Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 3. С. 427–445
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2003
EDN: UKZLQF

УДК 517.984

Описание спектра одной операторной матрицы четвертого порядка

Т. Х. Расулов, Х. М. Латипов

Бухарский государственный университет,
Узбекистан, 705018, Бухара, ул. Мухаммад Икбол, 11.

Аннотация

Рассматривается операторная матрица четвертого порядка $\mathcal{A}$. Этот оператор соответствует гамильтониану системы с несохраняющимся числом и не более четырех частиц на решетке. Показано, что операторная матрица $\mathcal{A}$ унитарно эквивалентна диагональной матрице, диагональными элементами которой являются опять операторные матрицы четвертого порядка. Описано местоположение существенного спектра оператора $\mathcal{A}$, т. е. выделены двухчастичная, трехчастичная и четырехчастичная ветви существенного спектра оператора $\mathcal{A}$. Установлено, что существенный спектр операторной матрицы $\mathcal{A}$ состоит из объединения отрезков, число которых не больше 14. Построен определитель Фредгольма, такой, что его множество нулей и дискретный спектр операторной матрицы $\mathcal{A}$ совпадают, кроме того, доказано, что число простых собственных значений операторной матрицы $\mathcal{A}$, лежащих вне существенного спектра, не превосходит 16.

Ключевые слова: пространство Фока, операторная матрица, операторы рождения и уничтожения, унитарно эквивалентные операторы, существенный, дискретный и точечный спектры.

Получение: 7 марта 2023 г. / Исправление: 15 сентября 2023 г. / Принятие: 18 сентября 2023 г. / Публикация онлайн: 28 сентября 2023 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

Образец для цитирования
Расулов Т. Х., Латипов Х. М. Описание спектра одной операторной матрицы четвертого порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 3. С. 427–445. EDN: UKZLQF. DOI: 10.14498/vsgtu2003.

Сведения об авторах

Тулкин Хусенович Расулов https://orcid.org/0000-0002-2868-4390
доктор физико-математических наук, профессор; проректор по научной работе и инновациям; e-mail: rth@mail.ru, t.h.rasulov@buxdu.uz

Хакимбой Мирзо угли Латипов https://orcid.org/0000-0002-4806-0155
ассистент; каф. математического анализа; e-mail: h.m.latipov@buxdu.uz

Введение. Многие научно-прикладные проблемы сводятся к изучению спектральных свойств блочно-операторных матриц, элементами которых являются линейные операторы, действующие в банаховых или гильбертовых пространствах [1]. Существенные и дискретные спектры блочно-операторных матриц (в том числе и для одного специального класса — гамильтонианов систем с несохраняющимся ограниченным числом частиц на решетке) широко связаны с актуальными проблемами в физике твердого тела [2], квантовой теории поля [3], статистической физике [4], квантовой механике [5], магнитогидродинамике [6] и др. Поэтому развитие исследования блочно-операторных матриц и гамильтонианов систем с несохраняющимся ограниченным числом частиц является одним из приоритетных направлений.

Достаточно полное изучение спектральных свойств многочастичных операторов Шредингера в евклидовом пространстве проведено в книгах [7, 8]. Центральным результатом, посвященным описанию существенного спектра для системы многих частиц, является теорема Хунцикера–ван Винтера–Жислина (теорема ХВЖ), названная так в честь заслуг Хунцикера [9], ван Винтера [10] и Жислина [11]. Она гласит, что существенный спектр N-частичного непрерывного оператора Шредингера состоит из полуинтервала и наименьший элемент достигается на спектре подгамильтонианов определенного класса. В работе [12] доказана теорема ХВЖ для гамильтониана системы четырех произвольных квантовых частиц с парными потенциалами на решетке.

Доказательство аналогичных результатов в случае дискретных операторов Шредингера, а также результатов, отличающихся от них для гамильтонианов систем с несохраняющимся ограниченным числом частиц на решетке является актуальной задачей. Проблемы описания существенного спектра, определения конечности или бесконечности дискретного спектра таких гамильтонианов изучены многими авторами, см. например [13–18]. В частности, в работах [16, 17] изучены операторные матрицы четвертого порядка и описаны местоположение и структура существенного спектра, а также доказан аналог теоремы ХВЖ.

