30. *Фокин М. В.* Об оценках решений некоторых краевых задач для уравнения колебания струны//Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1983. С. 151—154.

31. *Кальменов Т. Ш., Садыбеков М. А.* О задаче Дирихле и нелокальных краевых задачах для волнового уравнения//Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26, № 1. С. 60—65.

32. *Кальменов Т. Ш.* О регулярных краевых задачах и спектре для уравнений гиперболического и смешанного типов: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1982. 27 с.

33. *Лернер М. Е.* Принцип максимума модуля для систем уравнений с производными первого и высоких порядков в многосвязных областях//Уравнения неклассического типа. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1986. С. 88—92.

34. *Сабитов К. Б.* О принципе максимума для уравнений смешанного типа//Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24, № 11. С. 1967—1975.

35. *Сабитов К. Б.* Некоторые вопросы качественной и спектральной теории уравнений смешанного типа: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1992. 21 с.

36. *Лернер М. Е.* О двух новых качественных свойствах функци Римана//Докл. АН СССР. 1989. Т. 307, № 4. С. 807—811.

37. *Лернер М. Е.* О качественных свойствах функции Римана//Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 12. С. 2106—2120.

38. *Франкль Ф. И.* Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука. 1973. 711 с.

39. *Трикоми Ф.* О линейных уравнениях смешанного типа. М.: Гостехиздат, 1947. 192 с.

40. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1957. 442 с.

41. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 164 с.

42. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 449 с.

43. *Бабич В. М., Капилевич М. Б.* и др. Линейные уравнения математической физики. М.: Наука, 1964. 368 с.

44. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 295 с.

45. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М.: Высш. школа, 1985. 304 с.

46. *Салахитдинов М. С.* Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: ФАН, 1974. 156 с.

47. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа. Ташкент: ФАН, 1979. 180 с.

48. *Моисеев Е. И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: МГУ, 1988. 150 с.

49. *Кузьмин А. Г.* Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газовой динамике. Л.: ЛГУ, 1990. 204 с.

50. *Репин О. А.* Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типа. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1992. 161 с.

УДК 519.31

Э. Я. РАПОПОРТ, М. Ю. ЛИВШИЦ, Ю. Э. ПЛЕШИВЦЕВА

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Устанавливается сходимость и предлагаются оценки погрешностей конечномерных приближений по методу Галеркина в одном классе задач оптимизации распределенных систем, описываемых линейными уравнениями в частных производных параболического типа.

Особенностью рассматриваемых задач является формулировка краевых условий на правом конце траектории в соответствующем бесконечномерном фазовом пространстве, предусматривающая выполнение априори фиксируемых требований в равномерной метрике по точности приближения результирующего состояния распределенной системы к заданному при управлении как исходной, так и аппроксимированной моделями объекта с удержанием (в последнем случае) любого конечного числа фазовых координат.

ВВЕДЕНИЕ

Многие известные методы численного решения задач оптимального управления объектами с распределенными параметрами (ОРП), описываемыми уравнениями в частных производных, используют различные способы аппроксимации возникающих здесь краевых задач, включая конечно-разностные и дифференциально-разностные схемы, методы конечных элементов и др. [1].

Наиболее естественный путь перехода к подобной упрощенной модели ОРП при возможности представления функции его состояния в характерной форме разложения в бесконечный сходящийся ряд Фурье по полной системе соответствующих собственных функций [1—5] состоит согласно общему методу Галеркина [6] в «усечении» этого ряда путем учета лишь конечного числа N первых его членов. Такая операция эквивалентна соответствующей конечномерной аппроксимации точного описания ОРП бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов указанного разложения [1—5].

Подобный подход оказывается тесно связанным с теорией сингулярно-возмущенных бесконечномерных систем, если в роли малого параметра рассматривать величину $\frac{1}{N}$, обратную числу удерживаемых гармоник [4]. На этом пути удается, в частности, использовать известные идеи приближенного агрегирования динамических моделей объектов для аналитического конструирования конечномерных оптимальных регуляторов [5], что позволяет распространить метод «усечения» на актуальные задачи синтеза замкнутых систем управления ОРП.

Традиционной и достаточно сложной проблемой при применении методов конечномерной аппроксимации является исследование сходимости итерационного процесса при $N \to \infty$ и оценок погрешности получаемых приближений по оптимизируемым функционалам качества и управляющим воздействиям в зависимости от величины N. Некоторые типичные задачи такого рода при аппроксимации моделей ОРП по методу Галеркина рассматривались, например, в работах [2—5]. Известные результаты получены в этом направлении, как правило, для случая квадратичных интегральных оценок отклонения конечного состояния ОРП от требуемого, вычисляемых для каждого N по соответствующей конечномерной модели ОРП, что приводит при описании в этих терминах краевых условий к возникновению на каждом шаге итерационной процедуры дополнительной зависящей от N погрешности по точности приближения к заданному результирующему распределению [3].

Существенный интерес представляют менее изученные подобные задачи с подвижным правым концом траектории при использовании характерных чебышевских оценок отклонения функции состояния ОРП в конце оптимального процесса от заданной точки в соответствующем функциональном пространстве [7, 8], рассматриваемые в условиях сохранения требований по допустимой величине этого отклонения в равномерной метрике при управлении «усеченной» моделью объекта для всех рассматриваемых значений N [9].

В данной ситуации на любом шаге итерационного процесса без погрешностей удовлетворяются исходные краевые условия по точности приближения к требуемому конечному состоянию ОРП, оцениваемой в нормах, наиболее адекватных потребностям достаточно широкого круга прикладных задач [9]. Именно указанное обстоятельство позволяет ограничиться здесь анализом качества конечномерных приближений только по соответствующим потерям оптимизируемых функционалов.

