В выражении для действия (38) мы опустили член, содержащий бесконечную константу регуляризации μ (см. формулу (17)), так как он может быть уничтожен добавлением космологического члена $\mu\int d^2\zeta\sqrt{g}$ в исходное струнное действие.

Действие (38) отличается от стандартного струнного действия вторым слагаемым, пропорциональным скалярной кривизне. Из-за этого слагаемого теория не является Лоренц-инвариантной в $D+1$-мерном пространстве-времени. Почти все остальные качественные черты критической струнной теории полностью сохранены здесь. При $D=1$ мы получаем теорию в двухмерном пространстве-времени, которая в настоящее время рассматривается как пробная модель для исследования ряда вопросов в теории струн (см. [10—14], там же имеются более подробные ссылки).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Грин М., Шварц Дж., Виттен Э.* Теория суперструн. М.: Мир, 1990. Т. 1, 2.
2. *Tseytlin A. A.* Int. I. Mod. Phys. 1989. P. 1257. ,
3. *Siegek W.* Introduction to sring field theory. World Scientific. Sinqapore, 1988. 570 p.
4. *Gross D., Miqdal A.* Phys. Rev. Lett. 1990. 64. 127.
5. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
6. *D'Hoker E., Phono D. H.* Rev. Mod. Phys. 1988. 60. P. 917.
7. *Polyacov A. M.* Phys Lett. 19817103 B. P. 207.
8. *David F.* Mod. Phys. Lett., 1988. A3. 1651.
9. *Mavromatos N. E., Miramontes J. L.* Mod. Phys. Lett. 1989. A 4. P. 1847.
10. *Polyacov A.* Mod. Phys. Lett. 1991. A 6. P. 635.
11. *Aref'eva I. Ya., Zubarev A. P.* Mod. Phys. Lett. 1991. A 7. P. 677.
12. *Klebanov I. R., Polyakov A. M.* Mod. Phys. Lett. 1991. A 6. P. 3273.
13. *Witten E.* Nicl. Phys. 1992. B 373. P. 187.
14. *Aref'eva I. Ya., Medvedev P. B., Zubarev A. P.* Interaction of D=2 C=1 discrete states from string field theory. Preprint SMI — 17, 1992.

УДК 535.3; 539.2

А. В. ГОРОХОВ, В. А. МИХАЙЛОВ

СЖАТЫЕ ФЛУКТУАЦИИ ТЕРМОСТАТА И КИНЕТИКА ДВУХУРОВНЕВЫХ АТОМОВ

Рассмотрена кинетика модельной двухуровневой системы, взаимодействующей с термостатом, у которого наряду с белым шумом существуют так называемые «сжатые» флуктуации. Выведены уравнения, описывающие релаксацию N одинаковых двухуровневых атомов в таком «сжатом» термостате. Методом когерентных состояний получено уравнение Фоккера-Планка для ковариантного символа матрицы плотности. Для случая изолированного двухуровневого атома получено точное решение. Показано, что при специальном выборе начальной матрицы плотности, на начальной стадии релаксации, наблюдается интерференциальная картина по углу, которая отсутствует, если термостат не имеет «сжатых» флуктуаций. Это свойство, в принципе, может быть использовано для «тестирования» «сжатия» термостата.

Сжатый свет является одним из наиболее ярких явлений в квантовой электродинамике, не имеющим классического аналога и обещающим исключительно важные применения в оптических системах связи с предельно низким уровнем шума и в детектировании гравитационных волн. Сжатие (см. обзоры [1—3]) предсказано в большом числе квантовомеханических систем, таких как вырожденный параметрический усилитель, кооперативная резонансная флуоресценция, процессы четырехволнового смешивания, лазеры на свободных электронах. Растет число экспериментальных работ, в которых сообщается о наблюдении сжатия.

Необычные свойства сжатого света могут проявиться в особенностях поведения взаимодействующего с ним вещества, поэтому интересно исследовать его влияние на динамику и кинетику точно решаемых квантовых систем (гармонические осцилляторы, спин в магнитном поле, n-уровневые атомы и т. п.).

Так, в недавней работе [4] было теоретически обнаружено, что приготовленная суперпозиция квантовых состояний моды электромагнитного поля достаточно долго сохраняется и с учетом взаимодействия с термостатом при условии, что в термостате наряду с обычным белым шумом существуют и так называемые сжатые флуктуации [5].

Целью данной работы является изучение специфики воздействия «сжатого термостата» на кинетику двухуровневых атомов. Здесь мы уделим основное внимание принципиальным вопросам: выводу кинетического уравнения, описанию его решений и анализу. Возможные оптические следствия рассмотрены нами ранее [6].

