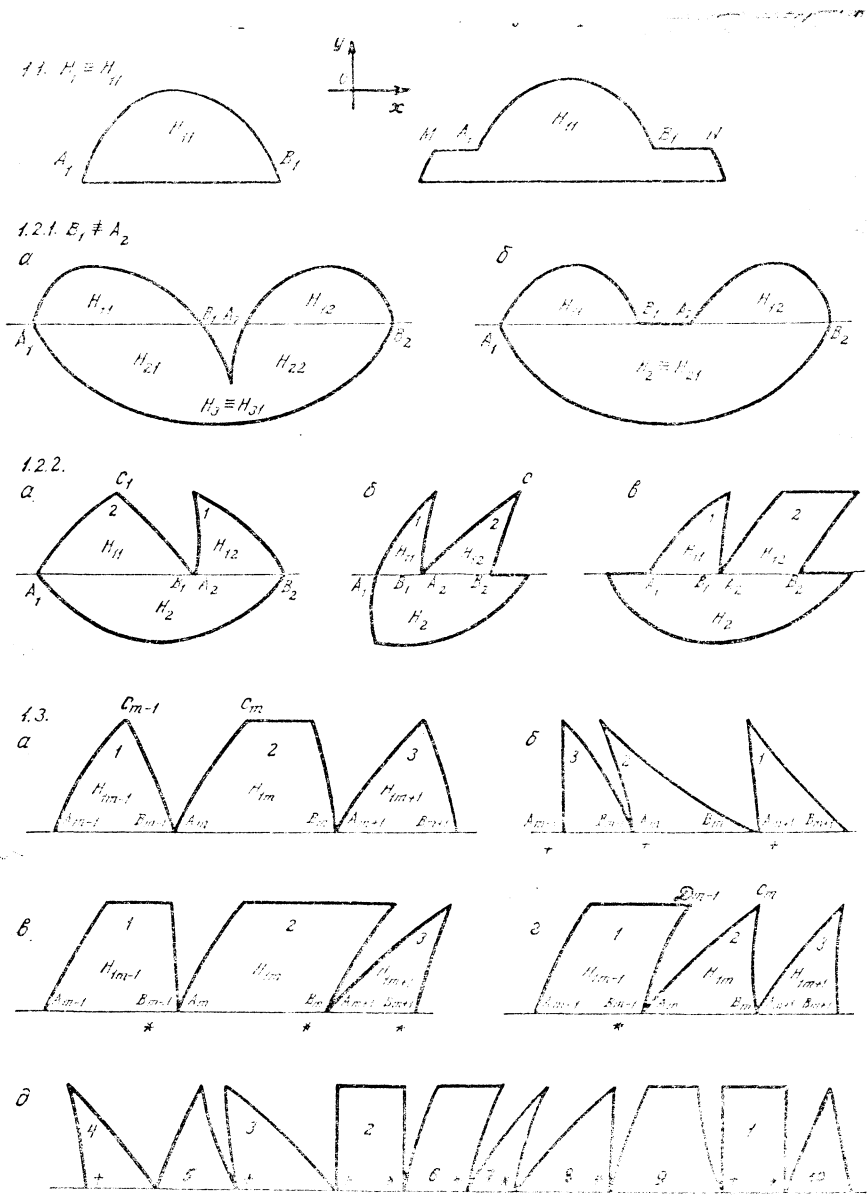


Рис. 2. Иллюстрация к доказательству теоремы 3. Порядок построения решения задачи А в области Н:  
+ — «занятая левая» точка <—; — «занятая правая» точка

$$1.2. H_1 = H_{11} \cup H_{12}.$$

$$1.2.1. B_1 \neq A_2 \text{ (см. рис. 2; 1.2.1).}$$

а. Отрезок  $B_1A_2$  не содержится в  $\bar{H}$  (рис. 2; 1.2.1, а). Тогда с каждой из областей  $H_{11}$  и  $H_{12}$  поступаем по-прежнему.

