

60. Гольденблат И. И., Бажанов В. Л., Копнов В. А. Длительная прочность в машиностроении. М.: Машиностроение, 1977. 248 с.
61. Киселев А. В. Влияние вида напряженного состояния на разрушение и ползучесть// Физика и электроника твердого тела. Ижевск, 1976. Вып. 1. С. 33—41.
62. Чижик А. А., Петреня Ю. К. Разрушение вследствие ползучести и механизмы микроразрушения//ДАН СССР. 1987. Т. 297. № 6. С. 1331—1333.
63. Качанов Л. М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. С. 312.
64. Наместникова И. В., Шестериков С. А. Векторное представление параметра поврежденности//Деформирование и разрушение твердых тел. М.: МГУ, 1985. С. 43—52.
65. Шестериков С. А., Локощенко А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов// Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ, 1980. Вып. 13. С. 104.
66. Наместникова И. В., Шестериков С. А. Применение векторной характеристики поврежденности к расчету на прочность диска толстостенной трубы в условиях ползучести//Деформирование и разрушение твердых тел. М.: МГУ, 1985. С. 53—67.

УДК 539. 3

Н. Н. СТОЛЯРОВ

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ГИБКИХ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

Предлагается математическая модель упругопластического деформирования гибких пластин и оболочек при простом и сложном нагружении. Модель позволяет единообразно исследовать деформирование на основе деформационной теории пластичности, теории течения с трансляционно-изотропным упрочнением и теории двухзвенных процессов А. А. Ильюшина [1].

Разработан математический аппарат решения начально-краевых двумерных задач механики упругопластического деформирования, основанный на развитии методов и алгоритмов и широком использовании их модификаций. В теорию расчета гибких упругопластических оболочек вводятся новые эффективные методы вычислительной математики: двухступенчатый, метод Р. П. Федоренко, итерационный метод с чебышевским ускорением [2—6].

Дано решение новых задач, связанных с определением напряженно-деформированного состояния, исследование двухпараметрического нагружения. Впервые на основе теории двухзвенных процессов и экспериментально-вычислительного метода СН—ЭВМ А. А. Ильюшина разработана методика расчета пластин и оболочек при сложном нагружении [7—11].

Предложены и реализованы алгоритмы решения задач упругопластической устойчивости пластин и оболочек при поперечном, продольном и комбинированном нагружении с использованием различных теорий пластичности [12—13].

Впервые дается постановка и решение ряда задач оптимизации упругопластических пластин и оболочек в геометрически нелинейной постановке. Предлагается алгоритм решения задач оптимизации пластин и оболочек, основанный на использовании методов теории планирования экстремальных экспериментов [14—16].

Постановка задач

1. Объектом исследования являются гибкие упругопластические прямоугольные пластинки и пологие оболочки двоякой кривизны со сторонами $2a$, $2b$ и толщиной h , нагруженные поперечной $p(x, y)$ и продольными p_1 , p_2 нагрузками. Пластины и оболочки могут находиться под действием равномерно распределенных, местных, полосовых, сосредоточенных нагрузок. Рассматриваются однопараметрические и двухпараметрические нагружения. Исследуется деформирование пластин и оболочек при циклических знакопеременных нагружениях.

Рассматриваются пластины и оболочки, по кромкам которых реализуются в любых комбинациях граничные условия шарнирного опира-

ния и скользящей заделки. Исследовано деформирование оболочек с неподвижно закрепленными кромками, при этом граничные условия неподвижного шарнира и неподвижной заделки могут быть заданы в любом сочетании по кромкам.

Исследуются изотропные неоднородные пластины и оболочки переменной жесткости и кривизны: толщина $h(x, y)$, кривизны $k_1(x, y)$, $k_2(x, y)$, модуль упругости $E(x, y, z)$, коэффициент Пуассона $\nu(x, y, z)$, предел текучести являются некоторыми функциями координат. Рассматриваются однослойные и многослойные оболочки.

Используя пятимерные девятимерные пространства А. А. Ильюшина, вводят в рассмотрение векторы напряжений $\bar{\sigma}$, деформаций $\bar{\epsilon}$, деформаций срединной поверхности $\bar{\epsilon}^s$, изменения кривизн срединной поверхности $\bar{\kappa}$. Для пластин и оболочек введем трехмерные подпространства этих пространств с ортонормированным базисом $(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3)$ [1].

На основании постулата изотропии А. А. Ильюшина общая форма связи вектора напряжений $\bar{\sigma}$ с вектором деформаций $\bar{\epsilon}$ имеет вид [1]

$$d\bar{\sigma} = N d\bar{\epsilon} - (N - P) \frac{\sigma d\bar{\epsilon}}{\sigma^2} \bar{\sigma}, \quad (1.1)$$

где N и P — функционалы по длине дуги траектории деформаций от кривизны этой траектории. Среднее напряжение σ_0 связано со средней деформацией ϵ_0 линейной зависимостью

$$d\sigma_0 = 3kd\epsilon_0. \quad (1.2)$$

Используя основные соотношения теории течения с трансляционно-изотропным упрочнением и предполагая справедливость гипотезы единой кривой, получим

$$d\bar{\sigma} = N d\bar{\epsilon} - (N - P) \frac{\bar{\sigma} \cdot d\bar{\epsilon}}{\sigma^2} \frac{\bar{\sigma}^*}{\sigma^*}, \quad (1.3)$$

$$\text{где } N = 2G, \quad P = \frac{E_k}{1 + E_k'/2G}, \quad E'_k = \frac{2}{3} \frac{d\sigma_n}{d\epsilon_n^p},$$

$\bar{\sigma}^* = \bar{\sigma} - \bar{s}$, $\bar{\sigma}^*$, $\bar{s}$ — вектор активных напряжений, вектор остаточных микронапряжений. Представляя (1.3) в координатной форме, зависимость между $d\bar{\sigma}$ и $d\bar{\epsilon}$ запишем в матричном виде

$$d\bar{\sigma} = A d\bar{\epsilon}, \quad (1.4)$$

где $d\bar{\sigma} = (d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3)$, $d\bar{\epsilon} = (d\epsilon_1, d\epsilon_2, d\epsilon_3)$ — векторы приращений напряжений и деформаций, A — симметричная матрица с элементами

$$a_{ij} = N\delta_{ij} - (N - P) \frac{\sigma_i^* \cdot \sigma_j^*}{\sigma^{*2}}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.5)$$

Полагая в (1.5) $\sigma^* = \bar{\sigma}$, получим связь между $\bar{\sigma}$ и $\bar{\epsilon}$ для теории течения с изотропным упрочнением. В деформационной теории пластичности при вычислении a_{ij} следует положить $\bar{\sigma}^* = \bar{\sigma}$, а материальные функции взять в виде

$$N = \frac{2}{3} \frac{\sigma_n}{\epsilon_n}, \quad P = \frac{E'_k}{1 + E'_k/2G}.$$