В настоящей работе исследуются в указанной постановке вопросы сходимости и предлагаются конструктивные способы вычисления верхних оценок погрешностей конечномерных приближений для ряда модельных процессов оптимального управления распределенными системами, описываемыми уравнениями в частных производных параболического типа.

1. Постановка задачи оптимального быстродействия

Рассмотрим характерную задачу оптимального по быстродействию управления ОРП, функция состояния которого $\Theta(l, t)$ в зависимости от пространственной координаты $l \in [0, 1]$ и времени $t \in [0, t_0]$ описывается параболическим уравнением в частных производных с линейным дифференциальным оператором при соответствующих краевых условиях [1—3, 8]. В качестве математической модели такого объекта используем его эквивалентное представление в виде бесконечной системы уравнений первого порядка

$$\frac{dz_m}{dt} = -\mu^2{}_m z_m + b_m f_m(u) + g_m(t), \quad z_m(0) = z^0{}_m, \quad t \in [0, t_0] \tag{1}$$
$$m = 1, 2, \ldots$$

относительно коэффициентов (временных мод) $z_m(t)$ разложения $\Theta(i, t)$ в сходящийся ряд Фурье по собственным функциям $K(\mu_m l)$ соответствующей задачи Штурма—Лиувилля [1—4]:

$$\Theta(l, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m z_m(t) K(\mu_m l), \quad l \in [0, 1]. \tag{2}$$

Здесь μ_m — собственные числа; A_m — нормирующие множители, определяемые краевыми условиями; значения $z^0{}_m$ определяются разложением в ряд вида (2) известной функции $\Theta(l, 0)$ начального состояния ОРП; $u = u(t) \in E^1$ — кусочно-непрерывное управляющее воздействие, подчиненное ограничению

$$u_{\min} \leqslant u(t) \leqslant u_{\max}, \tag{3}$$

где $u_{\min}$ и $u_{\max}$ — заданные величины; $g_m(t)$, $f_m(u)$ — известные кусочно-непрерывные функции своих аргументов, причем

$$|f_m(u)| \leqslant C_m, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{3'}$$

для всех $u(t)$, удовлетворяющих неравенствам (3); b_m, C_m — заданные константы.

Необходимо найти такое допустимое в условиях (3) управление $u^*(t)$, которое за минимально возможное время $t_0 = t^*{}_0$ обеспечивает для объекта (1) требуемую достижимую точность $\varepsilon > 0$ равномерного приближения конечного состояния $\Theta(l, t_0)$ к заданному $\Theta_k(l)$:

$$\max_{l \in [0, 1]} |\Theta(l, t_0) - \Theta_k(l)| \leqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Используем далее для приближенного описания ОРП «усеченную» модель, ограничиваясь учетом конечного числа $N < \infty$ гармоник в (1):

$$\frac{dz_m}{dt} = -\mu^2_m z_m + b_m f_m(u) + g_m(t), \ z_m(0) = z^0_m, \ t \in (0, t_{0N}),$$
$$m = \overline{1, N}. \tag{5}$$

В качестве приближенного решения сформулированной выше задачи оптимального быстродействия будем искать такое управляющее воздействие $u^*_N(t)$, удовлетворяющее ограничению (3), которое переводит конечномерный объект (5) в некоторую неизвестную априори точку $Z^N(t_{0N}) = (z_m(t_{0N}))$, $m = \overline{1, N}$, обеспечивающую выполнение требования (4) к конечному состоянию объекта (1) за минимально возможное время t^*_{0N}, причем $t^*_{0N} \geqslant t^*_0$ по определению t^*_0. Тем самым осуществляется переход к поиску приближенных решений на существенно более простом классе управляющих воздействий, реализующих оптимальное по быстродействию управление конечномерной моделью (5) для всевозможных фиксированных конечных состояний $Z^N(t_{0N})$. Последующий выбор экстремального элемента на этом множестве должен производиться из условия выполнения основного ограничения (4) на допустимую величину чебышевской оценки отклонения результирующего распределения $\Theta(l, t_0)$ от заданного $\Theta_k(l)$, вычисляемой при точном описании ОРП бесконечной системой уравнений (1). Всюду далее предполагается, что искомые управления $u^*(t)$ и $u^*_N(t)$ существуют. Для целого ряда характерных ситуаций описанная задача поиска $u^*_N(t)$ легко параметризуется с помощью известных условий оптимальности, после чего сводится к специальной негладкой задаче математического программирования с основным ограничением вида (4), которая может быть решена методом, предложенным в [10]. Разработанные конструктивные алгоритмы обеспечивают возможность эффективного вычисления $u^*_N(t)$ указанным путем для достаточно широкого круга прикладных задач [9, 10].

Для оценки погрешностей получаемых приближений необходимо исследовать их сходимость к точным решениям при $N \to \infty$ и оценить потери по минимизируемому функционалу в зависимости от величины N. Существенной особенностью предлагаемого подхода к приближенному решению задачи оптимального по быстродействию управления ОРП является отсутствие погрешности в достижении требуемого, согласно (4), конечного состояния системы для всех рассматриваемых значений N в противовес традиционным схемам, согласно которым краевая задача для каждого N формулируется в рамках соответствующей конечномерной модели [1, 3], что приводит к возникновению дополнительной ошибки по отклонению $\Theta(l, t_0)$ от $\Theta_k(l)$, зависящей от выбора N. Указанное обстоятельство порождает определенную специфику используемых ниже процедур вывода оценок для погрешностей приближенных решений задач оптимизации рассматриваемых систем с распределенными параметрами.

2. Эквивалентная задача минимаксной оптимизации

Подобно [10, 11] нетрудно показать, что для сформулированной выше задачи быстродействия минимальное время процесса при точном и приближенном моделировании ОРП бесконечной и «усеченной» системами (1) и (5) (соответственно t^*_0 и t^*_{0N}) является непрерывной строго убывающей функцией ε (соответственно $t^*_0(\varepsilon)$ и $t^*_{0N}(\varepsilon)$) на всем интервале изменения достижимых значений этой величины в (4).

