УДК 519.68

А. А. ЮДАШКИН

БИФУРКАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СИНЕРГЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ

В статье проводится аналитическое исследование возникающих структур стационарных решений в синергетической нейронной сети. Показано, что конкуренция между параметрами порядка, приводящая к выбору одного из прототипов предъявляемого образа, происходит только в случае существования аттрактора типа «устойчивый узел», соответствующего этому прототипу. Найдены условия, при которых существуют устойчивые стационарные точки. Показано также, что при нарушении указанных условий происходят изменения устойчивости стационарных решений, а также перестройка конфигурационного пространства, в котором происходит распознавание.

В последнее время вследствие формирования синергетической методологии при рассмотрении широкого круга вопросов в совершенно различных областях научного знания появился ряд перспектив в постановке задач искусственного интеллекта, в частности, проблемы распознавания образов. Эти перспективы связаны главным образом с созданием моделей нейронных сетей [1], новым развитием перцептронных моделей [2], а также с обоснованием алгоритма распознавания образов, предложенного Г. Хакеном [3]. Его синергетическая модель основана на использовании определения параметров порядка как некоторых мод, соответствующих запомненным системой образам. При этом предъявляемый для распознавания образ может быть представлен в виде линейной комбинации запомненных следующим образом:

$$q(t) = \sum_{i=1}^{M} d_i(t) v_i + \xi(t), \qquad (1)$$

где q и v_i — соответственно предъявленный и запомненные образы, представленные в виде N-мерных векторов с действительными координатами; d_i — параметры порядка ($i=\overline{1, M}$, $M<N$); ξ — случайный вектор, обусловленный в общем случае неполнотой системы векторов v_i. Процесс распознавания сводится к решению системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\dot{d}_i = \lambda_i d_i - B \sum_{j \neq i}^{M} d_i d_j \left[\sum_{k=1}^{M} g_{ik} d_k\right] - C\left[\sum_{j=1}^{M} d_i d_j \left[\sum_{k=1}^{M} g_{jk} d_k\right] + |\xi|^2 d_i\right] \qquad (2)$$

с начальными условиями вида

$$d(0) = (VG^{-1})^{\mathrm{T}} q(0) \qquad (3)$$

и положительными коэффициентами λ_i, B, C. Система вида (2) описывает конкуренцию мод d_i, в результате которой «выживает» мода, соответствующая наиболее близкому запомненному образу. В фазовом пространстве мод существует ряд стационарных точек: неустойчивый узел в начале координат, устойчивые узлы и седла, которые определяют области притяжения аттракторов. При этом распознавание приводит точку в фазовом пространстве к соответствующему аттрактору из его области притяжения. Как показано в [3], исследование топологии фазового пространства в зависимости от параметров системы (2)

λ_i, C и B является одной из задач, решение которой может быть чрезвычайно полезным при создании алгоритмов обучения в предложенной модели. К настоящему времени проведен лишь слишком общий качественный анализ указанной проблемы [4]. Ниже приводится исследование бифуркационных свойств аттракторов системы (2) в зависимости от значений параметров λ_i.

Без ограничения общности предположим, что v_i образуют ортонормированную систему. Кроме того, как показано в [3], модуль вектора ξ стремится к нулю при $t \to \infty$, поэтому (2) перейдет в систему, для которой топология фазового пространства определяется лишь параметрами λ_i, B и C:

$$\{\dot{d}_i = \lambda_i d_i - (B+C) \sum_{j \neq i}^{M} d_i d^2_j - C d^3_i, \quad i = \overline{1, M}. \tag{4}$$

После приравнивания правых частей уравнений (4) к нулю решается система алгебраических уравнений относительно координат стационарных точек в M-мерном фазовом пространстве, образованном модами d_i. Эта система является аналитически разрешимой в силу своего особого вида, что позволяет найти в явном виде все зависимости координат стационарных точек от параметров системы. Решения системы алгебраических уравнений допускают введение следующих обозначений: δ_j — некоторое решение, соответствующее j-той моде; I^r — набор r индексов координат δ_j; D^p — стационарная точка, где p координат $\delta_j \neq 0$ $(0 \leqslant p \leqslant M)$; E^s — подпространство размерности s в фазовом пространстве системы (4) $(0 \leqslant s \leqslant M)$, причем E^0 — точка в начале координат, E^1 совпадает с какой-либо осью d_i и так далее до E^M, совпадающего со всем фазовым пространством. Очевидно, что всего в E^M существует 2^M подпространств E^s, определенных так, как указано выше.