Соотношения теории двухзвенных процессов представим в виде

$$d\bar{\sigma} = A_1 d\bar{\Theta} - (A_1 - B_1) \frac{\bar{\Theta}^0 d\bar{\Theta}}{\bar{\Theta}^0} - \frac{\bar{\Theta}^0}{\bar{\Theta}^0}, \quad (1.6)$$

$$A_1 = N + \frac{\partial N}{\partial S} \Delta S, \quad B_1 = P + \frac{\partial P}{\partial S} \Delta S, \quad N = N(\Delta S), \quad P = P(S_0, \Theta, \Delta S),$$

где N, P — материальные функции, Θ — угол излома траектории деформаций, $\bar{\Theta}^0$ — модуль вектора $\bar{\Theta}$ в точке излома траектории деформации. Зависимость (1.6) преобразуется к виду (1.4), где

$$d_{ij} = A_1 \delta_{ij} - (A_1 - B_1) \frac{\bar{\Theta}_i^0 \cdot \bar{\Theta}_j^0}{\bar{\Theta}^{02}}. \quad (1.7)$$

Выразим компоненты векторов $d\bar{\sigma}$ и $d\bar{\Theta}$ через компоненты тензора напряжений $d\sigma_{11}, d\sigma_{22}, d\sigma_{12}$ и тензора деформаций $d\epsilon_{11}, d\epsilon_{22}, d\epsilon_{12}$, учитывая (1.2):

$$\begin{vmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{12} \end{vmatrix} = [F_1(E - F_2) + AF_1F_2 \cdot \frac{1}{3k}]^{-1} AF_1 \begin{vmatrix} d\epsilon_{11} \\ d\epsilon_{22} \\ d\epsilon_{12} \end{vmatrix}, \quad (1.8)$$

где $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ — симметричная матрица,

элементы которой вычисляются в соответствии с выбранной теорией пластичности (1.5), (1.7), E — единичная матрица, F_1 и F_2 — числовые матрицы

$$F_1 = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix}, \quad F_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Деформации слоя, отстоящего на расстоянии z от срединной поверхности, имеют вид

$$\epsilon_{11} = \epsilon_1 + z\kappa_{11}, \quad \epsilon_{22} = \epsilon_2 + z\kappa_{22}, \quad \gamma_{12} = \gamma^c_{12} + 2z\chi, \quad \gamma^c_{12} = 2\epsilon_{12}, \quad (1.9)$$

где $\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma^c_{12}$ — деформации срединной поверхности, $\kappa_{11}, \kappa_{22}, \chi$ — изменения кривизны срединной поверхности. Используя теорию пологих оболочек и положив параметры Ляме $A_1 = A_2 = 1$, получим выражение деформаций срединной поверхности через перемещения u, v, w :

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} - k_1 w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, & \epsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} - k_2 w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \gamma^c_{12} = 2\epsilon^c_{12} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, & \kappa_{11} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \kappa_{22} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, & \kappa_{12} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Зависимость (1.10) определяет геометрически нелинейную постановку задачи.

Вводя обозначение

$$B = [F_1(E - F_2) + AF_1F_2 \cdot \frac{1}{3k}]^{-1} \cdot AF_1$$

и подставляя (1.9) в (1.8), получим

$$\begin{vmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{12} \end{vmatrix} = B \cdot \begin{vmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon^c_{12} \end{vmatrix} + B \cdot z \begin{vmatrix} d\kappa_{11} \\ d\kappa_{22} \\ d\kappa_{12} \end{vmatrix}. \quad (1.11)$$

Приращения усилий и моментов находятся интегрированием (1.11) по координате z в пределах от $z = -h_1$ до $z = h_2$:

$$dT_{ij} = \int_{-h_1}^{h_2} d\sigma_{ij} dz, \quad dM_{ij} = \int_{-h_1}^{h_2} d\sigma_{ij} z dz, \quad i, j = 1, 2, \quad (1.12)$$

$$dT = c^{(0)} d\varepsilon + c^{(1)} d\kappa,$$

$$dM = c^{(1)} d\varepsilon + c^{(2)} d\kappa, \quad (1.13)$$

$$dT = \begin{vmatrix} dT_{11} \\ dT_{22} \\ dT_{12} \end{vmatrix}, \quad dM = \begin{vmatrix} dM_{11} \\ dM_{22} \\ dM_{12} \end{vmatrix}, \quad d\varepsilon = \begin{vmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon^c_{12} \end{vmatrix}, \quad d\kappa = \begin{vmatrix} d\kappa_{11} \\ d\kappa_{22} \\ d\kappa_{12} \end{vmatrix},$$

$$c^{(m)} = \begin{vmatrix} c^{(m)}_{11} & c^{(m)}_{12} & c^{(m)}_{13} \\ c^{(m)}_{21} & c^{(m)}_{22} & c^{(m)}_{23} \\ c^{(m)}_{31} & c^{(m)}_{32} & c^{(m)}_{33} \end{vmatrix}, \quad c_{ik} = \int_{-h_1}^{h_2} b_{ik} z^m dz, \quad m = 0, 1, 2, \\ i, k = 1, 2, 3.$$

Элементы матриц $c^{(m)}$ являются функционалами от решения. Матричные уравнения (1.13) позволяют выразить приращения усилий и моментов через приращения деформаций и кривизн срединной поверхности оболочки.

В теории пологих оболочек используется два вида систем разрешающих уравнений: в перемещениях, когда основными неизвестными являются du, dv, dw , и в смешанном виде, записанном относительно функций усилий $d\Phi$ и прогиба dw .

Введя функцию усилий

$$dT_{11} = d\Phi_{yy}, \quad dT_{22} = d\Phi_{xx}, \quad dT_{12} = -d\Phi_{xy},$$

$$d\Phi = \begin{vmatrix} d\Phi_{yy} \\ d\Phi_{xx} \\ -d\Phi_{xy} \end{vmatrix},$$

из матричного уравнения находим вектор приращений деформаций $d\varepsilon$ и вектор dM :

$$d\varepsilon = [c^{(0)}]^{-1} d\Phi - [c^{(0)}]^{-1} \cdot c^{(1)} d\kappa; \\ dM = c^{(1)} [c^{(0)}]^{-1} d\Phi + \{c^{(2)} - c^{(1)} [c^{(0)}]^{-1} c^{(1)}\} d\kappa. \quad (1.14)$$

Используя вариационный принцип Лагранжа и геометрически нелинейную теорию оболочек, запишем систему уравнений равновесия в приращениях

$$\frac{\partial dT_{11}}{\partial x} + \frac{\partial dT_{12}}{\partial y} + f_{1s} = 0, \quad \frac{\partial dT_{22}}{\partial y} + \frac{\partial dT_{12}}{\partial x} + f_{2s} = 0, \\ \frac{\partial^2 dM_{11}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 dM_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 dM_{22}}{\partial y^2} + \frac{dT_{11}}{R_1} + \frac{dT_{22}}{R_2} + T_{11} \frac{\partial^2 dw}{\partial x^2} + \\ + T_{22} \frac{\partial^2 dw}{\partial y^2} + 2T_{12} \frac{\partial^2 dw}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dT_{11} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dT_{22} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dT_{12} + dp + f_{3s} = 0, \quad (1.15)$$

где R_1, R_2 — радиусы кривизны оболочки; $d\omega$ — приращение прогиба; f_{1s}, f_{2s}, f_{3s} — невязки уравнений равновесия на шаге s по параметру прослеживания равновесных состояний; dp — приращение параметра нагрузки.