Вначале установим вид кинетического уравнения для матрицы плотности некоторой эквидистантной системы. Гамильтониан полной системы зададим в виде

$$\hat{H} = \hat{H}_a + \hat{H}_b + \hat{H}_{int}, \tag{1}$$

где $\hat{H}_a$ — гамильтониан эквидистантной подсистемы, динамикой которой мы будем интересоваться; при этом $[\hat{H}_a, \hat{A}_+] = \Delta E \hat{A}_+$, $[\hat{H}_a, \hat{A}_-] = -\Delta E \hat{A}_-$, ΔE — расстояние между любыми соседними уровнями, а $\hat{A}_+$ операторы переходов между ними; $\hat{H}_b = \sum_j \hbar\omega_j$; $\hat{b}^+_j \hat{b}_j$ — гамильтониан термостата (диссипативной подсистемы, которая моделируется набором большого (в пределе, бесконечного) числа гармонических осцилляторов с частотами $\omega_j \cong \omega_0 = \Delta E/\hbar$);

$$\hat{H}_{int} = \sum_j (f_j \hat{A}_+ \hat{b}_j + \bar{f}_j \hat{A}_- \hat{b}_j^+)$$

— оператор взаимодействия эквидистантной подсистемы и термостата, выбранный в приближении вращающейся волны.

Матрица плотности всей системы удовлетворяет хорошо известному уравнению

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}], \tag{2}$$

формальное решение которого можно найти по теории возмущений, предварительно перейдя в представление взаимодействия ($\hat{H}_0 = \hat{H}_a + \hat{H}_b$). Как и обычно [7—9], считаем, что матрица плотности имеет вид

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_a(t) \cdot \hat{\rho}_B(0), \tag{3}$$

где $\rho_B(0) = \text{const}$ — матрица плотности термостата (приближение необратимости), и после усреднения по состояниям термостата приходим к кинетическому уравнению для редуцированной матрицы плотности $\hat{\rho}_a(t)$.

Как и в [4, 5], будем считать, что в термостате наряду с обычным тепловым шумом, который связан с отличными от нуля корреляторами $<\hat{b}^+_j\hat{b}_j>$ и $<\hat{b}_j\hat{b}^+_j>$ (здесь $<\hat{F}>=Sp_B(\hat{F}\rho_B(0))$), существуют ненулевые сжатые флуктуации $<\hat{b}^+_j\hat{b}^+_j>\neq 0$ и $<\hat{b}_j\hat{b}_j>\neq 0$.

В работах [4, 5] корреляторы $<\hat{b}_j\hat{b}_j>$ и $<\hat{b}^+_j\hat{b}^+_j>$ введены чисто феноменологически, однако их легко рассчитать, задавшись явным видом матрицы плотности $\hat{\rho}_B(0)$. Рассмотрим, например, «фотонную тепловую баню», вакуумный вектор в гильбертовом пространсптве состояний которой является сжатым, и выберем

$$\hat{\rho}_B(0)=\exp[-\hat{H}_B/kT]/Sp\exp[-\hat{H}_B/kT],$$

где

$$\hat{H}_B=\hat{S}^+(\xi)\hat{H}_B\hat{S}(\xi),\quad \hat{S}(\xi)=\Pi\hat{S}(\xi_j),$$

$$\hat{S}(\xi_j)=\exp[(\bar{\xi}_j\hat{b}^2_j-\xi_j\hat{b}_j^{+2})/2]$$

— оператор Столера [1], $\xi_j=r_je^{i\Theta_j}$ — комплексный параметр сжатия в j-той моде.

В этом случае имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&<\hat{b}^+_j(t_1)\hat{b}_l(t_2)>=[(<\nu>+\tfrac{1}{2})\,ch2r_j-\tfrac{1}{2}]\,e^{i\omega_j(t_1-t_2)}\delta_{jl},\\
&<\hat{b}_j(t_1)\hat{b}^+_l(t_2)>=[(<\nu>+\tfrac{1}{2})\,ch2r_j+\tfrac{1}{2}]\,e^{-i\omega_j(t_1-t_2)}\delta_{jl},\\
&<\hat{b}_j(t_1)\hat{b}_l(t_2)>=[(<\nu>+\tfrac{1}{2})\,e^{i\Theta_j}sh2r_j]\,e^{-i\omega_j(t_1+t_2)}\delta_{jl},\\
&<\hat{b}^+_j(t_1),\ \hat{b}^+_l(t_2)>=[(<\nu>+\tfrac{1}{2})\,e^{-i\Theta_j}sh2r_j]\,e^{i\omega_j(t_1+t_2)}\delta_{jl}.
\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Здесь $<\nu>=[\exp(\frac{h\omega_0}{kT})-1]^{-1}$.

