

С. Н. МИРОНОВА

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ НА ОСНОВАНИИ ЭНДОХРОННОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Предложен один из вариантов эндохронной теории пластичности, не учитывающий поверхность нагружения и описывающий процесс рассеянного накопления поврежденности вплоть до разрушения.

Разработан метод сведения краевой задачи упругопластического деформирования и разрушения к задаче ползучести. В качестве примера применения разработанной модели решена модельная задача упругопластического деформирования и разрушения толстостенной трубы под действием внутреннего давления и осевой нагрузки.

Традиционный подход при построении определяющих соотношений, описывающих упругопластическое деформирование, состоит в введении поверхности пластичности, отделяющей упругую область материала от упругопластической. Однако, при таком подходе нужно считаться с известными трудностями, связанными с тем, что положение поверхности пластичности зависит не только от напряженно-деформированного состояния, но и от истории нагружения. Еще большие трудности приходится испытывать при описании пластических свойств с использованием такого подхода для повышенных температур, где наряду с пластическими деформациями развиваются деформации ползучести. В силу того, что нагружение образца происходит за конечное время, здесь в качестве условной пластической деформации принимают необратимую деформацию, полученную в эксперименте на растяжение с максимально допустимой для данной машины скоростью нагружения. Очевидно, что и поверхности пластичности в этих условиях построить затруднительно.

Поэтому в последнее время развивается направление описания пластических свойств, в котором, во-первых, отказываются от введения поверхности пластичности, т. е. считают, что необратимые деформации пластичности возникают при сколь угодно малых напряжениях. С одной стороны, это не противоречит современным представлениям о том, что элементарные акты пластического деформирования в микрообъемах, особенно в условиях повышенных температур, могут происходить при очень малых напряжениях. С другой стороны, при малых значениях напряжений величина пластической деформации на несколько порядков меньше упругой составляющей и при решении прикладных задач в упругой области (при классическом подходе) она вносит незначительные погрешности.

Во-вторых, вводится предположение, согласно которому пластическая деформация развивается во времени [1—3] аналогично деформации ползучести, но со скоростью на 2—3 порядка выше последней. Данный подход к описанию пластической деформации соответствует так называемым эндохронным теориям пластичности [2, 3], т. е. теориям пластичности с внутренним временем. В частности, в уравнениях, предложенных в [1], в качестве внутреннего времени используется обычное физическое время.

Введенным выше гипотезам можно дать и некоторое экспериментальное обоснование. Так в [4] элементарные акты пластической деформации в образце запаздывали по отношению к приложению нагрузки от 0,4 до нескольких секунд. И хотя это больше связано с

микронеоднородным полем пластической деформации, интегрально это явление можно трактовать как развитие пластических деформаций во времени.

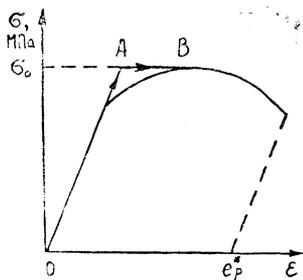


Рис. 1. Схема развития упругопластических деформаций

В связи с изложенным при построении соответствующих соотношений упругопластического деформирования в уравнение вводят физическое время, учитывая при этом, что время развития пластической деформации должно составить незначительную величину, при этом накопленная деформация ползучести за это время должна быть пренебрежимо малой по сравнению с пластической деформацией. Таким образом, схема развития упругопластической деформации в координатах σ — ϵ в режиме мягкого нагружения представляет собой ломаную OAB (рис. 1). При приложении нагрузки материал деформируется упруго (прямая OA), а далее в течение очень

малого времени развивается пластическая деформация (участок AB) до достижения предельного значения, определяемого положением точки B на диаграмме деформирования.

Данный подход к оценке пластической деформации удобен в расчетной практике, поскольку позволяет с единых методологических позиций алгоритмизировать процесс расчета пластических деформаций и деформации ползучести ценой незначительных погрешностей.

Целью настоящей работы являются разработка модели упругопластического деформирования и разрушения металлов на основании обобщения модели, предложенной в [1], и рассмотрение вопроса ее применения к решению краевых задач на примере толстостенной трубы.

