

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Немков В.С. Демидович В.Б. Теория и расчет устройств индукционного нагрева. Л.: Энергоатомиздат, 1988.
2. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986.
3. Норри Л., Ж де Фриз. Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981.
4. Слухоцкий А.Е. Установки индукционного нагрева. Л.: Энергоиздат, 1981.

УДК 62-40

Э.Я. Рапопорт, А.В. Сергеев

ЧЕБЫШЕВСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ АППРОКСИМАЦИИ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Проблема параметрического синтеза дробно-рациональной аппроксимации трансцендентных амплитудно-фазовых частотных характеристик объектов с распределёнными параметрами сводится к задаче минимизации ошибки равномерного приближения к нулю разности соответствующих характеристик мнимых частот на подходящем действительном отрезке. Предложенный метод синтеза базируется на чебышевских свойствах решения такой задачи и априорной информации в форме соответствующих характеристик. Приводится пример дробно-рациональной аппроксимации амплитудно-фазовой частотной характеристики объекта, описываемого уравнением теплопроводности.

При автоматизации сложных объектов управления часто возникает ситуация, когда адекватное описание динамики объекта можно дать только с помощью дифференциальных уравнений в частных производных. Амплитудно-фазовые частотные характеристики (АФЧХ) [1] таких объектов, получивших название объектов с распределёнными параметрами (ОРП), имеют сложный вид трансцендентной функции комплексного аргумента [2]. Анализ частотных характеристик в таком виде затруднён, в отличие от частотных характеристик объектов с сосредоточенными параметрами (ОСП), которые имеют вид дробно-рациональной функции комплексного аргумента [1].

Естественным образом возникает задача о приближённом представлении объекта с распределёнными параметрами в удобном для анализа виде объекта с сосредоточенными параметрами, т. е. возникает задача об аппроксимации АФЧХ ОРП некоторой дробно-рациональной функцией комплексного аргумента.

В роли критерия качества приближения естественно взять максимальное значение ошибки равномерного приближения

$$J(\Delta) = \max_{\omega} |S(j\omega, \Delta) - W(j\omega)|, \quad (1)$$

где $W(j, \omega)$ - есть АФЧХ ОРП, а $S(j\omega, \Delta)$ -дробно-рациональная функция, заданная нами с точностью до размерности вектора неизвестных параметров $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1 \dots \Delta_n)$.

Задача наилучшего приближения формулируется как отыскание такого вектора параметров Δ , который бы минимизировал критерий (1):

$$J(\Delta) = \max_{\omega} |S(j\omega, \Delta) - W(j\omega)| \rightarrow \min_{\Delta}. \quad (2)$$

Решение непосредственно задачи (2) является сложной процедурой и требует большого объёма вычислений. Поэтому, используя аппарат вещественных интегральных δ -преобразований [3, 4], можно перейти в (2) от частотных характеристик к их аналогам в форме соответствующих вещественных изображений $S(\delta, \Delta)$ и $W(\delta)$, получивших название характеристик мнимых частот (ХМЧ) [3], путём простой формальной замены комплексного аргумента на действительную переменную δ . Кроме того, будем рассматривать приближение на конечном отрезке $[\delta_H, \delta_B]$. Тогда вместо (2) получаем более простую чебышевскую задачу минимизации ошибки равномерного приближения к нулю [5] на подходящем действительном отрезке разности соответствующих ХМЧ ОСП и ОРП:

$$J(\Delta) = \max_{\delta \in [\delta_H, \delta_B]} |S(\delta, \Delta) - W(\delta)| \rightarrow \min_{\Delta}. \quad (3)$$

Правомерность подобного перехода обосновывается однозначно устанавливаемой связью между амплитудно-фазовыми частотными характеристиками и ХМЧ системы [3], обеспечивающей необходимую

близость решений задач (2) и (3) при достаточно малой величине ошибки равномерного приближения в (3). Необходимую малость ошибки приближения мы всегда можем обеспечить за счёт усложнения структуры ОСП или за счёт варьирования величины и положения отрезка приближения.