Можно показать, что стационарные решения будут определяться следующими выражениями:

$$D^p = \{\delta_i,\ \delta_j\colon\ \delta_i \neq 0,\ \delta_j = 0,\ i \in I^p,\ j \notin I^p\},$$

$$\delta^2_i = \left(K \sum_{n \in I^p,\ n \neq i} \lambda_n - (K(p-2)+1)\lambda_i\right) / B(K(p-1)+1)), \tag{5}$$

где $K = B/C + 1$. Количество точек D^p определяется как значение соответствующего биномиального коэффициента по формуле

$$N_p = M!/(p!\,(M-p)!). \tag{6}$$

Применяя метод исследования устойчивости в линейном приближении, можно определить виды стационарных точек в системе (4). Матрица линеаризации $L = \|l_{ij}\|^M_i$ будет симметрической с элементами следующего вида:

$$I_{ij} = \begin{cases} \lambda_i - 3d^2_i - (B+C) \sum_{i \neq k}^{M} d^2_k, & i = j; \\ -2(B+C) d_i d_j, & i \neq j. \end{cases} \tag{7}$$

Образуя характеристическое уравнение для каждого решения D^p в соответствии с (5) и решая его, можно определить, что в системе (4) существует 3 вида стационарных точек: D^0 — неустойчивый узел в начале координат (1 точка); D^1 — устойчивые узлы в E^1 (M точек); D^p — обобщенные седла в E^p при $p > 1$ (всего $2^M - M - 1$ точек).

Как следует из (5), существование каждой точки D^p определяется выполнением совокупности неравенств, определяющих соотношения между коэффициентами λ_i:

$$\{\lambda_i < K/(K(p-1)+1) \sum_{n \in I^p} \lambda_n, \quad i \in I^p. \tag{8}$$

Неравенства (8) могут быть записаны и в другой форме:

$$\{\lambda_i < Kp/(K(p-1)+1)\, \bar{\lambda}^p, \quad i \in I^p, \tag{9}$$

где через $\bar{\lambda}^p$ обозначено среднее по набору I^p значение λ_n. Очевидно, что D^0 и D^1 существуют всегда, однако если D^0 не меняет характер устойчивости, то в E^s могут происходить бифуркации типа «узел—седло» при слиянии точек в направлении $D^s \to D^{s-1}$, причиной которых является изменение коэффициентов λ_i. Рассмотрим сценарий подобной бифрукации в E^2.

