УДК 620.9

Н.В. Дилигенский

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ВОЗМУЩЕНИЙ В ТЕОРИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Применены методы возмущений в теории производственных функций для решения задачи асимптотической идентификации факторных эластичностей.

Наиболее распространенными конструкциями для описания экономических процессов в макроагрегированных переменных являются производственные функции [1,2]. Далее для определенности рассмотрим производственные функции, зависящие от двух ресурсов, имея в виду, что суть предлагаемого подхода не зависит от числа определяющих параметров.

Введем следующие обозначения. В качестве входных воздействий возьмем основные фонды производства - $K(t)$ и трудовые ресурсы, используемые в производственном процессе, $L(t)$. Выходной величиной будем считать количество производственного продукта $Y(t)$. Тогда под производственной функцией F будем понимать оператор, отвечающий отображению входных воздействий $K(t) \in \hat{K}$ и $L(t) \in \hat{L}$ в выходную величину $Y(t) \in \hat{Y}$:

$$Y = F(K, L). \tag{1}$$

Положим, что функциональными пространствами $\hat{K}$, $\hat{L}$, $\hat{Y}$ и оператором F в (1) могут быть достаточно произвольные конструкции, отвечающие требуемой содержательной интерпретации.

Задачу нахождения производственной функции $Y = F(K, L)$ сформулируем как задачу построения оператора F, когда задана тройка элементов $Y(t)$, $K(t)$, $L(t)$ в соответствующих функциональных пространствах $\hat{K}$, $\hat{L}$, $\hat{Y}$. Далее в качестве функциональных пространств $\hat{K}$, $\hat{L}$, $\hat{Y}$ возьмем пространство C^2 [0,T] гладких дифференцируемых функций времени, имеющих всюду первую и вторую производные. Отображение F будем полагать всюду дифференцируемым по K и L.

Найдем асимптотическое представление, описывающее отображение исходных элементов K, L в Y в окрестности произвольной регулярной точки K^*, L^*, Y^*. Разлагая в окрестности точки $\{K^*, L^*\}$ отображения в двумерный ряд Тейлора по независимым переменным K и L и ограничиваясь двумя первыми членами разложения, запишем следующее представление:

$$F(K^* + \Delta K, L^* + \Delta L) = F(K^*, L^*) + \left.\frac{\partial F}{\partial K}\right|_{\substack{K=K^*\\ L=L^*}} \Delta K + \left.\frac{\partial F}{\partial L}\right|_{\substack{K=K^*\\ L=L^*}} \Delta L + o(\Delta K, \Delta L). \tag{2}$$

В формуле (2) член $o(\Delta K, \Delta L)$ отвечает величинам, асимптотически малым относительно $\Delta K, \Delta L \to 0$. Вводя в (2) обозначение $\Delta Y = F(K^* + \Delta K, L^* + \Delta L) - F(K^*, L^*)$, опуская для простоты записей символы у частных производных и пренебрегая асимптотическими малыми членами, запишем следующее соотношение:

$$\Delta Y \cong \frac{\partial F}{\partial K}\Delta K + \frac{\partial F}{\partial L}\Delta L; \qquad \Delta K, \Delta L \to 0. \tag{3}$$

Асимптотическое представление (3) далее будем полагать приближенным описанием отображения F в приращениях $\Delta K, \Delta L, \Delta Y$.

Осуществляя в (3) преобразование к относительным переменным путем деления (3) на Y, получим следующее представление:

$$\frac{\Delta Y}{Y} \cong \frac{K}{Y}\frac{\partial F}{\partial K} \times \frac{\Delta K}{K} + \frac{L}{Y}\frac{\partial F}{\partial L} \times \frac{\Delta L}{L}. \tag{4}$$

В формуле (4) коэффициентами пропорциональности между относительными приращениями ресурсов $\Delta K/K$, $\Delta L/L$ и выпуском продукции $\Delta Y/Y$ являются логарифмические функции чувствительности

$$\alpha = \frac{K}{Y}\frac{\partial Y}{\partial K}; \tag{5}$$

$$\beta = \frac{L}{Y}\frac{\partial Y}{\partial L}, \tag{6}$$

имеющие макроэкономический смысл факторных эластичностей выпуска продукции по отношению соответственно к материальным и трудовым ресурсам.

Переходя в (4) к дифференциалам, полагая равенство асимптотически точным при $\Delta Y, \Delta K, \Delta L \to 0$, уравнение (4) для характеристик производственной функции с использованием α и β запишем в виде

$$\frac{Y'}{Y} = \alpha \frac{K'}{K} + \beta \frac{L'}{L}. \tag{7}$$

В формуле (7) величины *Y, K, L* полагаются зависящими от времени, а f' означает $\frac{\partial f}{\partial t}$. При этом при произвольных временных зависимостях *Y(t), K(t), L(t)* величины α и β будут также зависеть от времени.

Для этой ситуации проблема идентификации производственной функции *F* редуцируется к следующей задаче: для заданных временных функций *Y(t), K(t), L(t)* найти эластичности производства $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, обеспечивающие выполнение соотношения (7). При такой формулировке задача отыскания двух неизвестных α и β из одного уравнения (7) не имеет единственного решения, и необходимы дополнительные соотношения, описывающие функциональную связь между характеристиками производственной функции.