Из теории приближений [5, 6] хорошо известно замечательное свойство решения задачи (3), а именно: если $\Delta = \Delta^0$ является решением (3), то разность, стоящая под знаком модуля, на отрезке приближения $[\delta_H, \delta_B]$ будет максимально уклоняться от нуля с чередующимся знаком ровно $n+1$ раз, где n - размерность вектора параметров Δ . Другими словами, на отрезке приближения будет ровно $n+1$ точек $\delta_q, q = \overline{1, n+1}$, в которых достигаются знакочередующиеся максимальные по модулю значения разности $S(\delta, \Delta^0) - W(\delta)$, равные $\pm J(\Delta^0)$.

Таким образом, при достаточно гладкой форме типовых ОРП, исключая избыточное число точек экстремумов разности $S(\delta, \Delta^0) - W(\delta)$, решение задачи (3) можно свести к решению системы нелинейных уравнений относительно искомым параметров, дополненной уравнениями для определения экстремальных точек δ_q [7]:

$$S(\delta_q^0, \Delta^0) - W(\delta_q^0) = (-1)^q \psi J(\Delta^0); \quad q = \overline{1, n+1}; \quad |\psi| = 1;$$

$$\frac{\partial}{\partial \delta} [S(\delta_q^0, \Delta^0) - W(\delta_q^0)] = 0; \quad q = \overline{\lambda, \lambda_1} \quad \lambda \in \{1, 2\}; \quad \lambda_1 \in \{n, n+1\}, \quad (4)$$

где $\lambda=1$, если $\delta_1^0 > \delta_H$; $\lambda=2$, если $\delta_1^0 = \delta_H$; $\lambda_1=n$, если $\delta_{n+1}^0 = \delta_B$ и $\lambda_1=n+1$, если $\delta_{n+1}^0 < \delta_B$.

При наличии дополнительной информации о форме кривой $S(\delta, \Delta^0) - W(\delta)$ на отрезке $[\delta_H, \delta_B] \in \delta$, позволяющей однозначным образом определить значения λ, λ_1, ψ и выбрать точки из возможного набора вариантов, система $n+\lambda_1 - \lambda+2$ уравнений решается относительно искомым параметров $\Delta^0, i = \overline{1, n}$ ХМЧ ОСП, наилучшим образом аппроксимирующей ХМЧ ОРП; минимакса ошибки равномерного приближения $J(\Delta^0)$ и координат экстремальных точек $\delta_q^0, q = \overline{\lambda, \lambda_1}$.

Для упрощения реализации численной процедуры решения системы (4) предлагается следующий алгоритм.

1. Система (4) разделяется на две подсистемы:

$$S(\delta_q^0, \Delta^0) - W(\delta_q^0) = (-1)^q \psi J(\Delta^0); \quad q = \overline{1, n+1}; \quad |\psi| = 1; \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \delta} [S(\delta_q^0, \Delta^0) - W(\delta_q^0)] = 0; \quad q = \overline{\lambda, \lambda_1} \quad \lambda \in \{1, 2\}; \quad \lambda_1 \in \{n, n+1\}, \quad (6)$$

2. Решается система (5) относительно параметров Δ^0 и минимакса $J(\Delta^0)$. Точки δ_q^0 считаются заданными. Решение производится любым стандартным численным методом.

3. Уточняется расположение экстремальных точек δ_q^0 . Т. е. решается система (6) относительно точек δ_q^0 , причём значения Δ^0 - это решение системы (5), полученное на предыдущем шаге. Здесь необходимо отметить, что в общем случае мы не располагаем достаточной информацией для того, чтобы заранее судить о характере расположения экстремальных точек, т.е. о значениях индексов λ, λ_1 , а отсюда о количестве уравнений в системе (6). Как показывает практика, в большинстве случаев $\delta_1^0 = \delta_H, \delta_{n+1}^0 = \delta_B$ и $\lambda=2, \lambda_1=n$, но, для большей надёжности, лучше поступить следующим образом: вместо системы (6) взять одно уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \delta} [S(\delta, \Delta^0) - W(\delta)] = 0 \quad (7)$$

и найти все его корни, принадлежащие отрезку приближения. Очевидно, что они будут являться исчерпывающим решением системы (6).

4. Возвращаемся к п. 2, где теперь экстремальные точки δ_q^0 - это решение системы (6), полученное на третьем шаге.