Уравнения (1.10), (1.13), (1.15) образуют разрешающую систему в перемещениях, в которой неизвестными функциями являются $du, dv, d\omega$.

Из вариационного принципа получаем разрешающую систему уравнений в смешанном виде в приращениях:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 d\epsilon_1}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 d\epsilon_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 d\epsilon_2}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 d\omega}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 d\omega}{\partial x^2} - \\ & - 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x y} \frac{\partial^2 d\omega}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 d\omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \frac{\partial^2 d\omega}{\partial x^2} + f_{1s} = 0, \\ & \frac{\partial^2 dM_{11}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 dM_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 dM_{22}}{\partial y^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 d\Phi}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 d\Phi}{\partial x^2} + \\ & + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 d\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 d\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \frac{\partial^2 d\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 d\omega}{\partial y^2} - \\ & - 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 d\Phi}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 d\omega}{\partial x \partial y} + dp + f_{2s} = 0. \quad (1.16) \end{aligned}$$

Уравнения (1.10), (1.14) дополняют систему (1.16).

Таким образом, получены две системы разрешающих уравнений: в перемещениях и в смешанной форме, которые позволяют по единому алгоритму исследовать нелинейное поведение гибких пластин и оболочек на основе теории пластического течения, деформационной и теории двухзвенных процессов. Каждая из систем разрешающих уравнений дополняется граничными условиями.

2. Ввиду дифференциальной связи между напряжениями и деформациями в теориях пластического течения, двухзвенных процессов для исследования деформирования гибких оболочек необходимо использование шаговых методов. Эти методы позволяют последовательно прослеживать историю нагружения.

Исходная система нелинейных уравнений линеаризуется на шаге по параметру нагружения. В результате приходим к линейной относительно приращений системе, коэффициенты которой определяются по решению, найденному на предыдущем шаге. На каждом шаге эти коэффициенты пересчитываются вновь. Интервал изменения параметра нагружения разбивается на ряд малых шагов.

Обозначим через Γ вектор искомых функций:

$$\bar{\Gamma} = (u, v, \omega, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_{12}, T_{11}, T_{22}, T_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}).$$

Определив искомые функции Γ_s на s -ом шаге при $t=t_s$, представим их на $s+1$ для $v_s + \Delta t_s$ в виде

$$\bar{\Gamma}_{s+1} = \bar{\Gamma}_s + d\bar{\Gamma}_s,$$

где $d\bar{\Gamma}_s$ — искомые приращения функции $\bar{\Gamma}$ на шаге Δt_s по «времени».

Для решения задачи необходимо задать начальные условия: значение функции $\bar{\Gamma}$ при $t=0$. Таким образом, имеем начально-краевую задачу.

Для решения этой задачи применялись метод конечных разностей или вариационные методы. От системы дифференциальных уравнений

(1.10), (1.13), (1.15) переходим к системе алгебраических уравнений, которая в операторной форме имеет вид

$$\begin{aligned}\Phi'(y_s)\Delta y_s + L'(y_s)\Delta y_s &= \Delta p_s - [A(y_s) - p_s], \\ y_{s+1} &= y_s + \Delta y_s,\end{aligned}\quad (2.1)$$

где $\Phi'(y_s)$ — упругопластический оператор теории оболочек переменной жесткости, $L'(y_s)$ — оператор, связанный с геометрической нелинейностью.

Обозначим $r_s = A(y_s) - p_s$, где r_s — невязка при $p = p_s$. Для оболочек из упругого материала оператор $\Phi'(y_s)$ — линейный: $\Phi'_{\text{л}} = \Phi'(y_s)$. При $r_s = 0$ имеем метод приращений [17], при $r_s = A(y_s) - p_s$ (2.1) определяет самокорректирующий метод [18]. При $r_s = A(y_s^k) - p_s$ имеем модифицированный метод Ньютона—Канторовича, в котором операторы $\Phi'(y_s)$, $L'(y_s)$ в процессе k итераций на этапе $s+1$ не меняются. Эти операторы пересчитываются один раз на каждом этапе нагружения s .

Эффективность алгоритма в значительной степени зависит от метода решения линейаризованной системы (2.1). Учитывая, что упругопластический оператор $\Phi'(y_s)$ имеет громоздкий вид, целесообразно (2.1) решать итерационным методом.

Итерационный процесс строится в виде

$$B \frac{\Delta y_s^{n+1} - \Delta y_s^n}{\gamma} + [\Phi'(y_s) + L'(y_s)]\Delta y_s^n = \Delta p - r_s^{(k)}. \quad (2.2)$$

Сходимость процесса (2.2) определяется выбором оператора B и итерационного параметра γ .

Легко заметить, что в случае

$$B = \Phi'(y_s) + L'(y_s)$$

решение (2.2) находится за одну итерацию при $\gamma = 1$. Из этого следует, что высокая эффективность метода обеспечивается «близостью» B к $\Phi'(y_s) + L'(y_s)$. Алгоритм реализован для двух типов оператора: $B = \Phi'_{\text{л}}$ — линейный оператор теории пологих оболочек и $B = \Phi'_{\text{л}} + L'(y_s)$.

Исследование упругопластического деформирования оболочек связано со значительными трудностями, которые, в основном, возникают вследствие того, что практически задачи являются трехмерными. Необходимо, введя пространственную сетку, в каждом ее узле проследить развитие упругопластического процесса. На различных этапах деформирования в узле может реализоваться процесс активного нагружения, разгрузки вторичных пластических деформаций, повторного нагружения. Для определения приращений усилий и моментов необходимо на каждом шаге по параметру нагружения проводить численное интегрирование по толщине оболочки.

Для решения нелинейных задач теории оболочек при совместном учете двух нелинейностей: физической (нелинейно-упругие деформации, деформации пластичности) и геометрической (большие перемещения), используется метод конечных разностей. Применение этого метода к нелинейным задачам теории оболочек при учете различных осложняющих факторов (переменность толщины, кривизны, неоднородность материала, нагружение по малой площадке) часто приводит к большим системам разностных уравнений. Решение таких систем представляет значительные трудности. Преодоление их возможно путем применения современных методов вычислительной математики и мощных ЭВМ.

