

# Математическая теория управления и оптимизации

УДК 517.977.5

Н.Н. Козаченко

## ПОДХОД К ОПТИМАЛЬНОМУ ПРОЕКТИРОВАНИЮ ИНДУКЦИОННОЙ СИСТЕМЫ НА БАЗЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассматривается задача получения требуемой температуры в заданных зонах нагреваемой детали с помощью индукционного нагрева. Такие задачи возникают при необходимости разогрева торцов труб перед сваркой, нагрева подшипников перед съемом с вала, закалке шеек валов.

Процесс нагрева цилиндрических тел описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных электромагнитного поля и теплопроводности. Пространственная конфигурация такой системы позволяет рассматривать двумерную осесимметричную область.

Задача расчета электромагнитного поля формулируется уравнениями Максвелла:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{\delta} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}, \operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \bar{\delta} = \gamma \bar{E}, \operatorname{div} \bar{B} = 0, \operatorname{div} \bar{D} = \rho, \bar{B} = \mu \mu_0 \bar{H}, \bar{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \bar{E}, \quad (1)$$

где  $\bar{H}$  - напряженность магнитного поля;  $\bar{E}$  - напряженность электрического поля;  $\bar{B}$  - магнитная индукция;  $\bar{D}$  - электрическая индукция;  $\bar{\delta}$  - плотность тока проводимости;  $\gamma$  - удельная проводимость проводника;  $\mu$  - относительная магнитная проницаемость;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  - абсолютная магнитная проницаемость, Гн/м;  $\varepsilon$  - относительная диэлектрическая проницаемость;  $\varepsilon_0 = 1/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^{19})$  - абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума, Ф/м;  $\rho$  - объемная плотность электрических зарядов.

С учетом ряда допущений (поле полагается квазистационарным, потери на гистерезис не учитываются из-за незначительности по сравнению с потерями от вихревых токов) и с учетом осевой симметрии уравнения (1) запишем для комплексной амплитуды векторного потенциала в виде

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\mu_a(r,z)} \frac{\partial \bar{A}(r,z)}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{\mu_a(r,z)} \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{A}(r,z)}{\partial r} \right] - j\omega \bar{A}(r,z) - \bar{I}_0(r,z) = 0, \quad (2)$$

где  $\bar{A}$  - векторный магнитный потенциал;  $\bar{I}_0$  - плотность тока внешних источников;  $\bar{B}$  - магнитная индукция;  $\mu_a$  - абсолютная магнитная проницаемость среды;  $\omega = 2\pi f$  - циклическая частота питающего тока;  $j = \sqrt{-1}$  - мнимая единица.

Рассматриваемая область Q имеет границы  $S_1$  и  $S_2$ , на которых задаются граничные условия вида

$$\bar{A} = 0 \text{ при } S_1 \in S; \quad \frac{\partial \bar{A}}{\partial n} = 0 \text{ при } S_2 \in S.$$

Распространение тепла описывается уравнением теплопроводности

$$C(T)\gamma \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda(T)\operatorname{grad}T) + W. \quad (3)$$

Для конкретных задач уравнение в цилиндрических координатах можно записать в виде

$$C(T)\gamma \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial l} \left( \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial l} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( \lambda(T) R \frac{\partial T}{\partial R} \right) + W(l, R, T), \quad (4)$$

где  $T$  - температура;  $R, l$  - радиальная и аксиальная координаты;  $C$  - удельная теплоемкость;  $\gamma$  - плотность;  $\lambda$  - теплопроводность;  $W(l, R, t)$  - внутренние источники тепла, полученные в результате решения электромагнитной задачи (2).

Для однозначности задачи введем краевые условия:

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial l} \Big|_{r=R} = \alpha(R)[T_c - T(R, t)], \quad \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial l} \Big|_{l=L} = \alpha(l)[T_c - T(l, t)], \quad \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0.$$

Сложность формы заготовки не дает возможности описать аналитически процессы, происходящие в системе индуктор-загрузка. В таких задачах наибольшее распространение получил метод конечных элементов (МКЭ) [1-3].

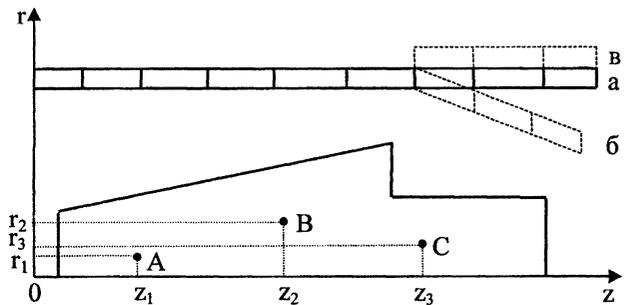
Высокая инерционность тепловых процессов по сравнению с электромагнитными процессами позволяет решать тепловую и электромагнитную задачи отдельно.