Действуя далее как в [7, 8], получаем кинетическое уравнение:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\hat{\rho}_a}{\partial t}=-\frac{\gamma}{2}\{(<n>+\tfrac{1}{2})\,&[2\hat{A}_-\hat{\rho}_a\hat{A}_+-\hat{A}_+\hat{A}_-\hat{\rho}_a-\hat{\rho}_a\hat{A}_+\hat{A}_-]+\\
+<n>[2\hat{A}_+\hat{\rho}_a\hat{A}_--\hat{A}_-\hat{A}_+\hat{\rho}_a-\hat{\rho}_a\hat{A}_-\hat{A}_+]&+s[\hat{A}_+\hat{A}_+\hat{\rho}_a+\hat{\rho}_a\hat{A}_+\hat{A}_+-\\
-2\hat{A}_+\hat{\rho}_a\hat{A}_+]+\bar{s}[\hat{A}_-\hat{A}_-\hat{\rho}_a&+\hat{\rho}_a\hat{A}_-\hat{A}_--2\hat{A}_-\hat{\rho}_a\hat{A}_-]\}.
\end{aligned}\qquad(5)$$

Здесь

$$\gamma=2\pi|f_i|^2g(\omega_j)\,\Big|_{\omega_j=\omega_0},$$

$$<n>=[<\nu>+\tfrac{1}{2})\,ch2r_j-\tfrac{1}{2}]\,\Big|_{\omega_j=\omega_0};\quad \Psi_j=\Theta_j+2argf_j;$$

$$s=[(<\nu>+\tfrac{1}{2})\,e^{i\psi_j}sh2r_j]\,\Big|_{\omega_j=\omega_0}.$$

Если параметры $s=0$ (сжатие отсутствует), то $<n>=<\nu>$ и уравнение (5) переходит в обычное кинетическое уравнение для эквидистантной системы.

Уравнение (5) описывает, например, релаксацию в системе N одинаковых двухуровневых атомов, которые находятся в области с линейными размерами, много меньшими длины волны λ_0 резонансного перехода между уровнями (задача Дике). В этом случае $\hat{A}_-=\hat{J}_-=\sum_{\alpha=1}^{N}\hat{\sigma}_-^{(\alpha)}$; $\hat{A}_+=\hat{J}_+=\sum_{\alpha=1}^{N}\hat{\sigma}_+^{(\alpha)}$; $\hat{J}_\pm$ являются генераторами (приводимого) представления группы $SU(2)$ — группы энергетического спина. При этом полный энергетический спин J сохраняется в процессе релаксации, т. е. состояния с разными J распадаются независимо, каждое со своим характерным временем.

Для описания релаксации в подпространстве с фиксированным значением J $\left(J=\frac{N}{2}, \frac{N}{2}-1, \ldots, 1\right.$ или $\frac{1}{2}$ в зависимости от того, четное или нечетное полное число атомов) используем представление когерентных состояний группы $\mathrm{SU}(2)$ $|z\rangle = (1+z\bar{z})^{-J}$ $(\exp(zJ^{+})|J_1-J\rangle$ (см., например, [10]) и представим матрицу плотности в диагональном виде:

$$\hat{\rho}_a(t) = \frac{2J+1}{\pi}\int \frac{dRez\cdot dImz}{(1+z\bar{z})^2}\cdot P(z,\bar{z};t)|z\rangle\langle z|, \tag{6}$$

где $P(z, \bar{z}, t)$ — контрвариантный символ матрицы плотности.

Подставляя (6) в (5), после некоторых вычислений, аналогичных выполненным в [10], получим, что функция $f(z, \bar{z}; t) = P(z, \bar{z}, t)/(1+z\bar{z})^2$ удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}\gamma\{ \frac{\partial}{\partial z}[(\langle n\rangle+1)(2Jz+\frac{\partial}{\partial z}z^2+\frac{\partial}{\partial \bar{z}}z^2\bar{z}^2)+$$
$$+\langle n\rangle(-2Jz+\frac{\partial}{\partial \bar{z}}+z^2\frac{\partial}{\partial z})+s(\frac{\partial}{\partial z}+2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\bar{z}^2)+$$
$$+\bar{s}z^2\frac{\partial}{\partial z}z^2]+\text{к.с.}\}f. \tag{7}$$