На этом основании можно установить эквивалентность решений задач оптимального управления рассматриваемыми ОРП по критериям быстродействия и минимакса. Точнее, имеет место следующий результат [9, 11].

Пусть для ОРП, описываемого бесконечной системой уравнений (1), требуется найти допустимое в условиях (3) управляющее воздействие $u^{**}(t)$, минимизирующее за фиксированное время $t_0 = t^{**}_0 < t^*_0(\varepsilon_{\inf})$ функционал

$$I(t^{**}_0, u) = \max_{l \in [0, 1]} |\Theta(l, t^{**}_0) - \Theta_k(l)| \to \min_u, \tag{6}$$

где $\varepsilon_{\inf}$ — точная нижняя граница достижимых значений ε в (4) [8—10]. Тогда искомое управление $u^{**}(t)$ совпадает с оптимальным по быстродействию $u^*(t)$ в задаче (1)—(4) при $\varepsilon = \varepsilon^*$, где ε^* — минимальный корень уравнения $t^*_0(\varepsilon) = t^{**}_0$, и, следовательно, $I(t^{**}, u^{**}) = \varepsilon^*$. Пусть далее требуется на множестве управляющих воздействий $u_N(t)$ для конечномерной модели (5), реализующих за минимальное время всевозможные заданные конечные состояния объекта в соответствующем N-мерном фазовом пространстве, найти управление $u_N^{**}(t)$, минимизирующее в условиях (3) за фиксированное время $t_{0N} = t^{**}_{0N} < t^*_{0N}(\varepsilon_{\inf})$ функционал

$$I_N(t^{**}_{0N}, u_N) = \max_{l \in [0, 1]} |\Theta(l, t^{**}_{0N}) - \Theta_k(l)| \to \min_{u_N}. \tag{7}$$

Тогда аналогичным образом получаем, что $u^{**}_N(t)$ совпадает с оптимальным по быстродействию управлением $u^*_N(t)$ для такого конечного состояния объекта (5), при котором выполняется равенство $\varepsilon = \varepsilon^*_N$ в (4), где ε^*_N — минимальный корень уравнения $t^*_{0N}(\varepsilon) = t_{0N}^{**}$, и, следовательно, $I_N(t^{**}_{0N}, u^{**}_N) = \varepsilon^*_N$.

Введем следующие обозначения:

$$I^0 = I^0(t^{**}_0) = I(t^{**}_0, u^{**}) = \min_{u \in [u_{\min}, u_{\max}]} I(t^{**}_0, u),$$

$$I^0_N = I^0_N(t^{**}_{0N}) = I_N(t^{**}_{0N}, u^{**}_N) = \min_{u_N \in [u_{\min}, u_{\max}]} I_N(t^{**}_0, u_N).$$

Полагая $t^{**}_0 = t^{**}_{0N} = t_a$, найдем оценку неотрицательной в этих условиях (по определению I^0) разности $I^0_N - I^0 \geqslant 0$. Согласно (6), (7) и (2), будем иметь:

$$I^0_N = \max_{l \in [0, 1]} \left| \sum_{m=1}^{\infty} A_m K(\mu_m l) [z^N_{0m} - z^*_m] \right|, \tag{8}$$

$$I^0 = \max_{l \in [0, 1]} \left| \sum_{m=1}^{\infty} A_m K(\mu_m l) [z_{0m} - z^*_m] \right|, \tag{9}$$

где z^N_{0m} и z_{0m} — значения $z_m(t_a)$ при управлениях $u^{**}_N(t)$ и $u^{**}(t)$ соответственно, а z^*_m — коэффициенты разложения в ряд Фурье по функциям $K(\mu_m l)$ заданной функции $\Theta_k(l)$ конечного состояния ОРП в (4).

На классе управляющих воздействий $u_N(t)$ выделим управление $\tilde{u}_N(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_a$, при котором достигается конечное состояние $\tilde{z}_m = z_m(t_a)$, $m = 1, 2, \ldots$ для ОРП, совпадающее по первым N гармоникам для «усеченной» модели (5) с конечным состоянием полной системы (1) при оптимальном управлении $u^{**}(t)$:

$$\tilde{z}_m = z_{0m}; \quad m = \overline{1, N}. \tag{10}$$

Управляемость объекта (5) в классе воздействий $u_N(t)$ по конечной точке (10) гарантируется существованием $u^{**}(t)$.

Поскольку $I^0{}_N \leqslant I_N(t_a, \tilde{u}_N)$ по определению $I^0{}_N$, то в силу (8)—10) получаем

$$0 \leqslant I^0{}_N - I^0 \leqslant I_N(t_a, \tilde{u}_N) - I^0 = \max_{l \in [0, 1]} \left| \sum_{m=1}^{\infty} A_m K(\mu_m l) [\tilde{z}_m - \right.$$

$$\left. - z^*{}_m] \right| - \max_{l \in [0, 1]} \left| \sum_{m=1}^{\infty} A_m K(\mu_m l) [z_{0m} - z^*{}_m] \right| \leqslant \max_{l \in [0, 1]} \left| \sum_{m=1}^{\infty} A_m \times \right.$$

$$\left. \times K(\mu_m l) [\tilde{z}_m - z_{0m}] \right| = \max_{l \in [0, 1]} \left| \sum_{m=N+1}^{\infty} A_m K(\mu_m l) [\tilde{z}_m - z_{0m}] \right|. \tag{11}$$