1. Отказываясь от поверхности текучести, используемой в [1], в настоящей работе основной вариант имеет вид

$$\begin{aligned} \epsilon &= e + e^P, \quad e = \sigma/E, \\ \dot{e}^P(t) &= \begin{cases} \lambda \cdot [a(\sigma(t))^n - e^P(t)], & a \cdot (\sigma(t))^n > e^P(t), \\ 0, & a(\sigma(t))^n \leq e^P(t), \end{cases} \\ \sigma &= \sigma_0(1 + \psi), \\ \dot{\psi} &= j \cdot \sigma \cdot e^P. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ϵ — полная деформация; e и e^P — упругая и пластическая деформации соответственно; σ и σ_0 — истинное и номинальное напряжения; E — модуль Юнга; a и n — константы материала; γ — параметр материала.

Рассмотрим методику определения параметров пластичности. Необходимой информацией для этой цели является стандартная диаграмма упругопластического деформирования, полученная, например, с постоянной скоростью нагружения, но такой, чтобы за время нагружения накопленная деформация ползучести (p) была незначительной ($p \ll e^P$). Для определения параметров a и n используется начальный участок диаграммы упругопластического деформирования (e^P в зависимости от материала не должна превышать 1—5%). Тогда в силу малости e^P на начальном участке (по сравнению с деформацией разруше-

ния) можно считать, что поврежденность незначительна и $\sigma_0 \sim \sigma$, а коэффициенты a и n степенной аппроксимации

$$e^P = a \cdot \sigma_0^n \quad (2)$$

определяются по методу наименьших квадратов (МНК) [5].

Дальнейшим этапом работы являлся выбор структуры параметра γ , входящего в последнее уравнение (1), на основании экспериментальных данных. Как показано в работе [1] для ряда материалов можно считать $\gamma = \text{const}$. Однако, детальный анализ экспериментальных данных показал, что в общем случае $\gamma = \gamma(e^P)$ и для нее можно использовать степенную аппроксимацию вида

$$\gamma = a1 \cdot (e^P)^{m1}, \quad (3)$$

где $a1$ и $m1$ — константы материала.

Проинтегрировав систему дифференциальных уравнений (1) при $\sigma_0 = \text{const}$, получим:

$$e^P = a (\sigma_0 \cdot \exp \int_0^{e^P} e \cdot \sigma_0 \cdot de^P)^n. \quad (4)$$

Располагая рядом экспериментальных значений (e^P_i, σ^i_0) диаграммы мгновенного упругопластического деформирования и используя для численного интегрирования, например, формулу прямоугольников, из соотношения (4) получим выражение для определения γ_P :

$$\gamma(e^P_i) = \frac{1}{\sigma_0^i (l_i^P - l_{i-1}^P)} \times \ln \left[\frac{(l_i^P/a)^{1/n}}{(l_{i-1}^P/a)^{1/n}} - \frac{\sigma_0^{i-1}}{\sigma_0^i} \right]. \quad (5)$$

Зная дискретную зависимость $\gamma(e^P)$, можно по МНК определить $a1$ и $m1$, входящие в (3).

В качестве критерия разрушения используется соотношение вида

$$\int_0^{l_*^P} \sigma de^P = A^P_*, \quad (6)$$

где A^P_* — работа разрушения, определяемая по диаграмме упругопластического деформирования; e^P_* — величина пластической деформации в момент разрушения; σ — истинное напряжение.

В качестве примера расчета использовались экспериментальные данные для титанового сплава ВТ5 при $T = 20^\circ\text{C}$, взятые из работы [6].

$T, ^\circ\text{C}$	$E, \text{МПа}$	$a, (\text{МПа})^{-n}$	n	$a1, (\text{МПа})^{-m1}$	$m1$	$A^P_*, \text{МДж/м}^3$
20	10^5	$0.163 \cdot 10^{-35}$	12.035	1.153	2,844	104,559

В таблице приведены параметры модели (1) для данного сплава, вычисленные по изложенной выше методике. На рис. 2 представлены экспериментальная (сплошная линия) и расчетная по уравнениям (1) (пунктирная линия) диаграммы упругопластического деформирования. Как видно, наблюдается соответствие расчетных и экспериментальных данных. При этом модель (1) описывает участок неустойчивого деформирования (ниспадающая ветвь диаграммы).