б.  $B_1A_2$  содержится в  $\bar{H}$  (рис. 2; 1.2.1, б). Тогда найдем функции  $u_{11}(x, y)$  и  $u_{12}(x, y)$ , в частности  $u_{11}(B_1)$  и  $u_{12}(A_2)$ . Если точки  $B_1$  и  $A_2$  несингулярны, то на  $B_1A_2$  задана функция  $\tau(x)$ . Если же это не так, то на  $B_1A_2$  решим двухточечную краевую задачу:  $\tau''x = \tilde{\tau}(x)$ ,  $\tau(B_1) = u_{11}(B_1)$ ,  $\tau(A_2) = u_{12}(A_2)$ . Тем самым окончательно найдем значение искомой функции в  $H_1$ .

1.2.2.  $B_1 = A_2$  (см. рис. 2; 1.2.2).

а.  $B_1$  не является сингулярной вершиной области  $H$  (рис. 2; 1.2.2, в). Тогда на  $\gamma^{11}_{\text{пр}}$  и  $\gamma^{12}_{\text{л}}$  задана функция  $\tau(x)$  и по лемме 3 однозначно находятся функции  $u_{11}(x, y)$  и  $u_{12}(x, y)$ .

б.  $B_1$  — сингулярный конец дуги  $B_1C_1$ ,  $C_1$  — вершина области  $H_{11}$  (см. рис. 2, 1.2, 2, а). Тогда сначала находим  $u_{12}(x, y)$ , в частности  $u_{12}(B_1)$ , решаем двухточечную краевую задачу  $\tau''(x) = \tilde{\tau}(x)$ ,  $\tau(C_1) = u(C_1)$ ,  $\tau(x_{B_1}) = u_{12}(B_1)$ , а затем находим  $u_{11}(x, y)$ . Ясно, как следует поступить, если точки  $A_1$  и  $B_2$  являются концами горизонтальных сторон области  $H$ . Если же  $B_1$  — сингулярный конец дуги  $A_2C_2 \subset \gamma^{12}_{\text{в}}$ , то действуем в обратном порядке (см. рис. 2; 1.2.2, б).

1.3.  $H = \bigcup_{j=1}^k H_{1j}$ ,  $k > 2$ ;  $B_1 = A_2$ ;  $B_2 = A_3$ , ...,  $B_{k-1} = A_k$  (см. рис. 2; 1.3).

1.3.1. Рассмотрим в убывающем порядке те из областей  $H_{11j}$ , у каждой из которых точка  $A_j$  является нижним концом вертикальной или нисходящей стороны  $A_jC_j$ . Следовательно,  $A_jC_j \subset \gamma^{1j}_{\text{л}}$  и на  $A_jC_j$  задана функция  $v(y)$ .

Пусть  $H_{1j_0}$  — область с наибольшим номером среди выделенных областей.

а.  $1 \leq j_0 < k$ . Если  $B_{j_0}D_{j_0}$  — вертикальная или восходящая сторона области  $H$ , то  $\gamma^{1j_0}_3 = C_{j_0}D_{j_0}$  и на  $C_{j_0}D_{j_0}$  задана функция  $\tau(x)$ . Значит, в силу сказанного по лемме 3 в  $H_{1j_0}$  определена функция  $u_{1j_0}(x, y)$ , в частности в точке  $A_{j_0}$ . Если же  $B_{j_0}D_{j_0}$  — нисходящая сторона области  $H$ , то она при  $C_{j_0} = D_{j_0}$  совпадает с  $\gamma^{1j_0}_3$  и при  $C_{j_0} \neq D_{j_0}$  является частью  $\gamma^{1j_0}_3$ . В силу сделанного предположения точка  $A_{j_0+1} = B_{j_0}$  не может быть нижним концом вертикальной и нисходящей сторон области  $H_{1j_0+1}$ , то есть точка  $B_{j_0}$  несингулярна. Поэтому на  $B_{j_0}D_{j_0}$  задана функция  $\tau(x)$ . При  $C_{j_0} \neq D_{j_0}$  она задана и на  $\overline{C_{j_0}D_{j_0}}$ . Таким образом, в  $H_{1j_0}$  полностью заданы краевые условия задачи  $A^0$ . Отсюда по лемме 3 следует существование функции  $u_{1j_0}$ .