Для решения нелинейных систем разностных уравнений разработаны три алгоритма: первый алгоритм основан на использовании двухступенчатого метода [4—6], второй — на сочетании метода общей итерации М. С. Корнишина с другими методами [7, 8], третий — на сочетании методов приращений с двухступенчатым методом [9, 13]. В двухступенчатом итерационном методе используется метод переменных направлений в коммутативном случае в качестве внутреннего итерационного процесса. Каждому из этих алгоритмов соответствует несколько программ для ЭВМ. Так, второй алгоритм реализуется в четырех различных программах в зависимости от того сочетания методов, которое используется. Построены численные реализации различных модификаций двухступенчатого метода.

Разработанные алгоритмы и созданные программы позволили производить расчет напряженного и деформированного состояния пластинок и оболочек при различных граничных условиях и нагружениях с высокой точностью. Во многих случаях решались нелинейные системы с числом неизвестных порядка 2000, а нелинейности носили довольно существенный характер, приводя к значениям максимального прогиба порядка четырех—пяти толщин оболочки.

Решение нелинейных систем проводилось для ряда возрастающих значений параметра нагружения. При этом для построения нулевых приближений при определенном значении параметра нагружения использовалась экстраполяция.

Рассмотрим применение двухступенчатого метода для решения геометрически нелинейной системы уравнений, представленных в разностном виде. Системы разностных уравнений после исключения неизвестных в контурных и законтурных точках можно записать в операторном виде

$$L_h \bar{u}_h = \bar{f}_h, \quad (2.3)$$

где для системы в перемещениях $\bar{u}_h \equiv \{\bar{u}_i, \bar{x}_i \in \Omega_h\}$ — вектор размерности $3N_h$, $(\bar{u}_i \equiv (u_i, v_i, w_i))$; N_h — число точек в сеточной области Ω_h ; $L_h = L_{1h} + L_{2h}$ — квадратная матрица размерности $3N_h$; L_{1h} — разностный аналог упругого оператора; L_{2h} — разностный аналог оператора геометрической нелинейности; $\bar{f}_h$ — известный вектор.

На линейном пространстве H функций, определенных на Ω_h , введем скалярное произведение

$$(u, v)_h = h_1, h_2 \sum_{\bar{x}_i \in \Omega_h} (\bar{x}_i) v(\bar{x}_i).$$

Основным гильбертовым пространством H_h будет служить пространство сеточных векторов-функций $\bar{u}_h = \bar{u}$, определенных на Ω_h , со скалярным произведением

$$\bar{u} = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix} \quad (\bar{u}, \bar{u}) = \sum_{r=1}^3 (u_r, u_r')_h, \quad \bar{H}_h = H_h \times H_h \times H_h.$$

Введем в рассмотрение оператор

$$\Lambda_h \equiv \begin{bmatrix} \Lambda_{1,h} & & \\ & \Lambda_{2,h} & \\ & & \Lambda_{3,h} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -\lambda^2 \Delta_1 - \theta_1 \Delta_2 & & \\ & -\theta_1 \lambda^2 - \Delta_2 & \\ & & \lambda^4 \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + ME \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

где λ — параметр удлиненности оболочки; $\vartheta_1 = \frac{1-\vartheta_0}{2}$, ϑ_0 — коэффициент Пуассона; $\Delta^2_1, \Delta_2, \Delta^2_1, \Delta^2_2$ — разностные аналоги дифференциальных операторов $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$, $M = 0,75[k_1 \lambda^2 (k_1 \lambda^2 + k_2 \vartheta_0) + k_2 (k_2 + k_1 \lambda^2 \vartheta_0)]$ с соответствующими граничными условиями

$$\Lambda_{3,h} = \Lambda_{3,y} + \Lambda_{3,x}; \quad \Lambda_{3,x} = \lambda^4 \Delta^2_1 + \frac{ME}{2}, \quad \Lambda_{3,y} = \Delta^2_2 + \frac{ME}{2}.$$

Оператор Λ_n является самосопряженным и положительно определенным.

Двухступенчатый итерационный метод решения системы (2.3) имеет вид

$$B_h(\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^n_h) = -\gamma_h(L_h \bar{u}^n_h - \bar{f}_h), \quad (2.5)$$

$$B_h \bar{u} \equiv \begin{bmatrix} B_1 & & \\ & B_2 & \\ & & B_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} B_1 &= \Lambda_1(E - T_{m1})^{-1}, \\ B_2 &= \Lambda_2(E - T_{m2})^{-1}, \\ B_3 &= \Lambda_3(E - T_{m3})^{-1}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где E — тождественный оператор в пространстве H_h , T_{mk} — оператор сокращения погрешности за m_k итераций в методе переменных направлений при решении уравнения

$$\Lambda_{k,h} z_k = g_k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (2.7)$$

Алгоритм реализации метода (2.5) следующий:

1) по известному $\bar{u}^n_h$ вычисляется

$$g = -\gamma_h(L_h \bar{u}^n_h - \bar{f}) \equiv (g_1, g_2, g_3);$$

2) для решения системы (2.7), распадающейся на три отдельные системы относительно u^{n+1} , v^{n+1} , w^{n+1} , применяется метод переменных направлений с начальными приближениями, равными нулю;

3) m_k -ные итерации в методе переменных направлений совпадают с $u_k^{n+1} - u^n_k$, $k = 1, 2, 3$. Метод переменных направлений брался в форме

$$\begin{aligned} (E + \tau^{(1)}_{k,s} \Lambda^{(1)}_{k,h}) (E + \tau^{(2)}_{k,s} \Lambda^{(2)}_{k,h}) \frac{z_k^{s+1} - z_k^s}{\tau_{k,s}^{(1)} + \tau_{k,s}^{(2)}} = \\ = -(\Lambda_{k,h} z_k^s - g_k), \quad k = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где S — номер внутренней итерации, $\tau^{(1)}_{k,s}$, $\tau^{(2)}_{k,s}$ — оптимальные параметры Вакспреса [19], вычисляемые исходя из границ спектров операторов $\Lambda^{(1)}_{k,h}$ и $\Lambda^{(2)}_{k,h}$,

$$\Lambda_{k,h} = \Lambda^{(1)}_{k,h} + \Lambda^{(2)}_{k,h},$$

где $\Lambda^{(1)}_{k,h}$ и $\Lambda^{(2)}_{k,h}$ — одномерные разностные операторы, действующие по X и Y соответственно. Спектр одномерных разностных операторов $\Lambda^{(1)}_{k,h}$ и $\Lambda^{(2)}_{k,h}$ принадлежит отрезкам $[\underline{\lambda}_{(1)k}, \bar{\lambda}_{(2)k}]$, $[\lambda^{(2)}_k, \bar{\lambda}^{(2)}_k]$, где