Используя здесь для вычисления $\tilde{z}_m$ и z_{0m} известные решения системы уравнений (1) при произвольном кусочно-непрерывном управлении $u(t)$

$$z_m(t) = z^0{}_m e^{-\mu_m^2 t} + \int_0^t e^{-\mu_m^2 (t-\tau)} g_m(\tau) d\tau + \int_0^t e^{-\mu_m^2 (t-\tau)} b_m f_m(u) d\tau, \tag{12}$$

$$m = 1, 2, \ldots,$$

приведем оценку (11) с учетом ограничения на $|f_m(u)|$ по (3) к следующему виду:

$$0 \leqslant I^0{}_N - I^0 \leqslant \max_{l \in [0, 1]} \left| \sum_{m=N+1}^{\infty} A_m K(\mu_m l) [\tilde{z}_m - z_{0m}] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{l \in [0, 1]} \sum_{m=N+1}^{\infty} | A_m b_m K(\mu_m l) | \int_0^{t_a} e^{-\mu^2_m (t_a - \tau)} | f_m(\tilde{u}_N(\tau)) -$$

$$- f_m(u^{**}(\tau)) | d\tau \leqslant \max_{l \in [0, 1]} \sum_{m=N+1}^{\infty} 2 \left| \frac{A_m b_m C_m}{\mu^2_m} K(\mu_m l) \right|. \tag{13}$$

Ввиду сходимости ряда (2) при любом кусочно-непрерывном управлении, удовлетворяющем ограничению (3), находим, что здесь

$$\lim_{N \to \infty} \left[\max_{l \in [0, 1]} \sum_{m=N+1}^{\infty} 2 \left| \frac{A_m b_m C_m}{\mu^2_m} K(\mu_m l) \right| \right] = 0 \tag{14}$$

и, следовательно, в силу (13), (14) имеет место сходимость рассматриваемых конечномерных приближений по оптимизируемому функционалу качества

$$\lim_{N \to \infty} (I^0{}_N - I^0) = 0. \tag{15}$$

Теорема 1. Последовательность управляющих воздействий $\{u^{**}{}_N(t)\}$, $N = 1, 2, \ldots$ при $t^{**}{}_{0N} = t^{**}{}_0$ является минимизирующей для функционала качества (6). Оценка сверху погрешности приближения к минимальному значению критерия оптимальности для любого конечного значения N определяется неравенством (13):

$$0 \leqslant I^0{}_N - I^0 \leqslant \delta_N = \max_{l \in [0, 1]} \sum_{m=N+1}^{\infty} 2 \left| \frac{A_m b_m C_m}{\mu^2_m} K(\mu_m l) \right|. \tag{16}$$

3. Конечномерные приближения в задаче быстродействия

Пусть $u^*_{N1}(t)$, t^*_{0N1} и $u^*_{N2}(t)$, t^*_{0N2} — приближенные решения и соответствующие им длительности процессов управления ОРП в сформулированной выше задаче быстродействия для различных достижимых значений ε в (4), равных соответственно ε_1 и ε_2, где будем далее считать $\varepsilon_2>\varepsilon_1$ и, следовательно, $t^*_{0N2}<t^*_{0N1}$. Тогда согласно сказанному в п. 2, получим для эквивалентных задач на минимум функционала (7) при $t^{**}_{0N}=t^*_{0N1}$ и $t^{**}_{0N}=t^*_{0N2}$

$$I_N(t^*_{0N1},\ u^*_{N1})=I^0_N(t^*_{0N1})=\varepsilon_1;\ I_N(t^*_{0N2},\ u^*_{N2})=I^0_N(t^*_{0N2})=\varepsilon_2, \tag{17}$$

откуда по теореме 1 имеют место следующие оценки для точных величин минимакса $I^0(t^*_{0N1})$ и $I^0(t^*_{0N2})$ в соответствующих задачах минимизации функционала (6) за время $t^{**}_0=t^*_{0N1}$ и $t^{**}_0=t^*_{0N2}$ при управлении объектом (1):

$$\varepsilon_1-\delta_N=I^0_N(t^*_{0N1})-\delta_N\leqslant I^0(t^*_{0N1})\leqslant I^0_N(t^*_{0N1})=\varepsilon_1, \tag{18}$$

$$\varepsilon_2-\delta_N=I^0_N(t^*_{0N2})-\delta_N\leqslant I^0(t^*_{0N2})\leqslant I^0_N(t^*_{0N2})=\varepsilon_2. \tag{19}$$

Из соотношений (18) и (19), в свою очередь, следуют неравенства

$$\varepsilon_2-\varepsilon_1-\delta_N=I^0_N(t^*_{0N2})-I^0_N(t^*_{0N1})-\delta_N\leqslant I^0(t^*_{0N2})-$$
$$-I^0(t^*_{0N1})\leqslant I^0_N(t^*_{0N2})-I^0_N(t^*_{0N1})+\delta_N=\varepsilon_2-\varepsilon_1+\delta_N, \tag{20}$$

где всегда можно считать, что $\varepsilon_2-\varepsilon_1-\delta_N>0$ для всех конечных значений N, выбирая надлежащим образом величины ε_1 и ε_2.

Так как аналогично (17) $I^0(t^*_{01})=I^0_N(t^*_{0N1})=\varepsilon_1$, где t^*_{01} — точная величина оптимального времени процесса в задаче быстродействия при $\varepsilon=\varepsilon_1$ в (4), то на основании (18) будем иметь

$$0\leqslant I^0(t^*_{01})-I^0(t^*_{0N1})\leqslant\delta_N. \tag{21}$$

В свою очередь, полагая

$$I^0_N(t^*_{0N2})-I^0_N(t^*_{0N1})=\varepsilon_2-\varepsilon_1=2\delta_N, \tag{22}$$