Пусть  $H_{1j_0-1}$  последующая за  $H_{1j_0}$  из выделенных областей, то есть точка  $A_{j_0-1}$  является нижним концом вертикальной или нисходящей стороны области  $H_{1j_0-1}$ . Тогда  $B_{j_0-1}D_{j_0-1}$  — нисходящая сторона области  $H_{1j_0-1}$ ,  $B_{j_0-1}D_{j_0-1} \subset \gamma^{1j_0-1}_3$ . Следовательно, точка  $B_{j_0-1} = A_{j_0}$  сингулярна. Значит, в ней не задана функция  $\tau(x)$ , а на  $B_{j_0-1}D_{j_0-1}$  задано  $\tau''(x) = \tilde{\tau}(x)$ . Задано также значение  $u_{1j_0-1}$  в точке  $D_{j_0-1}$  и ранее найдено значение  $u_{1j_0-1}$  в точке  $B_{j_0-1}$ :  $\tau(x_{B_{j_0-1}}) = u_{1j_0}(A_{j_0})$ . Решая полученную двухточечную задачу, однозначно найдем  $\tau(x)$  на  $B_{j_0-1}D_{j_0-1}$  и тем самым  $\tau(x)$  на  $\gamma^{1j_0-1}_3$ . Отсюда по лемме 3 однозначно определяет-

ся функция  $u_{1j_0-1}(x, y)$ . Продолжая этот процесс, найдем функцию  $u_1(x, y)$  в выделенных областях.

б.  $j_0 = k$ . Тогда на  $\bar{\gamma}^{1k}_b$  задана функция  $\tau(x)$  и по лемме 3 однозначно определяется функция  $u_{1k}(x, y)$ . Определение функций  $u_{1j}(x, y)$  в остальных выделенных областях следует из п. а.

1.3.2. Рассмотрим в возрастающем порядке остальные области, т. е. области, в каждой из которых точка  $A_j$  является нижним концом восходящей стороны  $A_j C_j$  этой области. Следовательно,  $A_j C_j \subset \gamma^{1j}_b$ ,  $A_j C_j = \gamma^{1j}_d$  и на  $A_j C_j$  задана функция  $v(y)$ .

Пусть  $H_{1j_*}$  — область с наименьшим номером среди рассматриваемых областей.

а.  $1 < j_* < k$ . Следовательно,  $A_{j_*-1}$  — нижний конец вертикальной или нисходящей стороны области  $H_{1j_*-1}$  и по предыдущему найдено  $u_{1j_*-1}(B_{j_*-1}) = u_{1j_*}(A_{j_*})$ . Если  $A_{j_*}$  — несингулярный конец стороны  $A_{j_*} C_{j_*}$ , то на  $A_{j_*} C_{j_*}$  задана функция  $\tau(x)$ , причем по условию задачи  $A^0$ :  $\tau(A_{j_*}) = u_{1j_*}(A_{j_*}) = u_{1j_*-1}(B_{j_*-1})$ . Если же  $A_{j_*}$  — сингулярная вершина области  $H$ , то задано  $\tau''(x) = \tilde{\tau}(x)$  на  $A_{j_*} C_{j_*}$  и  $u_{1j_*}(C_{j_*}) = \tau(x_{C_{j_*}})$ . Ранее было найдено  $\tau(x_{A_{j_*}}) = u_{1j_*}(B_{j_*-1})$ . Поэтому, решая полученную двухточечную краевую задачу, найдем  $\tau(x)$  на  $\overline{A_{j_*} C_{j_*}}$ .

Пусть  $B_{j_*}$  — нижний конец вертикальной или восходящей стороны области  $H$ , и, следовательно,  $B_{j_*} D_{j_*} = \gamma^{1j_*}_{np}$ ,  $B_{j_*} D_{j_*} \cap \gamma^{1j_*}_b = \emptyset$ . Значит, на  $\bar{\gamma}^{1j_*}_b$  определена функция  $\tau(x)$  и по лемме 3 в  $H_{1j_*}$  однозначно определяется функция  $u_{1j_*}(x, y)$ .