Таким образом, строится итеративная процедура, представляющая по существу процесс пошагового уточнения решений подсистем (5) и (6). Процедура продолжается до тех пор, пока не будет достигнута необходимая точность решения.

Окончательно, путём обратной формальной замены действительной переменной δ на комплексный аргумент $j\omega$, перейдём от характеристик в области мнимых частот к характеристикам в области действительных частот. Далее оценивается степень близости частотных характеристик $S(j\omega, \Delta^0)$ и $W(j\omega)$ по модулю и аргументу, и в случае удовлетворительного результата при дальнейшем анализе динамических свойств ОРП используется приближённая замена в виде ОСП.

В качестве примера применения подобного подхода рассмотрим аппроксимацию типового ОРП II порядка, описываемого уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial \Theta(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \Theta(x, t)}{\partial x^2}, \quad (8)$$

где $\Theta(x,t)$ - температурное поле в процессе распространения тепла, характеризующее состояние объекта; a - коэффициент температуропроводности, зависящий от основных теплофизических параметров нагреваемого тела [8].

Для получения частотной характеристики объекта преобразуем уравнение (5) по Фурье:

$$j\omega \Theta(x, j\omega) = a \frac{d^2 \Theta(x, j\omega)}{dx^2}. \quad (9)$$

Выражение (9)- типовое дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами, где $j\omega$ - некоторый постоянный параметр. Его решение при конкретных граничных условиях (в которые, в свою очередь, входит управляющее воздействие) позволяет определить соответствующие им АФЧХ.

Для примера остановимся на граничных условиях 3-го рода [8]:

$$\begin{cases} \lambda \frac{\partial \Theta(R,t)}{\partial x} + \alpha \Theta(R,t) = \alpha \Theta_c(t); \\ \lambda \frac{\partial \Theta(0,t)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где λ - коэффициент теплопроводности; α - коэффициент теплопередачи; $\Theta(R,t)$ - температура на поверхности тела; $\Theta(0,t)$ - температура в точке симметрии тела; $\Theta_c(t)$ - температура внешней среды, являющаяся в данном случае управляющим воздействием.

Перейдём в (10) к изображениям по Фурье:

$$\begin{cases} \lambda \frac{d \Theta(R, j\omega)}{dx} + \alpha \Theta(R, j\omega) = \alpha \Theta_c(j\omega); \\ \lambda \frac{d \Theta(0, j\omega)}{dx} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

При совместном решении (9) и (11) окончательно получим АФЧХ теплового объекта второго порядка, описываемого дифференциальным уравнением (5), при граничных условиях третьего рода (10) [2]:

$$W_{III}(j\omega, x) = \frac{ch\sqrt{T_X \cdot j\omega}}{\sqrt{T_1 \cdot j\omega} \cdot sh\sqrt{T_R \cdot j\omega} + ch\sqrt{T_R \cdot j\omega}}. \quad (12)$$

Здесь T_1, T_R, T_X - постоянные времени, определяемые теплофизическими параметрами нагреваемого тела [2].

Перейдём в (9) к ХМЧ:

$$W_{III}(\delta, x) = \frac{ch\sqrt{T_X \cdot \delta}}{\sqrt{T_1 \cdot \delta} \cdot sh\sqrt{T_R \cdot \delta} + ch\sqrt{T_R \cdot \delta}}. \quad (13)$$

При выборе структуры аппроксимирующих ХМЧ необходимо принять компромиссное решение относительно числа "настраиваемых" параметров Δ_i : очевидно, что с усложнением структуры аппроксимирующей характеристики увеличивается точность приближения, но вместе с тем кривая разности $S(\delta, \Delta^0) - W(\delta)$ будет иметь более сложную форму, что в целом усложняет решение задачи аппроксимации (3).

Исходя из этих соображений для аппроксимации $W_{III}(\delta, x)$ рекомендуется принять

$$S_{III}(\delta, \Delta) = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 \delta}{1 + \Delta_3 \delta + \Delta_4 \delta^2}, \quad (14)$$

поскольку, как показывает опыт решения подобных задач, при относительной простоте реализации процедуры приближения, при помощи выражения (11) достигается необходимая близость не только ХМЧ $S_{III}(\delta, \Delta^0)$ и $W_{III}(\delta, x)$, но также и частотных характеристик, что собственно и является основной задачей приближения.