В данной работе мы ограничимся разбором особенностей решения уравнения (7) для $J=\frac{1}{2}$ (изолированный двухуровневый атом). Если J невелико, то эффективным методом отыскания решений является разложение по сферическим функциям

$$f(z,\bar{z},t) = \sum_{L=0}^{2J}\sum_{M=-L}^{L} F_{LM}(t)Y_{LM}(z,\bar{z})\,(1+z\bar{z})^{-2}. \tag{8}$$

Функции $Y_{LM}(z,\bar{z})$ образуют полную и ортонормированную систему функций на $\bar{C}$ по мере $d\mu(z,\bar{z})=dRez\cdot dImz/(1+z\bar{z})^2$ и удовлетворяют уравнениям

$$[(1+z\bar{z})^2\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}+L(L+1)]\,Y_{LM}(z\bar{z})=0,$$

$$(\bar{z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}-z\frac{\partial}{\partial z})\,Y_{LM}(z,\bar{z})=MY_{LM}(z,\bar{z}),$$

которые подстановкой $z=e^{-i\varphi}\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}$ сводятся к уравнениям для обычных сферических функций $Y_{LM}(\vartheta,\varphi)$. Явный вид функций $Y_{LM}(z,\bar{z})$ приведен в [10].

После подстановки формулы (8) в уравнение (7) оно сводится к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $F_{LM}(t)$, условия Коши для которых определяются начальной матрицей плотности $\hat{\rho}_a(0)$.

Ввиду того, что уравнение (7) — эволюционное уравнение (параболического типа), удобно найти его пропагатор $K(z,t|z',t')$. Этому решению соответствует $\hat{\rho}_a(0) = |z'\rangle\langle z'|$, где $|z'\rangle$ — когерентное состояние.

Если произвольной начальной матрице плотности $\hat{\rho}_a(0)$ соответствует контрвариантный символ $P_0(z)$, то матрице $\hat{\rho}_a(t)$ ставится в соответствие символ

$$P(z,t) = \int d\mu(z')K(z,t|z',0)P_0(z'). \tag{9}$$

Для $J = \frac{1}{2}$ пропагатор имеет вид

$$K(z,t|z',0) = \frac{1}{\pi} + Y_{10}(z,\bar{z})\,[\bar{Y}_{10}(z',\bar{z}')e^{-\Gamma t} + \frac{\sqrt{3/\pi}}{2<n>+1}(1-e^{-\Gamma t})] +$$

$$+ e^{-\frac{1}{2}\Gamma t}\{Y_{11}(z,\bar{z})\,[\bar{Y}_{11}(z',\bar{z}')ch(\gamma\cdot|s|\cdot t)+\bar{Y}_{1-1}(z',\bar{z}')\cdot e^{i\psi}sh(\gamma|s|t)] +$$

$$+ Y_{1-1}(z,\bar{z})[\bar{Y}_{1-1}(z',\bar{z}')ch(\gamma|s|t)+\bar{Y}_{11}(z',\bar{z}')\,e^{-i\Psi}sh(\gamma|s|t)]\}, \tag{10}$$

где $\Gamma = (2<n>+1)\gamma$; $e^{-i\psi} = S/|s|$.

Легко проверить, что при $t\to\infty$ (10) приводит к символу «равновесной» матрицы плотности

$$P_{eq}(z,\bar{z}) = \frac{1}{\pi}\,(1 + \frac{3}{2<n>+1}\;\frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}). \tag{11}$$

и если параметр сжатия $s=0$, то $(2<n>+1)^{-1} = th\,(\frac{\Delta E}{2kT})$.

Выберем начальную матрицу плотности в виде чистого состояния $\hat{\rho}_a(0) = |\Phi><\Phi|$,

где $\Phi> = [2(1-I_m<-z_0|z_0>)]^{-\frac{1}{2}}\,(e^{\frac{i\pi}{4}}|z_0>+e^{-\frac{i\pi}{4}}|-z_0>)$ — суперпозиция двух когерентных состояний $|z_0>$ и $|-z_0>$ (аналогия с работой [4]), и введем функцию

$$R(\Theta,\varphi,t) = <\Theta,\varphi|\hat{\rho}(t)|\Theta,\varphi> = \int d\mu(z')P(z't)\,|<z'|\Theta,\varphi>|^2. \tag{12}$$

Здесь $|\Theta,\ \varphi> \equiv |z>$.