Пусть  $B_{j_*}$  — нижний конец нисходящей стороны  $B_{j_*} D_{j_*}$  области  $H_{1j_*}$ . Если  $B_{j_*}$  — несингулярная вершина области  $H$ , то на  $\overline{B_{j_*} D_{j_*}}$  задана функция  $\tau(x)$  и с учетом предыдущего функция  $\tau(x)$  задана и на  $\gamma^{1j_*}_b$ . Следовательно, по лемме 3 в  $H_{1j_*}$  однозначно определяется функция  $u_{1j_*}(x, y)$ . Если же  $B_{j_*}$  — сингулярная вершина области  $H$ , то на  $\overline{B_{j_*} D_{j_*}}$  задано  $\tau''(x) = \tilde{\tau}(x)$  и  $\tau(x)$  в точке  $D_{j_*}$ . В силу п. 1 в точке  $A_{j_*+1}$  найдено  $u_{1j_*+1}(A_{j_*+1}) = u_{1j_*}(B_{j_*}) = \tau(x_{B_{j_*}})$ . Решая полученную двухточечную краевую задачу, найдем  $\tau(x)$  на  $\overline{B_{j_*} D_{j_*}}$  и с учетом предыдущего по лемме 3 функцию  $u_{1j_*}(x, y)$  в  $H_{1j_*}$ . Если теперь  $A_{j_*+1}$  — нижний конец восходящей стороны области  $H_{1j_*+1}$ , то возникает ситуация, идентичная предыдущей, и в  $H_{1j_*+1}$  однозначно, как и выше, определяется функция  $u_{1j_*+1}(x, y)$ . Перебрав указанным способом все остальные рассматриваемые области, найдем в них функции  $u_{1j}(x, y)$ .

б.  $j_* = 1$ . Тогда возникает ситуация, отличающаяся от случая  $j_* > 1$  лишь тем, что при  $A_1 C_1 \subset \bar{\gamma}^{11}_b$  на  $\overline{A_1 C_1}$  задана функция  $\tau(x)$ . Поэтому, повторяя предыдущее, однозначно определим  $u_{11}(x, y)$  в  $\bar{H}_{11}$  и в остальных выделенных областях.

1.4.  $H_1 = \bigcup_{j=1}^k H_{1j}$ ,  $k > 2$  и среди областей  $H_{1j}$  имеются отдельные области, группы из двух смежных областей и группы большего числа последовательно смежных базисных областей. Тогда, повторяя рассуждения пп. 1.1—1.3, определим функцию  $u_1(x, y)$  в  $\bar{H}_1$  и тем самым значения искомой функции  $u(x, y)$  на прямой  $y = y_1$ .

2. Рассмотрим нахождение функции  $u_2(x, y)$ .

2.1.  $i=2$ , т. е.  $H=H_1 \cup H_2$ . Следовательно, множество  $H_2$  может состоять из областей вида  $W_1, \Delta_1, V_1, \Delta'_1, W'_1$  и правильных четырехугольников, у каждого из которых две стороны есть отрезки горизонтальных характеристик.

а.  $H_2=H_{21}$ . В этом случае сингулярная вершина может находиться только на прямой  $y=y_1$  и на содержащей ее стороне из  $\gamma_v$  задано  $\tau''(x)=\tilde{\tau}(x)$ , на другом конце этой стороны задано значение  $u_2(x, y)$ . Решая двухточечную краевую задачу, найдем  $u_2(x, y)$  на стороне из  $\gamma_v$ , а затем  $u_{21}(x, y)$ . Если же сторона из  $\gamma_v$  не имеет сингулярного конца на прямой  $y=y_1$ , то на ней задана функция  $\tau(x)$ . Применяя лемму 3, найдем  $u_{21}(x, y)$  и тем самым завершим нахождение  $u(x, y)$  в  $\bar{H}$ .

б.  $H_2=\bigcup_{j=1}^p H_{2j}$ ,  $p>1$ . Поступая в каждой из областей  $H_{2j}$ , как и выше, найдем  $u_{2j}(x, y)$  и, следовательно,  $u_2(x, y)$ .

2.2.  $H=\bigcup_{i=1}^3 H_i$ . Здесь множество  $H_1$  может состоять из областей того же вида, что в п. 1. Поэтому в нем функция  $u_1(x, y)$  определяется так же, как и в этом пункте.

Множество  $H_2$  может состоять из областей того же вида, что и множества  $H_1$  и  $H_2$  в пп. 1 и 2.1 соответственно, а также из областей со сторонами с двумя сингулярными концами. На каждой такой стороне задано  $\tau''(x)=\tilde{\tau}(x)$ , на ее верхнем конце найдено значение  $\tau(x)$  в п. 1. Следовательно, во множестве  $H_2$  возникает та же ситуация, что и во множестве  $H_1$ . Используя те же приемы, что и во множестве  $H_1$ , определим однозначно функцию  $u_2(x, y)$ . Функция  $u_3(x, y)$  определяется, как и функция  $u_2(x, y)$  в п. 2.1.