Полученная таким образом математическая модель была использована для решения задачи поиска оптимальной конструкции индуктора для нагрева металлической детали, представленной на рис.1, в которой требуется нагреть точки:  $A(z_1, r_1)$  до температуры  $180^\circ\text{C}$ ,  $B(z_2, r_2)$  – до  $210^\circ\text{C}$ ,  $C(z_3, r_3)$  – до  $300^\circ\text{C}$ . Сложность контура не дает возможности описать аналитически процессы, происходящие в системе индуктор - загрузка.

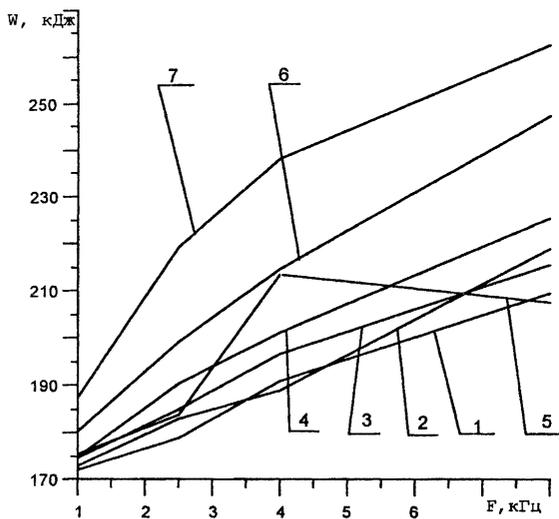
Цель оптимизации - минимизировать время нагрева и затраты энергии. Оптимизация проводилась по двум критериям: подбор конструкции индуктора и частоты питающего тока.

Нижний предел частоты  $1\text{кГц}$  ограничен малыми размерами детали ( $d_{\text{max}}=40\text{мм}$ ,  $x_{\text{max}}=100\text{мм}$ ). При меньшей частоте глубина проникновения тока увеличивается и КПД индуктора недопустимо снижается [4].

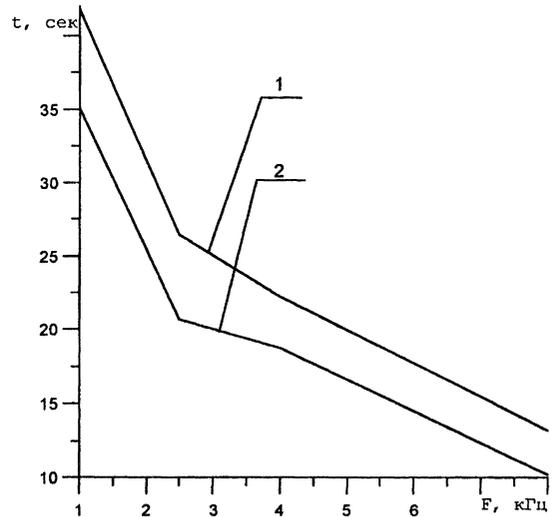
За основу для оптимизации конструкции нагревателя был взят цилиндрический однослойный индуктор («а» на рис. 1), питающийся током при частоте  $8\text{кГц}$ . В процессе подбора индуктора, рассматривались варианты: индуктор, состоящий из цилиндрической и конусной части («б» на рис. 1); двухслойный индуктор с несколькими витками во втором слое (1-5 витков от конца индуктора, «в» на рис.1). Такие конструкции индуктора не дали существенных результатов для улучшения процесса нагрева. По этой причине в дальнейшем исследовалось влияние заглупления загрузки и частоты питающего тока на затраты энергии. Результаты в виде графиков представлены на рис.2, 3.



Р и с. 1. Схема для решения задачи поиска оптимальной конструкции индуктора



Р и с. 2. Графики зависимости энергозатрат от частоты питающего тока



Р и с. 3. Графики зависимости времени нагрева от частоты питающего тока

На рис. 2 показаны графики зависимости энергозатрат системы, потребляемой установкой от частоты и заглупления ( $dz$ ), где 1 -  $dz=25\text{мм}$ , 2 -  $dz=15\text{мм}$ , 3 -  $dz=35\text{мм}$ , 4 -  $dz=5\text{мм}$ , 5 -  $dz=-5\text{мм}$ , 6 -  $dz=-15\text{мм}$ . На рис. 3 представлены графики зависимости времени нагрева от частоты и заглупления, при  $dz=-15\text{мм}$  (кривая 1),  $dz=25\text{мм}$  (кривая 2). Кривые 1 и 2 приведены для граничных значений заглупления, так как зависимость времени нагрева от частоты при промежуточных значениях заглупления имеет аналогичный характер.