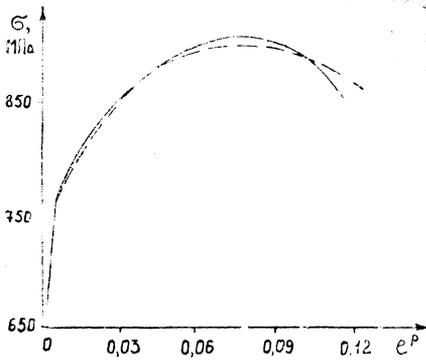


Рис. 2. Экспериментальная (сплошная линия) и расчетная (пунктирная линия) диаграммы упругопластического деформирования сплава ВТ5 при $T=20^\circ\text{C}$

2. Выполним обобщение одноосной модели (1) на случай сложного напряженного состояния (СНС). Для описания кинетики накопления поврежденности в настоящей работе вводится гипотеза, согласно которой скалярный параметр поврежденности в материале пропорционален работе истинных напряжений на пластической деформации. Определяющие соотношения для СНС, получаемые формальным обобщением (1), в главных осях имеют вид

$$\epsilon_{vv} = e_{vv} + e_{vv}^P$$

$$e_{vv} = \frac{1}{E} [(1+\nu) \cdot \sigma_{vv} - \nu \cdot \sigma^0], \quad (\nu=1, 2, 3)$$

$$\sigma_{vv} = \sigma_{vv}^0 (1 + \omega),$$

$$\dot{e}^P = \begin{cases} \lambda [a \cdot (s)^{n-1} \cdot B - e_{vv}^P], & [\dots] B > 0, \\ 0, & [\dots] B \leq 0, \end{cases}$$

$$\omega = \gamma (\sigma_{11} \cdot \dot{e}^P_{11} + \sigma_{22} \cdot \dot{e}^P_{22} + \sigma_{33} \cdot \dot{e}^P_{33}), \quad (7)$$

где ϵ_{vv} — полные деформации; e_{vv} — упругие деформации; e_{vv}^P — пластические деформации; σ_{vv} и σ_{vv}^0 — истинное и номинальное напряжения соответственно; E , ν — упругие константы материала; a , n , γ , λ — параметры; σ^0 — гидростатическое давление (суммирование по индексу ν в (7) не производится).

Величины B_{vv} и s , входящие в (7), имеют вид

$$B_{vv} = \frac{3}{2} \sigma_{vv} - \frac{1}{2} \sigma^0, \quad (8)$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2)^{1/2}. \quad (9)$$

В качестве критерия разрушения предлагается использовать соотношение

$$\int_0^t \sigma_{ij}(t) de^P_{ij} = A^P_*, \quad (10)$$

где A^P_* — критическая величина работы истинных напряжений на пластических деформациях, которая может быть определена в результате одноосного эксперимента. Фактически основной вариант реологических уравнений (7)–(9) есть один из вариантов кинетических уравнений Работнова Ю. Н. [7] с параметром поврежденности энергетического типа для упругопластических сред.

3. С целью апробации разработанной модели упругопластического деформирования и разрушения металлов в данной работе решена задача оценки напряженно-деформированного состояния (НДС) и разрушения толстостенной трубы под действием внутреннего давления и осевой растягивающей силы.

Предположим, что толстостенная труба с внутренним радиусом R_1 и внешним R_2 нагружена внутренним давлением p и осевой силой Q . Индексы для всех переменных соответствуют окружной, радиальной и осевой составляющим (соответственно). При решении задачи использовалась гипотеза плоских сечений:

$$\varepsilon_z(r, z, t) = \varepsilon_0(z, t). \quad (11)$$

Второе уравнение совместности деформаций имеет вид

$$r \frac{d\varepsilon_\Theta}{dr} + \varepsilon_\Theta = \varepsilon_r. \quad (12)$$

Запишем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r &= \sigma_\Theta; \\ 2\pi \cdot \int_{R_1}^{R_2} \sigma_z \cdot r \cdot dr &= Q. \end{aligned} \quad (13)$$

Представим полную деформацию в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_\Theta &= e_\Theta + e_\Theta^P, \\ \varepsilon_r &= e_r + e_r^P, \\ \varepsilon_z &= e_z + e_z^P. \end{aligned} \quad (14)$$

Найдем выражение для компонент напряжений σ_Θ , σ_r , σ_z . Для этого подставим первые два соотношения (14) в (12) и после преобразований получим:

$$r \cdot \frac{de_\Theta}{dr} + e_\Theta - e_r = e_r^P - e_\Theta^P - r \cdot \frac{de_\Theta^P}{dr}. \quad (15)$$