2.3.  $H=\bigcup_{i=1}^p H_i$ ,  $p>3$ . В этом случае функция  $u_1(x, y)$  определяется так же, как в п. 1,  $u_2(x, y)$ ,  $u_3(x, y)$ , ...,  $u_{p-1}(x, y)$  — как в п. 2.2 функция  $u_2(x, y)$ , а  $u_p(x, y)$  — как  $u_2(x, y)$  в п. 1.2. Тем самым завершается доказательство теоремы.

*Следствие 1.* В односвязной правильной области без сингулярных вершин решение задачи А существует и единственно в классах  $R$  и  $R_2$ .

*Следствие 2.* В любой правильной области непусты классы  $R$ ,  $R_1$  и  $R_2$  решений уравнения (1).

Задача А допускает следующую модификацию. Пусть  $\gamma_v^0$  — множество несингулярных вершин из  $\bar{\gamma}_v$ ,  $\tau(x)$  — след функции  $u(x, y)$  на открытой стороне из  $\gamma_v$ ;  $\delta_\pi$  и  $\gamma(y)$  имеют тот же смысл, что и в задаче А\*.

*Задача А\*\*.* Найти функцию  $u(x, y)$  со свойствами: 1)  $Lu=0$  в  $H \setminus (K \cup M)$ ; 2)  $u \in C^0(\bar{H})$ ,  $u_x \in C^0(\bar{H} \setminus M)$ ,  $u_y \in C^0(H \setminus K)$ ,  $u_{xy} \in C^0[H \setminus (K \cup M)]$ ; 3)  $lu=\tau(y)$  на  $\bar{\gamma}_\pi \setminus \delta_\pi$ ; 4)  $\tau''=\tau(x)$ ; 5)  $\tau(x)=\tilde{\tau}_0$  на  $\gamma_v^0$ , где  $\tilde{\tau}_0$  — дискретная функция, заданная на  $\gamma_v^0$ .

Пусть  $\gamma_v^*$  и  $\sigma$  — совокупности попарно непересекающихся открытых частей соответственно из  $\gamma \setminus \bar{\gamma}_v$  и  $\gamma \setminus \bar{\gamma}_v$ ,  $\varphi$  — биекция  $\gamma_v^*$  на  $\sigma$ ,  $Q_1$  — произвольная точка из  $\gamma_v^*$ ,  $\varphi(Q_1)=Q_2 \in \sigma$ ,  $\alpha(Q_2)$  — известная функция, непрерывная на  $\bar{\sigma}$ ,  $|\alpha(Q_2)| < 1$  ( $|\alpha(Q_2)| \leq 1$ ). Из  $S_0 \in (\bar{\gamma}_v^* \setminus \gamma_v^*)$  проведем

вертикальную характеристику до ее пересечения с  $\bar{\gamma}_n$  в точке  $T_0$ . Отрезок  $S_0T_0$  и только таким образом полученные отрезки будем относить к множеству  $N$ .

**Определение 4.** Функцию  $u(x, y)$  будем считать принадлежащей классу  $R^*(R^*_2)$ , если она обладает всеми свойствами решений класса  $R$  (класса  $R^*_2$ ) уравнения (1), кроме, быть может, непрерывности  $u_x(x, y)$  на множестве  $N$ .

Задача  $\Phi^*_z$  (модифицированная задача  $\Phi$  [8]). Найти решение  $u(x, y)$  уравнения (1) класса  $R^*$  со свойствами: 1)  $lu = v(y)$  на  $\bar{\gamma}_l \setminus \delta_l$ ; 2)  $u = \tau(x)$  на  $\bar{\gamma}_v \setminus (\tilde{\gamma}_v \cup \gamma^*_v)$ ; 3)  $\tau''(x) = \tilde{\tau}(x)$  на  $\tilde{\gamma}_v$ ; 4)  $u(Q_1) - \alpha(Q_2)u(Q_2) = g(Q_1)$ . Здесь  $\tau(x)$  — след искомой функции на  $\bar{\gamma}_v$ , известный на  $\bar{\gamma}_v \setminus (\tilde{\gamma}_v \cup \gamma^*_v)$ ,  $\tau(x) \in C^1[\bar{\gamma}_v \setminus (\tilde{\gamma}_v \cup \gamma^*_v)]$ ,  $\tau(x)C^0(\tilde{\gamma}_v)$  и абсолютно интегрируемый в замыкании  $\tilde{\gamma}_v$ ;  $g(Q_1)$  — известная функция,  $g(Q_1) \in C^0(\bar{\gamma}^*_v)$ ;  $v(y)$ ,  $\delta_l$  имеют прежний смысл.