Далее сформулируем задачу чебышевского приближения (3), которая для рассматриваемого здесь примера запишется соответственно как

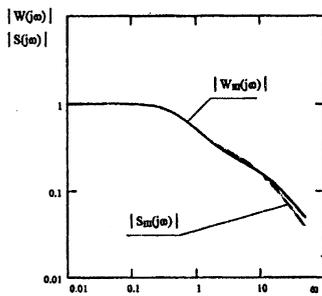
$$J_{III}(\Delta) = \max_{\delta \in [\delta_n, \delta_e]} \left| \frac{\Delta_1 + \Delta_2 \delta}{1 + \Delta_3 \delta + \Delta_4 \delta^2} - \frac{ch\sqrt{T_X \cdot \delta}}{\sqrt{T_1 \cdot \delta} \cdot sh\sqrt{T_R \cdot \delta} + ch\sqrt{T_R \cdot \delta}} \right| \rightarrow \min_{\Delta}. \quad (15)$$

Как отмечалось ранее, решение задач, подобных (15), можно свести к решению системы нелинейных уравнений типа (4) с помощью итеративной процедуры, описанной выше. Технически осуществить эту процедуру можно с помощью пакета прикладных программ типа MATHCAD, в котором реализованы основные численные алгоритмы, в том числе и алгоритм численного решения систем нелинейных уравнений. Написание текста программ ведётся на языке, максимально приближенном к обычному математическому языку, кроме того, имеется возможность оперативного получения графической информации, что значительно облегчает процесс идентификации формы кривой разности $S(\delta, \Delta^0) - W(\delta)$.

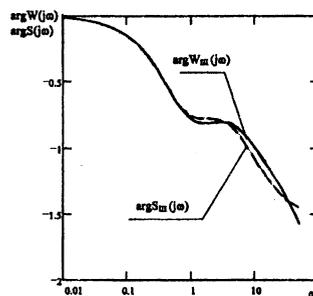
В результате решения, при заданных параметрах ОРП ($T_R=1.5$; $T_x=1.1$, $T_1=1.2$), на отрезке приближения $\delta \in [0, 50]$, была найдена аппроксимирующая ХМЧ :

$$S_{III}(\delta, \Delta^0) = \frac{1,00179 + 0,52242\delta}{1 + 2,10338\delta + 0,26977\delta^2} \quad (16)$$

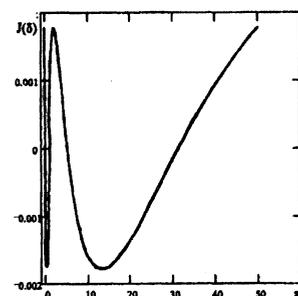
Окончательно, путём обратной замены $\delta \rightarrow j\omega$, переходим к характеристикам объектов в частотной области. Ниже на графиках (рис. 1, 2) для качественного анализа результатов аппроксимации в частотной области построены модули (амплитудно-частотные характеристики) и аргументы (фазо-частотные характеристики) АФЧХ приближаемого ОРП и найденного для его приближённой замены ОСП. На рис.3 построена кривая разности $S_{III}(\delta, \Delta^0) - W_{III}(\delta)$, иллюстрирующая основное свойство решения задачи чебышевской аппроксимации (3) [3,4].



Р и с. 1. Амплитудно-частотные характеристики



Р и с. 2. Фазочастотные характеристики



Р и с. 3. Ошибка приближения

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Математические основы теории автоматического регулирования / Под ред. Б.К. Чемоданова. Т.2. М.: Высш. школа, 1977.
2. *Маковский В.А.* Динамика металлургических объектов с распределёнными параметрами. М.: Металлургия, 1971.
3. *Огурок И.А.* Новые методы синтеза некоторых нелинейных динамических систем. М.-Л.: Наука, 1965.
4. Анализ и оптимальный синтез на ЭВМ систем управления / Под ред. А.А. Воронова, И.А. Огурка. М.: Наука, 1984.
5. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
6. *Демьянов Ф.В., Малозёмов В.Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.
7. *Рапопорт Э.Я.* Параметрическая оптимизация систем автоматического управления по равномерно-частотным критериям. // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Вып. 5. Сер. "Технические науки". 1998. С.13–28.
8. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высш. школа, 1967.