где без потери общности дальнейших выводов будем считать, что $\max\limits_{l}|\Theta(l,\ 0)-\Theta_k(l)|>2\delta_N$, получим в силу (20)

$$\delta_N\leqslant I^0(t^*_{0N2})-I^0(t^*_{0N1})\leqslant 3\delta_N. \tag{23}$$

На основании сказанного в п. 2 можно утверждать, что зависимости $I^0(t^*_0)$ и $I^0_N(t^*_{0N})$ представляют собой непрерывные строго убывающие функции своих аргументов на интервале $[t^*_{0N2},\ t^*_{0N1}]$. Сравнивая теперь неравенства (21) и (23), найдем, что в таком случае

$$t^*_{0N2}\leqslant t^*_{01}\leqslant t^*_{0N1}, \tag{24}$$

и, следовательно,

$$0\leqslant t^*_{0N1}-t^*_{01}\leqslant t^*_{0N1}-t^*_{0N2}. \tag{25}$$

Переходя здесь к пределу при $N\to\infty$, получим, что $\lim\limits_{N\to\infty}\delta_N=0$ согласно теореме 1, $\varepsilon_2\to\varepsilon_1$ в соответствии с условием (22), $t^*_{0N2}\to t^*_{0N1}$ по определению t^*_{0N1} и из неравенств (25) следует предельное соотношение

$$\lim_{N\to\infty} (t^*_{0N1} - t^*_{01}) = 0, \tag{26}$$

свидетельствующее о сходимости рассматриваемых конечномерных приближений для задачи быстродействия.

Теорема 2. Последовательность управляющих воздействий $\{u^*_N(t)\}$, $N=1, 2, \ldots$ является минимизирующей для задачи оптимального управления ОРП (1) по критерию быстродействия. Оценка сверху погрешности приближения к минимальному времени процесса при любом конечном значении N определяется неравенствами (25), где значения t^*_{0N1} и t^*_{0N2} соответствуют для каждого N управлениям $u^*_{N1}(t)$ и $u^*_{N2}(t)$, первое из которых находится при заданном $\varepsilon=\varepsilon_1$ в (4), а второе — при $\varepsilon=\varepsilon_2=\varepsilon_1+2\delta_N$.

4. Некоторые обобщения

Рассмотрим для ОРП (1)—(4) задачу на минимум функционала более общего вида

$$J(u) = \int_0^{t_a} F(Z, u)\,dt \to \min_{u(t)}, \tag{27}$$

где $Z=(z_m)$, $m=1, 2, \ldots$ и $F(Z, u)$ — заданная непрерывная функция своих аргументов.

Нетрудно видеть, что при соответствующем выборе F функционал (27) сводится к рассмотренным выше критериям быстродействия и минимакса.

Требуется определить стесняемое ограничением (3) управляющее воздействие $u_{\mathrm{opt}}(t)$, обеспечивающее перевод объекта (1) из заданного начального состояния $Z^0=(z^0{}_m)$ в требуемое конечное, согласно (4) за время $t_0=t_a$ при минимальном значении критерия оптимальности (27).

Аналогично предыдущему, в качестве приближенного решения задачи будем рассматривать стесняемое ограничением (3) управляющее воздействие $u_{N\mathrm{opt}}(t)$, переводящее объект (5) за время $t_{0N}=t_a$ из начального состояния $Z^N(0)=(z^0{}_m)$, где $m=\overline{1, N}$, в некоторое конечное ОРП, с минимально возможным значением функционала качества $Z^N(t_{0N})$, при котором выполняется условие (4) для точной модели

$$J_N(u) = \int_0^{t_a} F(Z^N, u)\,dt \to \min_{u(t)}, \quad Z^N=(z_m), \ m=\overline{1, N}. \tag{28}$$

Будем всюду считать, что функционалы (27), (28) имеют в точках $u=u_{\mathrm{opt}}$ и $u=u_{N\mathrm{opt}}$ отрицательные производные Гато по некоторым допустимым в условиях (3) направлениям h и h_N:

$$\frac{\partial J(u_{\mathrm{opt}})}{\partial h} < 0, \quad \frac{\partial J_N(u_{N\mathrm{opt}})}{\partial h_N} < 0. \tag{29}$$

Предположим далее, что аналогичные неравенства имеют место для производных Гато функционалов (6) и (7) по допустимым направлениям h' и h'_N:

$$\frac{\partial I(t_a, u_{\mathrm{opt}})}{\partial h'} < 0, \quad \frac{\partial I_N(t_a, u_{N\mathrm{opt}})}{\partial h'_N} < 0. \tag{30}$$

Тогда, подобно задаче быстродействия, нетрудно убедиться, что

$J(u_{opt})=J^0$ и $J_N(u_{N opt})=J^0_N$ являются непрерывными строго убывающими функциями соответственно $J^0(\varepsilon)$ и $J^0_N(\varepsilon)$ аргумента ε на всем интервале изменения достижимых значений ε в (4). Отсюда, в свою очередь, следует эквивалентность решений задач оптимизации ОРП как в точной, так и в приближенной постановках по минимаксным и рассматриваемым интегральным критериям оптимальности.

Действительно, если $u_{opt}(t)$ — решение задачи (1)—(4), (27) при $\varepsilon=\varepsilon_1$ в (4), то $I(t_a, u_{opt})<\varepsilon$ для всех $\varepsilon>\varepsilon_1$ и, следовательно, в силу непрерывности зависимости $\Theta(l, t_0)$ от управляющего воздействия, для всякого $\varepsilon=\varepsilon_2>\varepsilon_1$ в условиях (29) найдется управление $\tilde{u}(t)$, для которого $J(\tilde{u})<J(u_{opt})$ при $I(t_a, \tilde{u})\leqslant\varepsilon_2$. Отсюда следует, что $J^0(\varepsilon_2)<J^0(\varepsilon_1)$, причем в условиях (30) подобно [10] устанавливается непрерывность монотонно убывающей функции $J^0(\varepsilon)$.