**Теорема 4.** Решение каждой из задач  $A^*$ ,  $A^{**}$ ,  $\Phi^*_z$  единственно в классе  $R^*_2$  решений уравнения (1), если его коэффициенты удовлетворяют условиям  $A_1$ , или  $A$ , или  $C$ , или  $D$ .

**Доказательство.** Пусть  $u(x, y)$  — решение однородной задачи, например  $\Phi^*_z$ ,  $u(x, y) \neq 0$  в  $\bar{N}$ . Тогда по теореме 1  $\max_{\bar{N}} |u|$  должен дости-

гаться только на  $\tilde{\gamma}_v$ . Он не может достигаться на  $\bar{\gamma}_v \setminus (\tilde{\gamma}_v \cup \gamma^*_v)$ , так как там в силу второго однородного условия  $u = 0$ . Допустим, что он достигается на некоторой открытой связной части из  $\tilde{\gamma}_v$  — дуге  $ST$ , на которой  $\tau''(x) = 0$ . Следовательно, на  $\bar{ST}$  функция  $\tau(x)$  линейна и  $\max_{\bar{ST}} |u|$  достигается только на одном из концов этой дуги, который в силу предыдущего является сингулярной вершиной области. Но это противоречит лемме 1. Следовательно,  $\max_{\bar{N}} |u|$  может достигаться толь-

ко на  $\gamma^*_v$  в некоторой точке  $Q^0_1$ . Отсюда в силу нелокального однородного условия 4  $u(Q^0_1) = \alpha(Q^0_2)u(Q^0_2)$  и ввиду  $|\alpha(Q^0_2)| \leq 1$

$$|u(Q^0_1)| \leq |u(Q^0_2)|, \quad (11)$$

что невозможно, так как  $\max_{\bar{N}} |u|$  достигается только на  $\bar{\gamma}_v$ . Еще проще доказываются остальные утверждения теоремы.

Нам не удалось обнаружить область, в которой задача  $A^{**}$  оказалась неразрешимой. Даже в классических областях задача  $\Phi^*_z$  может привести к функциональным и интегральным уравнениям Вольтерра со сдвигом, теория которых развита еще недостаточно.

## 2. Уравнения смешанного типа

Теория уравнений смешанного типа восходит к работам Ф. Трикоми (1923 г.) и продолжает развиваться в самых различных направлениях после исследований Ф. И. Франкля (1945 г.), обнаружившего их применение в трансзвуковой газовой динамике [38]. Над ней работали М. А. Лаврентьев и А. В. Бицадзе, П. Жермен и Р. Бадер, К. И. Бабенко; С. Агмон, Л. Ниренбург и М. Х. Проттер, М. Б. Капилевич,

И. Л. Кароль, С. П. Пулькин, М. С. Смирнов, О. А. Ладыжинская и Л. Ступялис, К. С. Моравец, Л. И. Чибрикова, Ю. М. Крикунов, В. И. Жегалов, Ю. М. Березанский, Л. И. Коваленко, Л. Е. Вострова, Л. А. Золина, В. П. Михайлов, В. Н. Врагов, Г. И. Эскин, М. Сайго, Е. И. Моисеев, Т. Ш. Кальменов, А. Г. Кузьмин, Репин и другие. Она достаточно полно отображена в литературе [39—50].

Однако до [6] принципы максимума и краевые задачи для уравнений смешанного типа формулировались в областях лишь с односвязными подобластями гиперболичности фиксированной, определенной формы, встречающихся в задачах Трикоми, Геллерстедта, Франкля, Дирихле и обобщенной задаче Трикоми (с «классическими» подобластями гиперболичности с одной разомкнутой линией изменения типа уравнения).