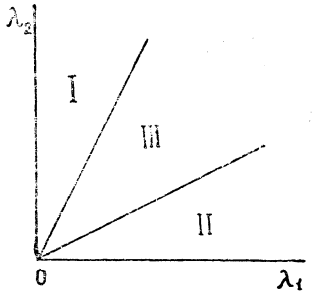

Рис. 1. Области устойчивости в пространстве параметров λ_1 и λ_2

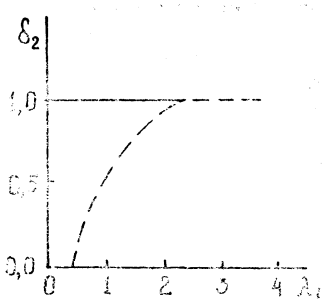

Рис. 2. Бифуркационная диаграмма двумерной модели

Как следует из (8), седло в E^2 существует в области III на рис. 1. Эта же область соответствует устойчивости в E^2 узлов D^1. При выходе точки на плоскости $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ из этого сектора происходит бифуркация соответствующего узла в седло; при этом ранее существовавшее D^p, определяемое выражением (5), исчезает. Например, при переходе в область II узел, соответствующий моде d_2, становится седлом с устойчивым многообразием E^1. Области притяжения узлов D^1 в E^2 определяются разделением фазовой плоскости на две части устойчивым многообразием седла D^2, поэтому после бифуркации $D^2 \to D^1$ устойчивое многообразие сливается с осью d_2, а областью притяжения оставшегося аттрактора D^1 будет вся фазовая плоскость. В этом случае распознавание всегда будет приводить к выживанию моды d_1 независимо от близости начальных условий к седлу на d_2. На рис. 2 показана последовательность бифуркаций стационарных решений в системе (4) при $M=2$ при изменении параметра λ_1 (здесь $\lambda_2=1$, $K=2$) в проекции на плоскость $\{\delta_2, \lambda_1\}$, причем изображена лишь ветвь положительных решений, поскольку системы вида (2) или (4) симметричны. Штриховой линией показано изменение координаты δ_2 седла, непрерывной — узла. Из диаграммы видно, что при $\lambda^*_1 = 2$ происходит слияние седла и узла, после чего в точке $D^1=(0, 1)$ узел теряет устойчивость. Последующая часть графика соответствует сектору II, а область нулевых значений δ_1 соответствует сектору I на рис. 1.

Аналогично выглядят и сценарии бифуркаций в пространстве большей размерности. Исследования показали, что, например, в E^3 бифуркации в процессе роста одного из параметров λ_i $(i=\overline{1, 3})$ происходят в направлении $D^3 \rightarrow D^2$ (существуют 3 аттрактора) $\rightarrow D^1$ (2 аттрактора), а затем происходит бифуркация одного из оставшихся седел $D^2 \rightarrow D^1$, после чего в фазовом пространстве существуют либо один, либо два аттрактора D^1.

Проведенный анализ говорит о том, что в общем случае выполнение (8), (9) при $p=k$ является необходимым и достаточным условием существования D^k, необходимым условием существования D^{k-1} и достаточным условием существования D^{k+1}, кроме того, из (9) следует, что при $M \rightarrow \infty$ обеспечить существование D^M невозможно.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С.* Введение в синергетику. М.: Наука, 1990. 238 с.

2. *Rummelhart D. E., McClelland J. L.* Parallel distributed processing exploration in microstructure of cognition. Cambridge: MIT Press, 1986. 405 p.

3. *Haken H.* Synergetic computers for pattern recognition and associative memory// Computational systems, natural and artificial. Springer, Berlin-Heidelberg-NY, 1987. P. 2—22.

4. *Haken H.* Synergetic computers and cognition: A top-down approach to neural nets. Berlin: Springer-Verlag, 1991. 340 p.

УДК 681.3:681.142

А. П. ВОРОНЦОВ, С. Г. ЖУРАВЛЕВ, М. ЛИ-ФАН

СИНТЕЗ ОПЕРАЦИОННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

Предлагается метод исследования и решения дифференциальных уравнений с помощью операционных аналитических вычислительных устройств (АНВУС).
Приводятся модели распознавания и вычисления дифференциальных уравнений и построения вычислительной структуры для конкретной задачи.

Для большой группы задач математического анализа, не сводящихся к табличным решениям, имеются алгебраические и аналитические методы решения, основанные на алгебраических и арифметических операциях.

Определенную трудность в анализе составляют исследования и решения интегродифференциальных уравнений. Для решения их существуют эффективные методы, приводящие дифференциальные уравнения к общим, частным и особым интегралам. Если проанализировать методы решения задач с точки зрения набора математических и логических операций, то можно обнаружить следующее: процедуры решения состоят из набора арифметических, алгебраических и логических операций.

Чтобы аналитические вычислительные устройства (АНВУС) могли проводить решения дифференциальных уравнений, им необходимо задать алгоритмы. Создание универсального алгоритма, объединяющего все методы решения, невозможно, поэтому следует алгоритмизировать каждый метод решения.

Под машинным «решением» задач анализа будем понимать распознавание образов, извлечение соответствующего алгоритма решения из