Явный вид функции $R(\Theta,\ \varphi,\ t)$ следующий:

$$R(\Theta,\varphi;t) = (1+\mathrm{tg}^2\frac{\Theta}{2})^{-\frac{1}{2}}\{1+(\mathrm{tg}^2\frac{\Theta}{2}-1)[\frac{\mathrm{tg}^2\frac{\Theta_0}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\Theta_0}{2}}\,e^{-\Gamma t} +$$

$$+ \frac{<n>+1}{2<n>+1}(1-e^{-\Gamma t})] + 2\mathrm{tg}\frac{\Theta}{2}\;\mathrm{tg}\frac{\Theta_0}{2}\;e^{-\Gamma}\,[ch|s|\gamma\sin(\varphi_0-\varphi) +$$

$$+ sh(|s|\gamma t)\sin(\varphi_0+\varphi-\Psi)]\}. \tag{13}$$

(При выводе учтено, что $z = e^{-i\varphi}\,\mathrm{tg}\frac{\Theta}{2}$; $z_0 = e^{-i\varphi_0}\,\mathrm{tg}\frac{\Theta_0}{2}$).

Из формулы (13) видно, что при временах $t\sim\Gamma^{-1}$ последние два слагаемых приводят к «интерференционной картине» по углу φ, которая исчезает, если термостат является обычной тепловой баней, т. е. при $s=0$.

Таким образом, кинетика двухуровневого атома в фотонной бане со сжатыми флуктуациями имеет любопытные качественные особенности, которые можно попытаться использовать для «тестирования» сжатия термостата.

Важный случай кооперативной релаксации большого числа двухуровневых атомов при $J \to \infty$, а также учет нестабильности сжатого термостата будут рассмотрены нами отдельно.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда, Российского фонда фундаментальных исследований правительства РФ, грант № J64100.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Walls D. F.* Squeezed States of Light//Nature. 1983. V. 306. P. 141—146.

2. *Смирнов Д. Ф., Трошин А. С.* Новые явления в квантовой оптике: антигруппировка и субпуассоновская статистика фотонов, сжатые состояния//УФН. 1987. С. 233—271.

3. *Боголюбов Н. Н.* (мл), *Козеровски М., Чан Куанг, Шумовский А. С.* Новые эффекты в квантовой электродинамике//ЭЧАЯ. 1988. Т. 19. С. 831—863.

4. *Kennedy T. A. B., Walls D. F.* Squeezed Quantum Fluctuations and Macroscopic Quantum Coherence//Phys. Rev. A. 1988. V. 37. P. 152—157.

5. *Gardiner C. W., Collett M. J.* Input and Output in damped Quantum Systems: Quantum Stochastic differential Equations and Master Equation//Phys. Rev. A. 1985. V. 31. P. 3761—3774.

6. *Горохов А. В., Михайлов В. В.* Кинетика двухуровневых атомов, взаимодействующих со «сжатым» термостатом//Световое эхо и пути его практических применений: Тез. докл. IV Всесоюз. симп. Куйбышев, 1989. С. 59.

7. *Белавин А. А., Зельдович Я. Б., Переломов А. М., Попов В. С.* Релаксация квантовых систем с эквидистантным спектром//ЖЭТФ. 1969. Т. 56. С. 264—274.

8. *Dekker H.* Classical and Quantum Mechanics of the Damped Harmonic Oscillator// Phys. Rept. 1981. V. 80. P. 1—112.

9. *Альперин М. М., Клубис Я. Д., Хижняк А. И.* Введение в физику двухуровневых систем. Киев: Наукова Думка, 1987. 224 с.

10. *Горохов А. В.* Методы теории групп в задачах квантовой физики. Ч. III //Куйбышев: Изд-во КуГУ, 1983. 96 с.

УДК 530. 1

С. М. ПОБЕРЕЗКИН

ОБОБЩЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

Принят только первый постулат Эйнштейна об эквивалентности инерциальных систем отсчета. Полученные преобразования имеют самый общий вид, их множество, целый класс. Найдено и одно из решений — вместо второго постулата о постоянстве скорости света взято линейное правило сложения скоростей. Сделана попытка физически осмыслить этот интересный вариант.

1. Математическая часть. Теория относительности, постоянство скорости света и релятивистская скорость

В математической части работы сделана попытка вывести преобразования, подобные преобразованиям Лоренца, основываясь только на одном первом постулате Эйнштейна [1; 2]: законы, по которым изменяются состояния физических систем, не зависят от того, к которой из двух координатных систем, движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно, эти изменения относятся.

Удается получить преобразования:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x-\alpha_1 vt}{\sqrt{1-\alpha_1\alpha_2}}; \\ t' = \dfrac{t-\alpha_2 x/v}{\sqrt{1-\alpha_1\alpha_2}}; \quad \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{v^2}{c^2}, \end{cases}$$