$$\underline{\lambda}^{(1)}_1 = \frac{4\lambda^2}{h_1^2} \sin^2 \frac{\pi}{2N_1}, \quad \bar{\lambda}^{(1)}_1 = \frac{4\lambda^2}{h_1^2} \cos^2 \frac{\pi}{2N_1}, \quad \underline{\lambda}^{(2)}_1 = \frac{4v_1}{h_2^2} \sin^2 \frac{\pi}{2N_2},$$

$$\lambda^{(2)}_1 = \frac{4v_1}{h_2^2} \cos^2 \frac{\pi}{2N_2}, \quad \underline{\lambda}^{(1)}_2 = \frac{4v_1 \lambda^2}{h_1^2} \sin^2 \frac{\pi}{2N_1}, \quad \bar{\lambda}^{(2)}_1 = \frac{4v_1 \lambda^2}{h_1^2} \cos^2 \frac{\pi}{2N_1},$$

$$\underline{\lambda}^{(2)}_2 = \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{\pi}{2N_2}, \quad \bar{\lambda}^{(2)}_2 = \frac{4}{n^2} \cos^2 \frac{\pi}{2N_2},$$

$$\lambda^{(1)}_3 = \lambda^4 \underline{\lambda}(\Delta^2_1) + 0,5M, \quad \bar{\lambda}^{(1)}_3 = \lambda^4 \bar{\lambda}(\Delta^2_1) + 0,5M,$$

$$\lambda^{(2)}_3 = \lambda(\Delta^2_2) + 0,5M, \quad \lambda^{(2)}_3 = \bar{\lambda}(\Delta^2_2) + 0,5M.$$

Здесь $\underline{\lambda}(\Delta^2_k)$ и $\bar{\lambda}(\Delta^2_k)$ — наименьшее и наибольшее собственное число оператора при соответствующих граничных условиях, определяемые отдельно с помощью подпрограмм. Обычно принималось $m_1 = m_2 = 4$, исходя из того, что такое число внутренних итераций подсказывалось опытом решения линейных задач, а параметр γ_n брался постоянным и находился экспериментально, поскольку теоретические константы, связанные с условием монотонности и условием Липшица для L_h , также были неизвестны.

В теорию расчета оболочек впервые введен итерационный метод Федоренко [3], который использовался в сочетании с другими методами для решения нелинейных задач. Рассмотрим алгоритм реализации метода на примере решения краевой задачи для бигармонического уравнения. Систему разностных уравнений запишем в операторном виде

$$\Delta \Delta w = f. \quad (2.9)$$

При решении (2.9) методом простой итерации

$$w^{q+1} = w^q + \gamma(\Delta \Delta w - f) \quad (2.10)$$

имеем медленно сходящийся процесс, сходимость которого неравномерна на разных гармониках. Так, при $\gamma = \frac{1}{\bar{\lambda}}$, где $\bar{\lambda}$ — наибольшее собственное значение разностного бигармонического оператора, эффективно погашаются высокочастотные составляющие невязки.

$$r^q = \Delta \Delta w^q - f. \quad (2.11)$$

Низкочастотные составляющие невязки r^q при этом убывают незначительно, что существенно замедляет сходимость. Задавшись исходным приближением w^0 , проводим некоторое число простых итераций (2.10) с $\gamma = \alpha h^4$, где α выбирается так, чтобы погасить высокочастотные составляющие невязки. В результате на используемой сетке невязка становится гладкой функцией. Представим решение системы (2.9) в виде

$$w = w^q - \bar{w}, \quad (2.12)$$

где w^q — полученное в процессе итераций приближение, $\bar{w}$ — погрешность.

Используя (2.11), (2.12), получим

$$r^q = \Delta \Delta (w + \bar{w}) - f. \quad (2.13)^*$$

С учетом (2.9) из (2.13)

$$\Delta \Delta_h \bar{w} = r^q, \quad \bar{w}|_{\Gamma} = 0, \quad (2.14)$$

где r^q — известная сеточная функция, Γ — контур пластин.

Задача (2.13) определения поправки $\bar{w}$ проще исходной задачи (2.9), так как известно, что $\bar{w}$ — гладкая функция. Вследствие этого для определения $\bar{w}$ из (2.14) можно приближенно рассматривать такую же задачу на сетке вдвое крупнее, которая при четных N_1 и N_2 (числа разбиений по X , Y) является подсеткой основной сетки:

$$\Delta\Delta_{2h}\bar{W} = R, \quad \bar{W}|_1 = 0, \quad (2.15)$$

где $R=r^?$ в узлах вспомогательной сетки, совпадающих с узлами основной. Найти $\bar{W}$ на сетке с шагом, большим шага основной сетки, легче, так как такая сетка имеет меньше узлов и сходимость итераций на ней лучше. Кроме того, простые итерации на вспомогательной сетке проводим с $\gamma^*=16\gamma$, что ведет к более быстрому погашению низкочастотной составляющей. Решение задачи (2.15) обозначим через $\bar{W}_*$. Используя функцию W_* , линейным интерполированием получаем функцию $\bar{W}$, определенную на основной сетке. Затем исправляем функцию

$$\tilde{w}^3 = w^3 - \bar{w}.$$

Использование вспомогательной сетки позволяет существенно уменьшить низкочастотную составляющую невязки. Однако функция $\tilde{w}^3$ с точки зрения нормы невязки хуже w^3 : $\|\tilde{r}^3\| > \|r^3\|$. Это объясняется внесением при интерполяции погрешности, которая носит негладкий характер, и $\tilde{r}^3$ состоит в основном из негладких собственных функций. Поэтому, проделав несколько итераций (2.10) на исходной сетке, получаем существенное уменьшение невязки. Для ускорения сходимости итерационного процесса целесообразно применение нескольких вспомогательных сеток.

3. При весьма общих предположениях о характере нагружения, граничных условиях, параметрах геометрии проведено исследование упругопластического деформирования гибких пластин и оболочек при использовании различных теорий пластичности [7—11].

По результатам решения краевых задач анализируются распределения напряжений, прогибов, зон пластичности, разгрузки, вторичных пластических деформаций. Для характерных точек пластин и оболочек строятся траектории напряжений и деформаций.

Напряженное и деформированное состояние упругопластических оболочек анализируется в сравнении с гибкими упругими оболочками. Исследуется влияние величины упрочнения в диаграмме деформирования на упругопластическое поведение, а также влияние стрелы подъема оболочки на развитие зон активного нагружения.

Для пластин и оболочек из циклически идеального и циклически разупрочняемого материала изучены особенности упругопластического деформирования при сложных знакопеременных и циклических программах нагружения.

Дается анализ напряженно-деформированного состояния гибких упругопластических слоистых оболочек и пластин. Исследуется влияние жесткости слоев, расположения их относительно срединной поверхности на упругопластическое поведение пластин и оболочек.

Разработан метод решения задач сложного нагружения пластин и оболочек на основе теории двухзвенных процессов А. А. Ильюшина. Построенный алгоритм использует сочетание методов СН—ЭВМ, конечных разностей, самокорректирующего метода приращений и двуступенчатого [10, 11].