Простейшим дополнительным предположением является принятие факторных эластичностей постоянными: $\alpha = const$ и $\beta = const$. При этом уравнение (7) непосредственно интегрируется и решением является широко известная функция Кобба-Дугласа [1,2]

$$Y = \mathrm{A} K^{\alpha} L^{\beta}. \tag{8}$$

При стремлении получить возможную зависимость эластичностей α и β от времени в теории производственных функций обычно применяются дополнительные качественные соображения, вытекающие из макроэкономического анализа изучаемых процессов: слабая замещаемость одного вида ресурса другим, низкая эластичность выпуска по отношению к другому ресурсу и тому подобные ситуации [3]. Такие предположения несут в себе значительную долю субъективности, на стадии постановки формулируются предположения, которые затем обосновываются решениями, получаемыми из этих допущений, и такой подход не дает возможности корректно поставить задачу идентификации в общем виде.

Сформулируем, используя методы теории возмущений, задачу асимптотической идентификации характеристик $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ в модели (7). Введем следующее предположение. Будем считать, что факторные эластичности α и β, характеризующие технологический уровень производства, вообще говоря, изменяются с течением времени. При этом положим, что скорость изменения характеристик α и β существенно меньше, чем скорость изменения величин *K, L, Y*, характеризующих динамику протекания анализируемого реального производственного процесса.

С позиции методов возмущения будем считать, что процессы изменения величин *K, L, Y* протекают в реальном масштабе времени *t*, а характеристики α и β являются функциями медленного времени τ [4,5]. Медленное время τ введем соотношением $\tau = \frac{t}{T}$, где T - характерный масштаб времени, отвечающий срокам реализации технологических изменений производственного процесса. Будем считать $T \gg 1$. Вводя величину, обратную временному масштабу, $\varepsilon = 1/T$, где $\varepsilon \ll 1$, медленное время определим следующим образом:

$$\tau = t\varepsilon, \qquad \varepsilon \to 1. \tag{9}$$

На основе сделанного допущения соотношение (7) в двухмасштабном временном представлении запишем в следующем виде:

$$\bar{Y}'(t) = \alpha(t\varepsilon)\bar{K}'(t) + \beta(t\varepsilon)\bar{L}'(t). \tag{10}$$

В (10) для упрощения записей использовано представление $\bar{f}' = f'/f$. Соотношение (10) определяет функциональную связь искомых технологических характеристик $\alpha(t\varepsilon)$ и $\beta(t\varepsilon)$ с известными временными процессами *Y(t), K(t), L(t)*. Для отыскания двух неизвестных величин α и β соотношение (10) необходимо дополнить новой функциональной связью между характеристиками производственного процесса.

Дополнительное уравнение связи найдем, считая известными вторые производные динамических процессов $\bar{Y}'', \bar{K}'', \bar{L}''$. Выполняя дифференцирование в (10), группируя однопорядковые величины в двухмасштабном временном представлении и ограничиваясь двумя первыми членами асимптотического разложения при $\varepsilon \to 0$, запишем

$$\overline{Y}''(t) = \alpha(t\varepsilon)\overline{K}''(t) + \beta(t\varepsilon)\overline{L}''(t) + \varepsilon(\alpha'(t\varepsilon)\overline{K}'(t) + \beta'(t\varepsilon)\overline{L}'(t)). \tag{11}$$

Выражение (11) отвечает уравнению связи между известными характеристиками $\overline{Y}'', \overline{K}'', \overline{L}''$ и искомыми величинами α и β, в котором присутствуют члены *o(1)* и *o(ε)*. Пренебрегая в (11) при $\varepsilon \to 0$ величинами малости *o(ε)* и полагая при этом равенство асимптотически точным, запишем следующее представление:

$$\overline{Y}''(t) = \alpha(t\varepsilon)\overline{K}''(t) + \beta(t\varepsilon)\overline{L}''(t). \tag{12}$$

Соотношения (10), (12) определяют систему двух уравнений относительно искомых характеристик - факторных эластичностей α и β. Разрешая её, получим следующие соотношения

$$\alpha = \frac{\overline{Y}'\overline{L}'' - \overline{Y}''\overline{L}'}{\overline{K}'\overline{L}'' - \overline{K}''\overline{L}'}, \tag{13}$$

$$\beta = \frac{\overline{K}'\overline{Y}'' - \overline{K}''\overline{Y}'}{\overline{K}'\overline{L}'' - \overline{K}''\overline{L}'}. \tag{14}$$

Выражения (13), (14) являются асимптотическими представлениями для факторных эластичностей α и β. Они справедливы для описания экономических ситуаций, характеризующихся более стабильными показателями технологического уровня производств *α(tε)* и *β(tε)* по отношению к изменению динамических характеристик производственных процессов - *Y(t), K(t), L(t)*.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Иванилов Ю.П., Лотов А.В.* Математические модели в экономике. М.: Наука, 1983.
2. *Петров А.А.* Экономика. Модели. Вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1996.
3. *Воронцова О.В., Иванилов Ю.П., Колдаева Н.Т.* Некоторые вопросы теории и использования производственных функций. М.: ВЦ АН СССР, 1988.
4. *Найфэ А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
5. *Андрианов А.В., Маневич И.В.* Асимптотология: идеи, методы, результаты. М.: Аслан, 1994.