Основные трудности при постановке краевых задач для уравнений смешанного типа состоят в выборе носителей локальных и нелокальных краевых условий, а также числа и вида условий склеивания на линии изменения типа уравнения (линии перехода). Теорема 1 в сочетании с принципами максимума для эллиптических и параболических уравнений позволяет преодолеть эти трудности и предложить, а теорема 3 реализовать [8—11] методику постановки краевых задач для уравнений смешанного типа, гиперболических в одно- и многосвязных областях произвольной формы с одной или несколькими, в том числе замкнутыми, линиями перехода. Суть этой методики состоит в следующем.

1. Если на линии перехода достигается максимум модуля его решения из замыкания прилегающих к ней подобластей гиперболичности и негиперболичности, то на ней следует задать два условия склеивания: решения уравнения и его нормальных или иных производных.

2. Если на линии перехода достигается максимум модуля решения уравнения лишь из замыкания подобласти его гиперболичности, то на ней целесообразно задавать лишь условие склеивания решения.

3. Если в замыкании подобласти гиперболичности уравнения максимум модуля его решения достигается на части его границы, не содержащей линии перехода, то на линии перехода целесообразно задавать условие склеивания решения, а указанную часть границы области сделать носителем нелокального краевого условия.

Эта методика была успешно реализована в [8—11] и др.

При доказательстве разрешимости поставленных краевых задач, в особенности с нелокальными краевыми условиями, могут возникнуть большие трудности с получаемыми при этом функциональными и интегральными уравнениями со сдвигом и нагружением, теория которых недостаточно разработана. Здесь успешными могут оказаться методы функционального анализа, примененные в [28, 32].

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Protter M. H., Weinberger H. F. Maximum principles in differential equations. New Jersey: Prentice-Hall, INC, 1967. 238 p.
2. Лернер М. Е. О принципах максимума для уравнений гиперболического типа и их применениях к уравнениям смешанного типа: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Куйбышев, 1968. 234 с.
3. Sperb R. Maximum principles and their applications. New York, 1984. 224 p.
4. Лернер М. Е. О задаче Трикоми с обобщенными условиями склеивания//Докл. АН СССР. 1974. Т. 218, № 1. С. 24—27.
5. Лернер М. Е. О единственности решений некоторых краевых задач со скачком иско-

мой функции и ее производных на границе области для параболических, эллиптических и гиперболических уравнений// Дифференциальные уравнения и математическая физика: Ресн. сб. Куйбышев, 1979. С. 50—61.

6. *Лернер М. Е.* Принципы максимума для гиперболических уравнений в одно- и много-связных областях произвольной формы//Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1982. С. 109—112.

7. *Лернер М. Е.* Принципы максимума модуля для систем уравнений с производными первого и высоких порядков в многомерных областях//Неклассические задачи математической физики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1985. С. 186—191.

8. *Лернер М. Е.* Принципы максимума модуля для уравнений гиперболического и смешанного типов в неклассических областях//Докл. АН СССР. 1986. Т. 287, № 3. С. 550—554.

9. Принципы максимума для гиперболических уравнений и систем уравнений в неклассических областях//Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22, № 5. С. 848—858.

10. *Лернер М. Е.* О постановке и разрешимости одного класса краевых задач для уравнения Лаврентьева—Бинадзе//Докл. АН СССР. 1991. Т. 317, № 3. С. 561—565.

11. *Лернер М. Е.* Об одной задаче для модельного уравнения смешанного эллипτικο-параболо-гиперболического типа с двусвязной подобластью гиперболичности//Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 8. С. 1456—1459.

12. *Gertsein P.* Maximum Theorems and Reflections of Simple Waves//NACA Technical Report, 1955. N 0 3299.

13. *Лернер М. Е.* О разрешимости одной краевой задачи для гиперболических уравнений в неклассических областях//Докл. АН СССР. 1988. Т. 304, № 4. С. 807—811.

14. *Лернер М. Е.* О разрешимости одной краевой задачи в неклассических областях//Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 4. С. 704—716.

15. *Олейник О. А.* О свойствах решений некоторых краевых задач уравнений эллиптического типа//Мат. сб. 1952. Т. 30 (72), 13. С. 695—702.

16. *Квальвассер В. И., Самарин Ю. П.* Квазипериодические и периодические решения задач с подвижными границами для волнового уравнения в одномерном пространстве//Дифференциальные уравнения. 1966. Т. 11, № 11. С. 1541—1543.

17. *Вытчиков Ю. С.* Исследование процессов передачи тепла в теплообменных устройствах при переменных теплофизических параметрах: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Куйбышев, 1982. 20 с.