На основе теории двухзвенных процессов проведена систематизация экспериментального материала по исследованию свойств связи напряжений и деформаций на двухзвенных траекториях. Анализ материальных функций P , N в зависимости от величины модуля вектора деформации s_0 , угла излома Θ , Δs , проведенный на основе имеющихся в литературе экспериментальных данных деформирования по двухзвен-

ным траекториям для сталей 38ХА, 45, 30ХГСА и сплава Д16-Т, показывает, что для перечисленных материалов функция N почти не зависит от s_0 и Θ , а P существенно зависит от Θ .

На основе экспериментальных данных построены аппроксимации для материальных функций.

Для исследования вычислительных аспектов метода СН—ЭВМ и его сходимости применяются теоретический эксперимент, в котором натурные испытания образцов на СН заменяются расчетами по некоторому частному варианту теории пластичности, который считается истинным. Исследована сходимость метода в зависимости от шага по параметру нагружения, величины касательного модуля, граничных условий закрепления кромок пластин. Установлена особенность сходимости метода, состоящая в том, что на второй итерации (первая итерация — упругое решение) имеет место существенное приближение к пошаговому решению по теории течения.

Методика расчета сложного нагружения пластин и оболочек построена по типу метода СН—ЭВМ в варианте теоретического эксперимента, когда за основу берутся соотношения теории двухзвенных процессов. На первой итерации метода СН—ЭВМ расчет производится по теории пластического течения для всех значений параметра нагружения. По результатам первой итерации вычисляются угол излома траектории Θ , модуль вектора деформаций s_0 в точке излома, определяются значения напряжений, деформаций, перемещений во всех узлах сетки в момент смены характера нагружения. Эти значения используются в качестве начальных условий на второй и последующих итерациях по методу СН—ЭВМ. На каждой итерации СН—ЭВМ материальные функции N , P вычисляются по S_0 , Θ , которые найдены на предыдущей итерации. Для узлов сетки, находящихся в упругой области и перешедших в пластическую при движении по второму звену траектории, фиксируется вектор деформаций $\bar{\epsilon}_1$ в момент выхода в пластичность. Вектор $\bar{\epsilon}_1$ используется для вычисления $\bar{S}_0$, $\bar{\Theta}$; для таких узлов $\Delta s = |\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_1|$.

В качестве примера рассмотрено двухпараметрическое нагружение квадратных защемленных гибких пластины ($\lambda=1$, $k_1=k_2=0$, $h/b=0,05$) и панели ($\lambda=1$, $k_1=0$, $k_2=10$, $h/b=0,05$). Нагружение осуществляется комбинацией продольной p_1 и поперечной p нагрузок. На первом этапе прикладывается равномерно распределенная по двум противоположным кромкам сжимающая нагрузка p_1 , которая возрастает от $p_1=0$ до $p_1=0,56$. На втором этапе при постоянном значении $p_1=0,56$ действует равномерно распределенная по всей площади поперечная нагрузка, возрастающая до значения интенсивности $p=10,2$ (пластина) или $p=11,7$ (оболочка). В качестве обобщенного параметра нагрузки выбиралась величина

$$p_n = \sqrt{\left(\frac{p}{p_k}\right)^2 + \left(\frac{p_1}{p_{1k}}\right)^2},$$

где для пластин $p_{1k} = 0,56$, $p_k = 10,2$, а для панели $p_{1k} = 0,56$, $p_k = 11,7$. Решение по теории двухзвенных процессов приводит к большим значениям прогибов, чем по теории течения. При $p_n = \sqrt{2}$ разница по прогибам в центре составляет около 11% для пластин и около 30% для оболочки. Для пластин максимальные различия в напряжениях в

зонах активного нагружения по двум теориям пластичности составляет около 12%.

Установлено, что траектории деформаций близки к двухзвенным. Углы излома траекторий деформаций, получаемых по теории двухзвенных процессов, больше соответствующих углов по теории течения.

Зоны больших углов излома $60^\circ \leq \Theta \leq 90^\circ$ примыкают к областям разгрузки на верхней поверхности пластины. Анализ показал, что наибольшее различие в напряжениях по двум теориям пластичности имеет место в зонах больших углов излома траекторий. Для панели решения по теории течения и по теории двухзвенных процессов отличаются в большей степени, чем для пластины. Это можно объяснить тем, что зоны с большими углами излома в панели более обширны. Проведенные расчеты показали, что на второй и третьей итерациях метода СН—ЭВМ углы излома отличаются незначительно.

4. Предложены новые алгоритмы и задачи исследования выпучивания и закритического поведения гибких пластин и оболочек при продольном, поперечном и комбинированном нагружении.

Особенностью задач упругопластической устойчивости является нелинейность докритического состояния, обусловленная учетом больших прогибов и нелинейностью связи между напряжениями и деформациями. Вследствие этого возникают трудности, связанные с тем, что неизвестно основное состояние, при котором впервые возникают смежные формы равновесия.

Учитывая эти особенности, в работе использовали подход, основанный на численном решении исходной нелинейной системы дифференциальных уравнений и построении кривых зависимости нагрузки от характерного перемещения. Такой подход позволяет определить критические нагрузки и исследовать закритическое поведение [12, 13]. При применении этого подхода важно выбрать такой параметр нагружения, который монотонно изменяется на всем режиме критического деформирования. Для пологих оболочек на прямоугольном плане, нагруженных внешним давлением, целесообразно за основной параметр брать прогиб в центре.

Построен алгоритм прохождения предельных точек в задачах выпучивания и исследования закритического поведения гибких упругопластических оболочек.

Предлагается основанный на двухступенчатом методе алгоритм решения задач устойчивости пластин и оболочек. Итерационный алгоритм выгодно отличается от существующих тем, что позволяет находить наименьшее собственное значение без предварительного определения наибольшего.

Рассмотрим алгоритм на примере решения задачи устойчивости прямоугольной пластины со сторонами $2a$, $2b$, толщиной h и безразмерными параметрами

$$x = \frac{\bar{x}}{a}, \quad y = -\frac{\bar{y}}{b}, \quad \lambda = \frac{b}{a}, \quad \omega = \frac{\bar{\omega}}{h}, \quad N_1 = -\frac{\bar{N}_1 b^2}{Eh^3}, \quad N_2 = -\frac{\bar{N}_2 b^2}{Eh^3},$$

$$N_{12} = -\frac{\bar{N}_{12} b^2}{Eh^3}; \quad \lambda_1 = -\frac{\bar{N} b^2}{Eh^3}.$$

Дифференциальное уравнение устойчивости имеет вид

$$\frac{1}{12(1-\nu_0^2)} [\lambda^4 w_{xxxx} + 2\lambda^2 w_{xxyy} + w_{yyyy}] = -\lambda [\lambda^2 n_1 w_{xx} + n_2 w_{yy} + 2\lambda n_{12} w_{xy}], \quad (4.1)$$

где E — модуль упругости,

$$n_1 = \frac{N_1}{\lambda_1}, \quad n_2 = \frac{N_2}{\lambda_1}, \quad n_{12} = \frac{N_{12}}{\lambda_1},$$

по контуру пластины действуют сжимающие силы N_1 , N_2 и сила N_{12} , вызывающая сдвиг. Краевые условия имеют вид

$$\omega|_{\Gamma} = 0, \quad \omega_{n|_{\Gamma_1}} = 0, \quad \omega_{nn|_{\Gamma_1}} = 0, \quad (4.2)$$

где n — направление нормали к Γ , $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. Γ_1 или Γ_2 могут быть тождественно равны нулю.