Теперь очевидно, что $I(t_a, u_{opt})=\min\limits_u I(t_a, u)=I^0(t_a)=\varepsilon^*$ в условиях $J(u)\leqslant J^*$, где $J^*=J^0(\varepsilon^*)$, для всех достижимых значений $\varepsilon=\varepsilon^*$ в (4) и значит, $u_{opt}(t)$ совпадает с управлением $u^{**}(t)$, минимизирующим функционал (6) за время $t_0^{**}=t_a$ при дополнительном ограничении

$$J(u)-J^*\leqslant 0, \quad J^*=J^0(\varepsilon^*). \tag{31}$$

Совершенно аналогично показывается, что $u_{N opt}(t)$ совпадает с управлением $u^{**}_N(t)$, минимизирующим за время $t_{0N}=t_a$ функционал (7) на множестве управляющих воздействий $u_N(t)$, оптимальных по критерию (28) для всевозможных конечных состояний объекта (5) при ограничении

$$J_N(u)-J^*_N\leqslant 0, \quad J^*_N=J^0_N(\varepsilon^*). \tag{32}$$

При этом зависимости $I^0(J^*)$, $I^0_N(J^*_N)$ так же, как $J^0(\varepsilon)$ и $J^0_N(\varepsilon)$, являются непрерывными, строго убывающими функциями своих аргументов.

Ограничимся далее рассмотрением некоторых частных случаев. Пусть в (27) $F(Z, u)\equiv F(P(\Theta(l, t)))$ есть непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов, где P — некоторый оператор, заданный на множестве функций состояния ОРП таким образом, что он определяется в силу разложения (2) в виде сходящегося ряда с известными коэффициентами A^*_m:

$$P(\Theta(l, t)) = \sum_{m=1}^{\infty} A^*_m z_m(t). \tag{33}$$

Тогда подынтегральная функция в (27) не зависит явно от управления, а функционалы качества $J(u)$ и $J_N(u)$ при фиксированном времени процесса $t_0=t_a$ задаются в следующей форме:

$$J(u) = \int_0^{t_a} F\Big(\sum_{m=1}^{\infty} A^*_m z_m(t)\Big)dt, \quad J_N(u) = \int_0^{t_a} F\Big(\sum_{m=1}^{N} A^*_m z_m(t)\Big)dt. \tag{34}$$

Если, например, $P(\Theta(l, t))\equiv\Theta(l_1, t)$ для некоторой фиксированной точки $l_1\in[0, 1]$, то здесь $A^*_m=A_mK(\mu_m l_1)$. В случае, когда P — оператор усреднения функции состояния на отрезке $[0, 1]\equiv l$, нетрудно найти $A^*_m=A_mK_1(\mu_m)/\mu_m$, где $-K_1(y)=K'(y)$. Поскольку $J_N(u_{N opt})=$ $=J^0_N\leqslant J_N(u_{opt})$ и $J(u_{opt})=J^0\leqslant J(u_{N opt})$ по определению u_{opt} и $u_{N opt}$, то для разности $J^0_N-J^0$ получим:

$$J^0_N - J(u_{N\text{opt}}) \leqslant J^0_N - J^0 \leqslant J_N(u_{\text{opt}}) - J^0. \tag{35}$$

Подставляя сюда соответствующие выражения для J и J_N согласно (34), приведем неравенства (35) к виду

$$\int_0^{t_a} [F(\sum_{m=1}^{N} A^*_m z^N_{m\text{opt}}(t)) - F(\sum_{m=1}^{\infty} A^*_m z^N_{m\text{opt}}(t))]\, dt \leqslant J^0_N - J^0 \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^{t_a} [F(\sum_{m=1}^{N} A^*_m z_{m\text{opt}}(t)) - F(\sum_{m=1}^{\infty} A^*_m z_{m\text{opt}}(t))]\, dt, \tag{36}$$

где $z^N_{m\text{opt}}(t)$, $m=\overline{1, N}$, и $z_{m\text{opt}}(t)$, $m=1, 2, \ldots$ — траектории временны́х мод $z_m(t)$ функции состояния (2) при управлениях соответственно $u_{N\text{opt}}(t)$ и $u_{\text{opt}}(t)$. Используя здесь для дифференцируемой функции $F(y)$, $y \in S$ условие Липшица $|F(y_2) - F(y_1)| \leqslant D|y_2 - y_1|$, $\forall\ y_1 y_2 \in S$ с константой

$$D = \max_{y \in S} \left| \frac{dF(y)}{dy} \right|, \tag{37}$$

будем иметь вместо (36)

$$-D \int_0^{t_a} \left| \sum_{m=N+1}^{\infty} A^*_m z^N_{m\text{opt}}(t) \right| dt \leqslant J^0_N - J^0 \leqslant D \int_0^{t_a} \left| \sum_{m=N+1}^{\infty} A^*_m z_{m\text{opt}}(t) \right| dt, \tag{38}$$

откуда, в свою очередь, находим, что

$$|J^0_N - J^0| \leqslant \Delta_N, \quad \Delta_N = D \int_0^{t_a} \sum_{m=N+1}^{\infty} |A^*_m| \cdot \max_u |z_m(t)|\, dt. \tag{39}$$

Здесь $\lim\limits_{N\to\infty} \Delta_N = 0$ и, следовательно, в силу (39) $\lim\limits_{N\to\infty} |J^0_N - J^0| = 0$.

Теорема 3. Последовательность управляющих воздействий $\{u_{N\text{opt}}(t)\}$, $N=1, 2, \ldots$ является минимизирующей для функционала качества $J(u)$ в (34) при фиксированном времени процесса $t_0 = t_a$. Оценка погрешности приближения к минимальному значению функционала J^0 для любого конечного значения N определяется неравенством (39).