В настоящей статье рассматривается операторная матрица четвертого порядка $\mathcal{A}$, которая соответствует гамильтониану системы с несохраняющимся числом и не более четырех частиц на решетке. Она связана с моделью «спин–бозон» с не более чем тремя фотонами в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$, т. е. в бозонном фоковском пространстве над $L_2(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}, \mathbb{C}^2)$, изученной в работе [22]. Там выполнен спектральный анализ гамильтониана с помощью теории рассеяния в паре пространств со специально выбранным вложением. В частности, доказаны существование волновых операторов и их асимптотическая полнота. При этом все построения опираются на детальный анализ резольвенты.

1. Постановка задачи. Через $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ обозначим множество всех комплексных, вещественных, целых и натуральных чисел соответственно. Пусть $\mathrm{d} \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{T}^{\mathrm{d}} := (-\pi; \pi]^{\mathrm{d}}$ — d-мерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней. Всюду в работе $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ рассматривается как абелева группа, в которой операции сложения и умножения на вещественное число введены как операции сложения и умножения на вещественное число в $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ по модулю $(2\pi\mathbb{Z})^{\mathrm{d}}$. Например, если

$$a = (\pi/2, \ldots, \pi/2),\ b = (2\pi/3, \ldots, 2\pi/3) \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}},$$

то

$$a+b=(-5\pi/6,\dots,-5\pi/6),\ 6a=(\pi,\dots,\pi)\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}.$$

Пусть $L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^m)$, $m=1,2,3$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^m$ и

$$\mathcal{F}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})):=\mathbb{C}\oplus L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})\oplus L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)\oplus\cdots;$$
$$\mathcal{F}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})):=\mathbb{C}\oplus L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})\oplus L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)\oplus\cdots\oplus L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^m),\quad m=1,2,3;$$
$$\mathcal{H}^{(m)}:=\mathbb{C}^2\otimes\mathcal{F}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})),\quad m=1,2,3.$$

Гильбертово пространство $\mathcal{F}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ называется пространством Фока, а $\mathcal{F}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ — $(m+1)$-частичное обрезанное подпространство пространства Фока.

Норма элемента $F=\{f_0^{(\mathrm{s})},f_1^{(\mathrm{s})},f_2^{(\mathrm{s})},f_3^{(\mathrm{s})},\mathrm{s}=\pm\}\in\mathcal{H}^{(3)}$ задается формулой

$$\|F\|^2=\sum_{\mathrm{s}=\pm}\bigg(|f_0^{(\mathrm{s})}|^2+\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}|f_1^{(\mathrm{s})}(k_1)|^2dk_1+\int_{(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2}|f_2^{(\mathrm{s})}(k_1,k_2)|^2dk_1dk_2+$$
$$+\int_{(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^3}|f_3^{(\mathrm{s})}(k_1,k_2,k_3)|^2dk_1dk_2dk_3\bigg).$$

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{(3)}$ рассмотрим тридиагональную операторную матрицу

$$\mathcal{A}:=\begin{pmatrix}\mathcal{A}_{00}&\mathcal{A}_{01}&0&0\\\mathcal{A}_{01}^*&\mathcal{A}_{11}&\mathcal{A}_{12}&0\\0&\mathcal{A}_{12}^*&\mathcal{A}_{22}&\mathcal{A}_{23}\\0&0&\mathcal{A}_{23}^*&\mathcal{A}_{33}\end{pmatrix}$$