Используя закон Гука

$$e_i = \frac{1}{E} [(1+\nu) \cdot \sigma_i - \nu \cdot J] \quad (i=r, \Theta, z), \quad (16)$$

где J — первый инвариант, находим:

$$e_\Theta - e_r = (1+\nu) / E \cdot (\sigma_\Theta - \sigma_r). \quad (17)$$

Дифференцируя (16) по r при $i=\Theta$ и подставляя полученное в (15), получим:

$$\frac{r}{E} \cdot \left[\frac{d\sigma_\Theta}{dr} - \nu \cdot \left(\frac{d\sigma_z}{dr} + \frac{d\sigma_r}{dr} \right) \right] + e_\Theta - e_r = e_r^P - e_\Theta^P - r \cdot \frac{de_\Theta^P}{dr}. \quad (18)$$

Выразим $\frac{d\sigma_z}{dr}$ через функции σ_Θ и σ_r . Для этого подставим третье соотношение (14) в уравнение (16). Тогда при $i=z$ имеем:

$$\frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu(\sigma_\Theta + \sigma_r)] = \varepsilon_0(z, t) - e_z^P. \quad (19)$$

Дифференцируя полученное по r и выражая $\frac{d\sigma_z}{dr}$, находим:

$$\frac{d\sigma_z}{dr} = -E \cdot \frac{de_z^P}{dr} + \nu \left(\frac{d\sigma_\Theta}{dr} + \frac{d\sigma_r}{dr} \right). \quad (20)$$

Подстановка (17) и (20) в (18) дает

$$\frac{r}{E} \cdot (1-\nu^2) \frac{d\sigma_\theta}{dr} - \frac{r \cdot \nu}{E} (1+\nu) \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{(1+\nu)}{E} (\sigma_\theta - \sigma_r) = g(r, t), \quad (21)$$

$$g(r, t) = e^{p_r} - e^{p_\theta} - r \frac{dl_\theta^p}{dr} - r\nu \frac{dl_z^p}{dr}. \quad (22)$$

Выражая из уравнения (13)

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \sigma_r - \frac{\sigma_r}{r} \quad (23)$$

и подставляя это выражение в (21), получим:

$$\frac{d\sigma_\theta}{dr} + \sigma_\theta - \frac{\sigma_r}{r} = \frac{E \cdot g(r, t)}{(1-\nu^2) \cdot r}. \quad (24)$$

Продифференцируем (23) по r :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + r \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{d\sigma_\theta}{dr} = 0. \quad (25)$$

Подставляя в (24) соотношение, выраженное из (25), получим неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно переменной σ_r :

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + 3 \frac{d\sigma_r}{r dr} = \frac{E \cdot g(r, t)}{(1-\nu^2) \cdot r^2}, \quad (26)$$

где время t входит в σ_r и g как параметр. Граничные условия для (26) имеют вид

$$\sigma_r|_{r=R_1} = -p, \quad \sigma_r|_{r=R_2} = 0. \quad (27)$$

Решение уравнения (26) с граничными условиями (27) имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, t) = & \frac{p(t) \cdot R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left[1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right] + \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[\int_{R_1}^r \frac{g(X, t)}{X} dX - \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \times \right. \\ & \times \int_{R_1}^{R_2} \frac{g(X, t)}{X} \left(1 - \frac{X^2}{R_2^2} \right) dX \left. + \frac{E}{2(1-\nu^2) \cdot r^2} \left[\frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{g(X, t)}{X} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(1 - \frac{X^2}{R_2^2} \right) dX - \int_{R_1}^r g(X, t) X dX \right] \right]. \quad (28) \end{aligned}$$

Выразим σ_θ из (13):

$$\sigma_\theta = r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r. \quad (29)$$

Продифференцировав (28) по r и подставив полученное выражение в (29), находим величину σ_θ :

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(r, t) = & \frac{p(t) R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left[1 + \frac{R_2^2}{r^2} \right] - \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left[\frac{R_1^2}{r^2} + 1 \right] \times \\ & \times \int_{R_1}^{R_2} \frac{g(X, t)}{X} \left[1 - \frac{X^2}{R_2^2} \right] dX + \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{r^2} \int_{R_1}^r g(X, t) X dX + \right. \\ & \left. + \int_{R_1}^r \frac{g(X, t)}{X} dX \right]. \quad (30) \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что первые члены (28), (30) совпадают с упругим решением для толстостенной трубы, так как $g(r, t)|_{t=0} = 0$.