Конкретные оценки для Δ_N легко получить, определяя $\max\limits_u |z_m(t)|$ согласно (12) по аналогии с (13). В частности, для типичного случая $z^0_m = 0$; $g_m(t) \equiv 0$ $m = N+1, N+2, \ldots$ будем иметь после простых вычислений

$$\Delta_N = D \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2_m} |A^*_m b_m C_m| \left(t_a - \frac{1}{\mu^2_m}\left(1 - e^{-\mu^2_m t_a}\right)\right). \tag{40}$$

Рассмотрим далее другой частный случай $F(Z, u) \equiv F(u)$, когда подынтегральная функция в (27) не зависит от Z. Пусть $u^{(1)}_{\text{opt}}(t)$ и $u^{(2)}_{\text{opt}}(t)$ — точные, а $u^{(1)}_{N\text{opt}}(t)$ и $u^{(2)}_{N\text{opt}}(t)$ — приближенные решения рассматриваемой задачи оптимизации для различных достижимых значений $\varepsilon = \varepsilon'$ и $\varepsilon = \varepsilon''$ в (4), где $\varepsilon'' > \varepsilon'$. Пусть далее $J^*_1 = J^0(\varepsilon')$, $J^*_2 = J^0(\varepsilon'')$ и $J^*_{N1} = J^0_N(\varepsilon')$, $J^*_{N2} = J^0_N(\varepsilon'')$ — соответствующие этим управлениям минимальные значения J^* и J^+_N функционалов (27) и (28) в соотношениях (31) и (32), где, следовательно, $J^*_1 > J^*_2$, $J^*_{N1} > J^*_{N2}$. Тогда для эквивалентных минимаксных задач на минимум функционала (7) с ограничениями (32) будем иметь подобно равенствам (17) для задачи быстродействия

$$I_N(t_a, u^{(1)}{}_{N\text{opt}}) = I^0{}_N(J^*{}_{N1}) = \varepsilon', \quad I_N(t_a, u^{(2)}{}_{N\text{opt}}) = I^0{}_N(J^*{}_{N2}) = \varepsilon''. \tag{41}$$

Поскольку в рассматриваемом случае $J(u) \equiv J_N(u)$, то, по существу, сохраняются одинаковые ограничения (31), (32) при точном и приближенном моделировании ОРП, что обеспечивает управляемость «усеченной» модели объекта по конечному состоянию (10) при существовании соответствующих точных решений $u^{(1)}{}_{\text{opt}}(t)$ и $u^{(2)}{}_{\text{opt}}(t)$. Тогда, повторяя выводы п. 2, опять находим для разностей $I^0{}_N(J^*{}_{N1}) - I^0(J^*{}_{N1})$ и $I^0{}_N(J^*{}_{N2}) - I^0(J^*{}_{N2})$ те же оценки вида (16), и, учитывая, что $I^0{}_N(J^*{}_N)$ и $I^0(J^*)$ — строго убывающие функции своих аргументов, по схеме доказательства теоремы 2 получаем следующее утверждение.

Теорема 4. Последовательность управляющих воздействий $\{u_{N\text{opt}}(t)\}$, $N = 1, 2, \ldots$ является минимизирующей для функционала качества (27) с подынтегральной функцией $F(u)$, не зависящей от вектора фазовых переменных ОРП (1). Оценка погрешности приближения к минимальному значению J^0 критерия оптимальности при любом конечном значении N определяется неравенствами

$$0 \leqslant J^0{}_N(\varepsilon') - J^0(\varepsilon') \leqslant J^0{}_N(\varepsilon') - J^0{}_N(\varepsilon''), \tag{42}$$

где $\varepsilon'' = \varepsilon' + 2\delta_N$.

5. Сходимость конечномерных приближений по управляющим воздействиям

Предположим далее, что точные и приближенные решения $u_{\text{opt}}(t)$ и $u_{N\text{opt}}(t)$, $N = 1, 2, \ldots$ рассмотренной выше задачи оптимизации ОРП (1) по критериям $J(u)$ и $J_N(u)$ достаточно общего вида (27), (28) (в рамках изученных в пп. 2—4 частных случаев) существуют на допустимом множестве U управляющих воздействий в классе функций ограниченной вариации с полными изменениями, не превышающими одного и того же числа M:

$$\bigvee_0^{t_a} (u_{\text{opt}}) \leqslant M, \quad \bigvee_0^{t_a} (u_{N\text{opt}}) \leqslant M = \text{const}. \tag{43}$$

Тогда, согласно теореме Хелли о выборе сходящейся подпоследовательности [12], можно выделить такую подпоследовательность $\{u_{N_r\text{opt}}\}$, которая поточечно сходится к некоторой функции $u_*(t) \in U$ на всем интервале $[0, t_a] \ni t$:

$$\lim_{r \to \infty} u_{N_r\text{opt}}(t) = u_*(t) \in U, \qquad \bigvee_0^{t_a} (u_*) \leqslant M. \tag{44}$$

Поскольку $J_N(u) \to J(u)$ при $N \to \infty$ по определению J_N и последовательность $\{u_{N\text{opt}}(t)\}$ — минимизирующая для соответствующего критерия оптимальности в силу теорем 1—4, будем иметь для полунепрерывных снизу функционалов (27) и (28) с учетом (44)

$$J^0 \leqslant J(u_*) \leftarrow J_N(u_*) \leqslant \lim_{r \to \infty} J_N(u_{N_r\text{opt}}) = \lim_{N \to \infty} J_N(u_{N\text{opt}}) = J^0. \tag{45}$$

Отсюда следует, что $J(u_*) = J^0$ и, следовательно,

$$u_*(t) \equiv u_{\text{opt}}(t) \Rightarrow \lim_{N \to \infty} \{u_{N\text{opt}}(t)\} = u_{\text{opt}}, \quad \forall t \in [0, t_a].$$

Таким образом, в условиях исходных предположений имеет место сильная сходимость последовательности приближенных решений $\{u_{N\text{opt}}(t)\}$ задачи оптимизации ОРП к оптимальному управлению $u_{\text{opt}}(t)$ для точной модели объекта.