Систему разностных уравнений после исключения ω_i в контурных и законтурных точках запишем в операторном виде

$$L_h \omega = \lambda_1 M_1 \omega, \quad (4.3)$$

где $L_h = L^*_h > 0$ и $M_h = M^*_h > 0$ положительно определенные и самосопряженные операторы в евклидовом пространстве $H_h = H$,

$$(u, v) + h_1 h_2 \sum u_{i,k} \cdot v_{i,k}.$$

Для любой функции $\omega \neq 0$ определим функционал $\mu(u)$ (отношение Релея):

$$\mu(u) = \frac{(L_h, u, u)}{(M_h, u, u)}$$

и вектор невязки

$$\eta(u) = Lu - \mu(u) \cdot Mu$$

и поставим задачу определения наименьшего собственного значения λ_1 .

Введем в рассмотрение оператор

$$\Lambda_h = D_0 (\lambda^4 \omega_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}} + \omega_{\bar{y}\bar{y}\bar{y}\bar{y}}), \quad D_0 = \frac{1}{12(1-\nu_0^2)}$$

с граничными условиями (4.2).

Двухступенчатый метод решения (4.1) имеет вид

$$B_h(\omega^{n+1} - \omega^n) = -\gamma_n(L_h \omega^n - \mu^n M_h \omega^n), \quad (4.4)$$

где $B_h = \Lambda_h(E - T_m)^{-1}$, E — тождественный оператор, T_m — оператор сокращения погрешности за m итераций в методе переменных направлений при решении уравнения

$$\Lambda_h v = g, \quad (4.5)$$

$$\|T_m\| = q < 1.$$

Оператор B самосопряжен и положителен в H . Λ_h и B_h эквивалентны по спектру с константами эквивалентности $1-q$ и $1+q$. Из этого следует

$$\delta_0(1-q)B_h \leq L_h \leq \delta_1(1+q)B_h,$$

где δ_0, δ_1 — константы эквивалентности операторов Λ_h и L_h :

$$\delta_0 \Lambda_h \leq L_h \leq \delta_1 \Lambda_h.$$

В проведенных расчетах использовалось фиксированное

$$\gamma_n = \gamma = \frac{1}{\delta_1(1+q)}, \quad \delta = 1 + h^2.$$

Алгоритм реализации метода (4.4) следующий:

- 1) задаемся гладкой функцией, удовлетворяющей граничным условиям, и представляем ее в виде сеточной функции $\tilde{w}^{(0)}_{i,k}$;
 2) нормируем эту функцию

$$w_{i,k} = \frac{\tilde{w}_{i,k}^{(0)}}{\|\tilde{w}^{(0)}\|}, \quad \|\tilde{w}^{(n)}\| = \sqrt{\sum_{i,k} (\tilde{w}^{(n)}_{i,k})^2};$$

- 3) вычисляем приближение к собственному значению

$$\mu^{(n)} = \frac{(L_h \tilde{w}^{(n)}, \tilde{w}^{(n)})}{(M_h \tilde{w}^{(n)}, \tilde{w}^{(n)})}, \quad (L_h \tilde{w}^{(n)}, \tilde{w}^{(n)}) = \sum_{i,k} L \tilde{w}^{(n)}_{i,k} \cdot \tilde{w}^{(n)}_{i,k}.$$

Суммирование проводится по всем внутриконтурным узлам сетки;

- 4) по известному $\tilde{w}^{(n)}$ вычисляется

$$g = -\gamma (L_h \tilde{w}^{(n)} - \mu^{(n)} \tilde{w}^{(n)}), \quad \|g\| = \sqrt{h_1 h_2 \sum_{i,k} g^2_{i,k}};$$

- 5) для решения (4.5) применяется метод переменных направлений с начальными приближениями, равными нулю;

- 6) m -ная итерация в методе переменных направлений совпадает с $\tilde{w}^{(n+1)} = \tilde{w}^{(n)}$.

Метод переменных направлений брался в форме

$$(E + \tau^{(1)}_s \Lambda_{1,h}) (E + \tau^{(2)}_s \Lambda_{2,h}) \frac{v^{s+1} - v^s}{\tau^{(1)}_s + \tau^{(2)}_s} = -(\Lambda_h v^s - g),$$

где S — номер внутренней итерации; $\tau^{(1)}_s, \tau^{(2)}_s$ — оптимальные параметры Вакспреса, вычисляемые исходя из границ спектров операторов $\Lambda_{1,h}$ и $\Lambda_{2,h}$;

- 7) вычисляем $\tilde{w}^{(n+1)} = \tilde{w}^{(n)} + v^{(m)}$ и производим сравнение на выход из итерационного цикла $\|g\| \leq \epsilon$.

Если $\|g\| > \epsilon$, то вычисления повторяются начиная с п. 2.

Проведено исследование устойчивости оболочек из нелинейно-упругого материала. Анализируется влияние на значения критических нагрузок, напряжения, прогиб условий закрепления кромок, характера нагружения, параметров геометрии оболочки. Расчет оболочек с разными граничными условиями с учетом и без учета физической нелинейности показал, что степень влияния нелинейности на величину критических нагрузок слабо зависит от условий закрепления кромок.

Анализ показывает, что физическая нелинейность существенно снижает величину критической нагрузки и с увеличением параметра k_2 это влияние заметно увеличивается. Построенные траектории напряжений и деформаций в характерных точках оболочек показали сложность процессов нагружения, имеющих место на критических и закритических режимах деформирования.

Устанавливаются значения параметра кривизны, при которых возникает явление хлопка цилиндрической панели по несимметричной форме при симметричных граничных условиях и симметричном нагружении. Нагрузка хлопка зависит от того, будет ли несимметричная форма потери устойчивости характерной для панели с данными геометрическими параметрами и граничными условиями. Если несимметричная форма потери устойчивости наступает раньше симметричной, то малая несимметрия в нагрузке позволяет обнаружить эту форму потери устойчивости и с некоторой погрешностью найти соответствующую ей величину критической нагрузки. Определены величины критической нагрузки симметричной и несимметричной формы потери устойчивости.