Найдем распределение $\sigma_z(r, t)$.

Представим соотношение (14) в виде

$$\varepsilon_z(r, t) = \varepsilon_0(t) = e_z(r, t) + e^p_z(r, t). \quad (31)$$

Используя закон Гука (16), соотношению (13) можно придать вид

$$\varepsilon_0(t) = \frac{1}{E} \{ \sigma_z(r, t) - \nu [\sigma_\theta(r, t) + \sigma_r(r, t)] \} + e^p_z(r, t). \quad (32)$$

Выразим из (32) σ_z :

$$\sigma_z(r, t) = E \cdot [\varepsilon_0(t) - e^p_z(r, t)] + \nu (\sigma_\theta + \sigma_r). \quad (33)$$

Таким образом, для того, чтобы иметь распределение σ_z , необходимо знать величину $\varepsilon_0(t)$. Для ее нахождения подставим (33) в (13) и разрешим полученное относительно $\varepsilon_0(t)$:

$$\varepsilon_0(t) = \frac{2}{R_2^2 - R_1^2} \left\{ \frac{Q}{2\pi E} + \int_{R_1}^{R_2} \nu^p_z(r, t) r dr - \frac{\nu}{E} \int_{R_1}^{R_2} [\sigma_\theta(r, t) + \sigma_r(r, t)] r dr \right\}. \quad (34)$$

Зная величину $\varepsilon_0(t)$, из (33) определим σ_z . Имея законы распределения для всех компонент напряжений, из (14) находим ε_r и ε_θ :

$$\varepsilon_i(r, t) = 1/E \cdot \{ (1 + \nu) \cdot \sigma_i(r, t) - \nu \cdot J \} + \nu^p_i(r, t). \quad (35)$$

4. Численная реализация расчета НДС толстостенной трубы под действием внутреннего давления и осевой силы осуществлялась аналогично хорошо известному в теории ползучести методу «шагами по времени». При этом сначала рассчитывается упругое решение при $t=0$, а затем — неупругое решение с использованием пошагового метода интегрирования основных дифференциальных уравнений по времени.

В качестве модельного примера была решена задача об упругопластическом деформировании и разрушении толстостенной трубы из титанового сплава ВТ5 при $T=20^\circ\text{C}$ с внутренним радиусом $R_1=20\text{ mm}$ и внешним $R_2=22\text{ mm}$. Параметры модели (7) определялись по результатам одноосных испытаний и их значения приведены в таблице. По результатам расчета на рис. 3 приведена предельная диаграмма разрушения трубы при двухпараметрическом нагружении.

Таким образом, в статье предложен вариант теории пластичности без поверхности текучести, позволяющий ценой незначительных погрешностей свести задачу упругопластического деформирования к задаче ползучести.

На основании предложенной модели решена задача упругопластического деформирования и разрушения трубы не на основе силовых критериев предельного состояния, а на основании уравнений, учитывающих кинетику накопления поврежденности в материале.

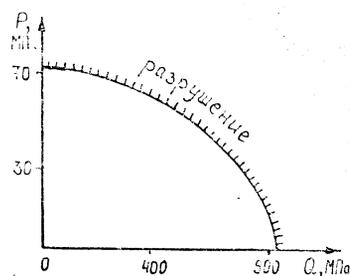


Рис. 3. Диаграмма разрушения толстостенной трубы из сплава ВТ5 при $T=20^\circ\text{C}$ в координатах PQ

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Радченко В. П. Прогнозирование ползучести и длительной прочности материалов на основе энергетического подхода в стохастической постановке//Проблемы прочности, 1992. № 2. С. 34—40.
2. Кадашевич Ю. И., Мосолов А. Б. Эндохронные теории пластичности: основные положения, перспективы развития//Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 161—168.
3. Мосолов А. Б. Эндохронная теория пластичности. М.: Институт проблем механики. АН СССР, 1988. С. 44.
4. Жуков А. М. Ползучесть металлов при комнатной температуре после малой частичной нагрузки. Прочность, пластичность и вязкоупругость материалов и конструкций. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. С. 64—68.
5. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. 576 с.
6. Соснин О. В., Соснин О. О. О термопластичности//Проблемы прочности. 1988. № 12. С. 3—9.
7. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. С. 752.