Пример

Рассмотрим в качестве примера задачу оптимального по быстродействию управления температурным полем $\Theta(l, t)$ неограниченной пластины, описываемым одномерным линейным неоднородным уравнением теплопроводности при краевых условиях второго рода с требованиями (4) к конечному температурному состоянию [13].

В качестве управляющего воздействия выбирается линия переключения $l=u(t)\in[0, 1]$ на плоскости (l, t) с одного предельно допустимого уровня на другой пространственно-временного распределения $W_{\text{opt}}(l, t)$ мощности источников тепловыделения оптимальной кусочно-постоянной формы [13]:

$$W_{\text{opt}}(l, t) = \begin{cases} W_{\max}, & \forall (l, t): u(t)<l\leqslant 1; \\ W_{\min}, & \forall (l, t): 0\leqslant l<u(t), \end{cases} \tag{46}$$

где $W_{\max}$ и $W_{\min}$ — заданные константы. Объект управления моделируется здесь следующей бесконечной системой уравнений вида (1) при $\mu_m=\pi\cdot m$; $b_m = \frac{1}{\mu_m}$; $f_m(u) = -\sin(\mu_m u)$; $W_{\max}=1$; $W_{\min}=0$ [13]:

$$\begin{cases} \dfrac{dz_0}{dt} = 1-u(t)+g(t); \quad z_0(0)=0; \\ \dfrac{dz_m}{dt} = -\mu^2{}_m z_m - \dfrac{1}{\mu_m}\sin(\mu_m u)+\cos\mu_m\cdot g(t); \quad z_m(0)=0, \\ \qquad m = 1, 2, \dots, \end{cases} \tag{47}$$

а температурное поле представляется разложением вида (2) в ряд Фурье:

$$\Theta(l, t)=z_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\cos^2\mu_m} z_m(t)\cos\mu_m l \tag{48}$$

при $$A_m = \frac{2}{\cos^2\mu_m}; \quad K(\mu_m l)=\cos\mu_m l.$$

При этом ограничения на управляющее воздействие (3) и (3′) задаются неравенствами

$$0\leqslant u(t)\leqslant 1; \quad |f_m(u)|\leqslant C_m=1, \forall\, m=1, 2, \dots . \tag{49}$$

Приближенные решения описанной задачи быстродействия $u^*{}_N(t)$ при учете наряду с z_0 лишь $N=1$ и $N=2$ гармоник ряда (48) могут быть получены в явной форме [13] с помощью стандартной процедуры принципа максимума Понтрягина [14] и последующего вычисления неизвестных параметров при заданном ε в (4) по методу [9, 10]. Показано, в частности, что при этом $u^*{}_N(t)$ на некотором промежутке $[0, t']$, $t'\leqslant t_0$ представляет собой обратную тригонометрическую функцию сложного аргумента, в роли которого фигурируют некоторые функции времени экспоненциального типа [13]. Верхняя оценка δ_N погрешности по функционалу (6) для эквивалентной минимаксной задачи определяется для любого конечного N согласно (16) с помощью соответствующей дзета-функции Римана $\xi(y)$ от действительного аргумента y [15] ($\xi(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^y}$):

$$\delta_N = \max_{l \in [0,\ 1]} \sum_{m=N+1}^{\infty} 2 \left| \frac{A_m b_m C_m}{\mu^2_m} K(\mu_m l) \right| = \frac{4}{\pi^3} \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{m^3} =$$

$$= \frac{4}{\pi^3} (\xi(3) - \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m^3}). \quad (50)$$

Отсюда, в частности, получаем $\delta_1 = 0{,}026$; $\delta_2 = 0{,}01$; $\delta_3 = 0{,}005$ [15]. Решая сформулированную задачу быстродействия при фиксированном N для заданного значения $\varepsilon = \varepsilon_1$ в (4) и для $\varepsilon = \varepsilon_2 = \varepsilon_1 + 2\delta_N$, получим верхнюю оценку погрешности по времени оптимального процесса в виде неравенства (25).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального уравнения системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с.

2. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.

3. *Плотников В. И.* О сходимости конечномерных приближений (в задаче об оптимальном нагреве неоднородного тела произвольной формы)//Журн. вычислит. математ. и мат. физики. 1968. Т 8, № 1. С. 136—157.

4. *Первозванский А. А., Гайцгори В. Г.* Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация. М.: Наука, 1979. 342 с.

5. *Первозванский А. А., Солонина Н. В.* Субоптимальный конечномерный регулятор для объекта с распределенными параметрами. 1. Детерминированная задача аналитического конструирования//Автоматика и телемеханика. 1984. № 4. С. 48—59.

6. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988. 352 с.

7. *Коллатц Л., Крабс В.* Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения. М.: Наука, 1978. 236 с.

8. *Рапопорт Э. Я.* Задача равномерного приближения при оптимизации распределенной системы, описываемой уравнением параболического типа//Сиб. мат. журнал. 1982. Т. 23, № 5. С. 168—191.

9. *Рапопорт Э. Я.* Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. М.: Металлургия, 1993. 279 с.

10. *Рапопорт Э. Я.* Чебышевские приближения в задачах параметрической оптимизации управляемых процессов. I—III//Автоматика и телемеханика. 1992. № 2, с. 60—67; № 3, с. 59—64; № 4, с. 49—56.

11. *Рапопорт Э. Я.* Точный метод в задачах оптимизации нестационарных процессов теплопроводности//Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. 1978. № 4. С. 137—145.

12. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 415 с.

13. *Плешивцева Ю. Э., Карпов А. Н., Гущин Б. Л., Сипухин Р. И.* Пространственно-временное управление процессами нестационарной теплопроводности//Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Технические науки. 1994. Вып. 1. С. 102—112.

14. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В.* и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.

15. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1964. 344 с.