Исследуются устойчивость и закритическое поведение упругих и упругопластических сжатых прямоугольных пластин постоянной и переменной толщины. Проведено сравнение результатов, полученных по деформационной теории пластичности и по теории течения. Анализируется распределение зон пластичности, разгрузки, вторичных пластических деформаций.

Решения по теории течения приводят к большим по сравнению с деформационной теорией значениям критических нагрузок. Пластические деформации приводят к снижению критической нагрузки. Так, учет упругопластических деформаций в защемленных пластинах приводит к уменьшению критических нагрузок при одноосном и двухосном сжатии примерно на 30 и 10% соответственно.

5. Дается математическая формулировка задачи оптимизации пластин и оболочек, излагается постановка задачи минимума веса, равнопрочности и наибольшей жесткости изотропных тонких пластин и пологих оболочек переменной толщины.

Разработаны алгоритмы проектирования оптимальных в смысле равнопрочности, по весу и жесткости пластин и пологих оболочек с учетом конструктивных ограничений.

Впервые дается решение ряда задач оптимизации упругопластических пластин и оболочек в геометрически нелинейной постановке.

Задача оптимального проектирования сводится к задаче нелинейного программирования большой размерности. Многопараметричность и двумерность оптимизируемого объекта порождают ряд трудностей в получении решения.

Процесс оптимизации организуется как поэтапное улучшение начального проекта. При этом на каждом этапе решается нелинейная краевая задача. Эффективность оптимизации в существенной мере зависит от метода и алгоритма решения краевой задачи. Использовался метод конечных разностей в сочетании с методом матричной прогонки и двухступенчатым.

Предлагается алгоритм оптимизации, основанный на использовании интегрального критерия качества, метода штрафных функций и планирования экстремальных экспериментов. В качестве управляющей функции бралась толщина.

Решены новые задачи оптимизации упругопластических прямоугольных в плане пластин и пологих оболочек в геометрически нелинейной постановке. Задачи решены для различных видов нагружения и при разных закреплениях краев оболочки. Показано, что в задачах оптимизации пластин и оболочек по равнопрочности и весу во многих случаях необходимо учитывать геометрическую и физическую нелинейности, т. к. в результате оптимизации прогибы существенно возрастают. Учет упругопластических деформаций позволяет получить дополнительное снижение веса.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: АН СССР, 1963. 272 с.
2. Столяров Н. Н., Рябов А. А. К решению задач изгиба пластин методом Рундсона с чебышевским ускорением // Математическая физика: Межвуз. (межвед.) тематич. сб. трудов. Куйбышев, 1976. С. 89—96.
3. Столяров Н. Н., Геронов Л. В. Решение краевых задач теории пластин релаксационным методом Федеренко // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы IV Всесоюз. конф. Новосибирск: СОАН СССР, 1976. Ч. II. С. 105—113.

4. Дьяконов Е. Г., Столяров Н. Н. О реализации эффективных итерационных методов для разностных статических задач теории пластин и оболочек//Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы V Всесоюз. конф. Новосибирск, 1978. Ч. II. С. 55—75.
5. Дьяконов Е. Г., Столяров Н. Н. Расчет на прочность труб переменной толщины на основе теории пологих оболочек//Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1978. Т. 9. № 6. С. 47—62.
6. Дьяконов Е. Г., Столяров Н. Н. О решении нелинейных статических задач теории пластин и оболочек//Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1979. Т. 10. № 5. С. 39—62.
7. Столяров Н. Н., Неронов Л. В. Большие прогибы упругопластических неоднородных пластин и пологих оболочек переменной жесткости//Тр. семинара по теории оболочек. Казань: КФТИ КФ АН СССР, 1977. Вып. 9. С. 48—56.
8. Столяров Н. Н., Неронов Л. В. Упругопластический изгиб гибких пологих оболочек переменной кривизны и жесткости//Прикладная теория упругости: Межвуз. науч. сб. Саратов: Сарат. политехн. ин-т, 1980. С. 20—27.
9. Столяров Н. Н. Несимметричные задачи упругопластического изгиба пологих оболочек и пластин переменной жесткости//Прочность и устойчивость оболочек: Тр. семинара. Казань: КФТИ КФ АН СССР, 1980. Вып. 13. С. 47—58.
10. Столяров Н. Н., Тарасов А. П. Единообразное представление и аппроксимация экспериментальных данных по связи напряжений и деформаций на двухзвенных траекториях//Прочность и надежность конструкций: Межвуз. сб. науч. тр. Куйбышев, 1981. С. 111—127.
11. Столяров Н. Н., Васин Р. А. Исследование прочности пластин и оболочек на основе метода СН—ЭВМ//Повышение долговечности и надежности машин и приборов: Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. конф. Куйбышев, 1981. С. 348—349.
12. Столяров Н. Н., Пестровский Г. М. Устойчивость и большие прогибы длинных упругопластических панелей переменной жесткости и кривизны//Прикл. механ. Киев, 1980. Т. XVI. Вып. 3. С. 56—59.
13. Столяров Н. Н., Рябов А. А. Устойчивость и закритическое поведение прямоугольных пластин переменной толщины//Исследования по теории оболочек: Тр. семинара. Вып. 15. Казань: КФТИ КФ АН СССР, 1982. С. 135—145.
14. Корнишин М. С., Столяров Н. Н. Об одном алгоритме расчета пластин и оболочек, близких к равнопрочным//Труды семинара по теории оболочек. Казань: КФТИ АН СССР, 1975. Вып. 6. С. 187—195.
15. Корнишин М. С., Александров М. А., Столяров Н. Н. К расчету близких к равнопрочным гибких пластин и пологих оболочек численным методом//Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы IV Всесоюз. конф. Новосибирск: СО АН СССР, 1976. Ч. II. С. 69—76.
16. Столяров Н. Н., Пестровский Г. М. Об одном алгоритме решения задач оптимизации пластин и оболочек//Исследования по теории оболочек: Тр. семинара. Вып. 15. Казань: КФТИ КФ АН СССР, 1982. С. 127—134.
17. Петров В. В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек. Саратов: Сарат. ун-т, 1975. 173 с.
18. Стриклин, Хейслер, Реземанн. Оценка процедур для анализа геометрически нелинейных конструкций с нелинейным поведением материала//Пакет. техн. и космонавтика. 1973. № 3. С. 63—72.
19. Wachspress E. L. Iterative solution of elliptic diffusion equations of reactor physics. New York, 1966. P. 31—42.

УДК 539.4

В. П. РАДЧЕНКО, Е. В. ПАНФЕРОВА

СТРУКТУРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ МЕТАЛЛОВ В ОДНООСНОМ СЛУЧАЕ

С позиций механики микронеоднородных сред при помощи математической структурной модели описана диаграмма упругопластического деформирования, включая участок неустойчивого деформирования. Проанализирована кинетика полей микронапряжений, соответствующих различным характерным точкам диаграммы. Выполнена экспериментальная проверка предложенной методики. Наблюдается хорошее соответствие расчетных и экспериментальных данных.