Из графиков видно, что наилучшие результаты по быстродействию и энергозатратам получены при заглуплении  $dz=25\text{мм}$ . При увеличении частоты время нагрева уменьшается в 4 раза, но энергозатраты при этом увеличиваются. При нагреве на частоте  $1\text{кГц}$  производительность установки снижается в четверо ( $t_{\text{нагр}}=40,7\text{сек}$  при  $f=1\text{кГц}$ ,  $t_{\text{нагр}}=10,8\text{сек}$  при  $f=8\text{кГц}$ ), а потребляемая мощность уменьшается почти в 5 раз ( $P=4,3\text{кВт}$  и  $P=19,95\text{кВт}$ ).

Таким образом, следует вывод, что наиболее эффективным является процесс нагрева на предельно низкой частоте  $1\text{кГц}$ . При необходимости сохранения производительности на уровне можно использовать четыре таких установки. Такой вариант дает экономию энергозатрат  $40,5\text{кДж}$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Немков В.С. Демидович В.Б. Теория и расчет устройств индукционного нагрева. Л.: Энергоатомиздат, 1988.
2. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986.
3. Норри Л., Ж де Фриз. Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981.
4. Слухоцкий А.Е. Установки индукционного нагрева. Л.: Энергоиздат, 1981.

УДК 62-40

Э.Я. Рапопорт, А.В. Сергеев

### ЧЕБЫШЕВСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ АППРОКСИМАЦИИ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

*Проблема параметрического синтеза дробно-рациональной аппроксимации трансцендентных амплитудно-фазовых частотных характеристик объектов с распределёнными параметрами сводится к задаче минимизации ошибки равномерного приближения к нулю разности соответствующих характеристик мнимых частот на подходящем действительном отрезке. Предложенный метод синтеза базируется на чебышевских свойствах решения такой задачи и априорной информации в форме соответствующих характеристик. Приводится пример дробно-рациональной аппроксимации амплитудно-фазовой частотной характеристики объекта, описываемого уравнением теплопроводности.*

При автоматизации сложных объектов управления часто возникает ситуация, когда адекватное описание динамики объекта можно дать только с помощью дифференциальных уравнений в частных производных. Амплитудно-фазовые частотные характеристики (АФЧХ) [ 1 ] таких объектов, получивших название объектов с распределёнными параметрами (ОРП), имеют сложный вид трансцендентной функции комплексного аргумента [ 2 ]. Анализ частотных характеристик в таком виде затруднён, в отличие от частотных характеристик объектов с сосредоточенными параметрами (ОСП), которые имеют вид дробно-рациональной функции комплексного аргумента [ 1 ].

Естественным образом возникает задача о приближённом представлении объекта с распределёнными параметрами в удобном для анализа виде объекта с сосредоточенными параметрами, т. е. возникает задача об аппроксимации АФЧХ ОРП некоторой дробно-рациональной функцией комплексного аргумента.

В роли критерия качества приближения естественно взять максимальное значение ошибки равномерного приближения

$$J(\Delta) = \max_{\omega} |S(j\omega, \Delta) - W(j\omega)|, \quad (1)$$

где  $W(j, \omega)$ - есть АФЧХ ОРП, а  $S(j\omega, \Delta)$ -дробно-рациональная функция, заданная нами с точностью до размерности вектора неизвестных параметров  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1 \dots \Delta_n)$ .

Задача наилучшего приближения формулируется как отыскание такого вектора параметров  $\Delta$ , который бы минимизировал критерий (1):

$$J(\Delta) = \max_{\omega} |S(j\omega, \Delta) - W(j\omega)| \rightarrow \min_{\Delta}. \quad (2)$$

Решение непосредственно задачи (2) является сложной процедурой и требует большого объёма вычислений. Поэтому, используя аппарат вещественных интегральных  $\delta$ -преобразований [ 3, 4 ], можно перейти в (2) от частотных характеристик к их аналогам в форме соответствующих вещественных изображений  $S(\delta, \Delta)$  и  $W(\delta)$ , получивших название характеристик мнимых частот (ХМЧ) [ 3 ], путём простой формальной замены комплексного аргумента на действительную переменную  $\delta$ . Кроме того, будем рассматривать приближение на конечном отрезке  $[\delta_H, \delta_B]$ . Тогда вместо (2) получаем более простую чебышевскую задачу минимизации ошибки равномерного приближения к нулю [ 5 ] на подходящем действительном отрезке разности соответствующих ХМЧ ОСП и ОРП:

$$J(\Delta) = \max_{\delta \in [\delta_H, \delta_B]} |S(\delta, \Delta) - W(\delta)| \rightarrow \min_{\Delta}. \quad (3)$$

Правомерность подобного перехода обосновывается однозначно устанавливаемой связью между амплитудно-фазовыми частотными характеристиками и ХМЧ системы [ 3 ], обеспечивающей необходимую