18. *Емец Б. В.* Решение методом Римана задачи теплообмена при возвратно-противоточном течении теплоносителей в рекуперативных теплообменниках с целью оптимизации их работы//Моделирование и оптимизация теплообмена в теплоэнергетике. Куйбышев, 1982. С. 135—137.

19. *Емец Б. В.* Разработка математических моделей и расчет теплообмена в сверхглубоких скважинах с целью определения ресурса буровых колонн: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Казань, 1986. 13с.

20. *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1976. 478 с.

21. *Сиразитдинов Т. К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. 479 с.

22. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 4. М.: Наука, 1981. 550 с.

23. *Jon F. H.* The Dirichlet problem for a hyperbolic equation//Amer. Journ. of Math. 1941. V. 41. N 01. P. 141—154.

24. *Соболев С. Л.* Пример корректной краевой задачи для уравнения колебания струны с данными на всей границе области//Докл. АН СССР. 1956. Т. 109, № 4. С. 707—709.

25. *Александрян Р. А.* О задаче для уравнения струны и о полноте одной системы функций//Докл. АН СССР. 1950. Т. XXIII, № 5. С. 869—871.

26. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965. 798 с.

27. *Александрян Р. А., Березанский Ю. М., Костюченко А. Г.* Некоторые вопросы спектральной теории для уравнений с частными производными//Дифференциальные уравнения с частными производными. М.: Изд-во МГУ, 1970. С. 3—35.

28. *Врагов В. Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1983. 84 с.

29. *Фокин М. В.* О задаче Дирихле для уравнения колебания струны//Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1981. С. 178—181.

30. Фокин М. В. Об оценках решений некоторых краевых задач для уравнения колебания струны//Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1983. С. 151—154.
31. Кальменов Т. Ш., Садыбеков М. А. О задаче Дирихле и нелокальных краевых задачах для волнового уравнения//Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26, № 1. С. 60—65.
32. Кальменов Т. Ш. О регулярных краевых задачах и спектре для уравнений гиперболического и смешанного типов: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1982. 27 с.
33. Лернер М. Е. Принцип максимума модуля для систем уравнений с производными первого и высоких порядков в многосвязных областях//Уравнения неклассического типа. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1986. С. 88—92.
34. Сабитов К. Б. О принципе максимума для уравнений смешанного типа//Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24, № 11. С. 1967—1975.
35. Сабитов К. Б. Некоторые вопросы качественной и спектральной теории уравнений смешанного типа: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1992. 21 с.
36. Лернер М. Е. О двух новых качественных свойствах функции Римана//Докл. АН СССР. 1989. Т. 307, № 4. С. 807—811.
37. Лернер М. Е. О качественных свойствах функции Римана//Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 12. С. 2106—2120.
38. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука. 1973. 711 с.
39. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. М.: Гостехиздат, 1947. 192 с.
40. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1957. 442 с.
41. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 164 с.
42. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 449 с.
43. Бабич В. М., Капилевич М. Б. и др. Линейные уравнения математической физики. М.: Наука, 1964. 368 с.
44. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 295 с.
45. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Высш. школа, 1985. 304 с.
46. Салахитдинов М. С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: ФАН, 1974. 156 с.
47. Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа. Ташкент: ФАН, 1979. 180 с.
48. Моисеев Е. И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: МГУ, 1988. 150 с.
49. Кузьмин А. Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газовой динамике. Л.: ЛГУ, 1990. 204 с.
50. Репин О. А. Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типа. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1992. 161 с.

УДК 519.31

**Э. Я. РАПОПОРТ, М. Ю. ЛИВШИЦ, Ю. Э. ПЛЕШИВЦЕВА**

# **КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

*Устанавливается сходимость и предлагаются оценки погрешностей конечномерных приближений по методу Галеркина в одном классе задач оптимизации распределенных систем, описываемых линейными уравнениями в частных производных параболического типа.*

*Особенностью рассматриваемых задач является формулировка краевых условий на правом конце траектории в соответствующем бесконечномерном фазовом пространстве, предусматривающая выполнение априори фиксируемых требований в равномерной метрике по точности приближения результирующего состояния распределенной системы к заданному при управлении как исходной, так и аппроксимированной моделями объекта с удержанием (в последнем случае) любого конечного числа фазовых координат.*