с матричными элементами

$$\mathcal{A}_{00}f_0^{(\mathrm{s})}=\mathrm{s}\varepsilon f_0^{(\mathrm{s})},$$
$$\mathcal{A}_{01}f_1^{(\mathrm{s})}=\alpha\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}v(t)f_1^{(-\mathrm{s})}(t)dt,$$
$$(\mathcal{A}_{11}f_1^{(\mathrm{s})})(k_1)=(\mathrm{s}\varepsilon+w(k_1))f_1^{(\mathrm{s})}(k_1),$$
$$(\mathcal{A}_{12}f_2^{(\mathrm{s})})(k_1)=\alpha\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}v(t)f_2^{(-\mathrm{s})}(k_1,t)dt,$$
$$(\mathcal{A}_{22}f_2^{(\mathrm{s})})(k_1,k_2)=\big(\mathrm{s}\varepsilon+w(k_1)+w(k_2)\big)f_2^{(\mathrm{s})}(k_1,k_2),$$
$$(\mathcal{A}_{23}f_3^{(\mathrm{s})})(k_1,k_2)=\alpha\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}v(t)f_3^{(-\mathrm{s})}(k_1,k_2,t)dt,$$
$$(\mathcal{A}_{33}f_3^{(\mathrm{s})})(k_1,k_2,k_3)=\big(\mathrm{s}\varepsilon+w(k_1)+w(k_2)+w(k_3)\big)f_3^{(\mathrm{s})}(k_1,k_2,k_3).$$

Здесь $\{f_0^{(\mathrm{s})},f_1^{(\mathrm{s})},f_2^{(\mathrm{s})},f_2^{(\mathrm{s})},\mathrm{s}=\pm\}\in\mathcal{H}^{(3)}$; $\mathcal{A}_{ij}^*$ — сопряженный оператор к $\mathcal{A}_{ij}$, $i<j$; функции $v(\,\cdot\,)$, $w(\,\cdot\,)$ являются вещественнозначными и непрерывными на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, причем $\min\limits_{k\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}w(k)=0$; $\alpha>0$ — «параметр взаимодействия». В этих предположениях операторная матрица $\mathcal{A}$ является ограниченной и самосопряженной в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{(3)}$.

Поставим для операторной матрицы $\mathcal{A}$ следующие задачи:

– описать местоположение существенного спектра и доказать, что он состоит из объединения отрезков, которых не более шести;
– определить число и местонахождение собственных значений;
– оценить нижнюю грань существенного спектра.

В последующих разделах статьи мы подробно рассмотрим все эти задачи. Далее под обозначениями $\sigma(\,\cdot\,)$, $\sigma_{\rm ess}(\,\cdot\,)$, $\sigma_{\rm pp}(\,\cdot\,)$ и $\sigma_{\rm disc}(\,\cdot\,)$ понимаются спектр, существенный спектр, точечный спектр и дискретный спектр ограниченного самосопряженного оператора соответственно.

2. Спектральное соотношение для операторной матрицы $\boldsymbol{\mathcal{A}}$. В этом разделе изучение спектра операторной матрицы $\mathcal{A}$ при помощи оператора перестановки сводится к изучению спектра более простых операторных матриц $\mathcal{A}^{(\rm s)}$, ${\rm s}=\pm$. Затем спектр операторной матрицы $\mathcal{A}$ описывается через спектр операторных матриц $\mathcal{A}^{(\rm s)}$, ${\rm s}=\pm$.

Исследуем спектральные свойства операторной матрицы $\mathcal{A}$. С этой целью определим два ограниченных самосопряженных оператора $\mathcal{A}_m$, $m=1,2$, действующих в $\mathcal{H}^{(m)}$, в виде $(m+1)\times(m+1)$ операторных матриц:

$$\mathcal{A}_1 := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{00} & \mathcal{A}_{01} \\ \mathcal{A}_{01}^* & \mathcal{A}_{11} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{00} & \mathcal{A}_{01} & 0 \\ \mathcal{A}_{01}^* & \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ 0 & \mathcal{A}_{12}^* & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим еще три ограниченных самосопряженных оператора $\mathcal{A}_m^{(\rm s)}$, $m = 1,2,3$, ${\rm s}=\pm$, действующих в $\mathcal{F}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^{\rm d}))$, в виде $(m+1)\times(m+1)$ операторных матриц:

$$\mathcal{A}_1^{(\rm s)} := \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}}_{00}^{(\rm s)} & \widehat{\mathcal{A}}_{01} \\ \widehat{\mathcal{A}}_{01}^* & \widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\rm s)} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2^{(\rm s)} := \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}}_{00}^{(\rm s)} & \widehat{\mathcal{A}}_{01} & 0 \\ \widehat{\mathcal{A}}_{01}^* & \widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\rm s)} & \widehat{\mathcal{A}}_{12} \\ 0 & \widehat{\mathcal{A}}_{12}^* & \widehat{\mathcal{A}}_{22}^{(\rm s)} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_3^{(\rm s)} := \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}}_{00}^{(\rm s)} & \widehat{\mathcal{A}}_{01} & 0 & 0 \\ \widehat{\mathcal{A}}_{01}^* & \widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\rm s)} & \widehat{\mathcal{A}}_{12} & 0 \\ 0 & \widehat{\mathcal{A}}_{12}^* & \widehat{\mathcal{A}}_{22}^{(\rm s)} & \widehat{\mathcal{A}}_{23} \\ 0 & 0 & \widehat{\mathcal{A}}_{23}^* & \widehat{\mathcal{A}}_{33}^{(\rm s)} \end{pmatrix}$$

с матричными элементами

$$\widehat{\mathcal{A}}_{00}^{(\rm s)} f_0 = {\rm s}\varepsilon f_0,$$

$$\widehat{\mathcal{A}}_{01} f_1 = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\rm d}} v(t) f_1(t)dt,$$

$$(\widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\rm s)} f_1)(k_1) = (-{\rm s}\varepsilon + w(k_1)) f_1(k_1),$$

$$(\widehat{\mathcal{A}}_{12} f_2)(k_1) = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\rm d}} v(t) f_2(k_1,t)dt,$$

$$(\widehat{\mathcal{A}}_{22}^{(\rm s)} f_2)(k_1,k_2) = \big({\rm s}\varepsilon + w(k_1) + w(k_2)\big) f_2(k_1,k_2),$$

$$(\widehat{\mathcal{A}}_{23} f_3)(k_1,k_2) = \alpha \int_{(\mathbb{T}^{\rm d})^2} v(t) f_3(k_1,k_2,t)dt,$$

$$(\widehat{\mathcal{A}}_{33}^{(\mathrm{s})} f_3)(k_1,k_2,k_3) = \big(-\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) + w(k_2) + w(k_3)\big) f_3(k_1,k_2,k_3);$$

$$(f_0,f_1) \in \mathcal{F}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})), \quad (f_0,f_1,f_2) \in \mathcal{F}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})),$$
$$(f_0,f_1,f_2,f_3) \in \mathcal{F}^{(3)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})).$$

Можно легко проверить, что

$$(\widehat{\mathcal{A}}_{01}^{*} f_0)(k_1) = \alpha v(k_1) f_0, \qquad (\widehat{\mathcal{A}}_{12}^{*} f_1)(k_1,k_2) = \alpha v(k_2) f_1(k_1),$$
$$(\widehat{\mathcal{A}}_{23}^{*} f_2)(k_1,k_2,k_3) = \alpha v(k_3) f_2(k_1,k_2); \quad (f_0,f_1,f_2) \in \mathcal{F}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})).$$

Внедиагональные операторы $\widehat{\mathcal{A}}_{01}$, $\widehat{\mathcal{A}}_{12}$ и $\widehat{\mathcal{A}}_{23}$ называются *операторами уничтожения*, а $\widehat{\mathcal{A}}_{01}^{*}$, $\widehat{\mathcal{A}}_{12}^{*}$ и $\widehat{\mathcal{A}}_{23}^{*}$ называются *операторами рождения* [3].

Далее для сокращения записи всюду предполагается, что $\mathcal{A}_3 := \mathcal{A}$.

Установим связь между спектрами операторных матриц $\mathcal{A}_m$ и $\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})}$, $\mathrm{s}=\pm$.

Лемма 1. *Пусть* $m=1,2,3$. *Между спектрами операторных матриц* $\mathcal{A}_m$ *и* $\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})}$, $\mathrm{s}=\pm$, *справедливо равенство* $\sigma(\mathcal{A}_m) = \sigma(\mathcal{A}_m^{(+)}) \cup \sigma(\mathcal{A}_m^{(-)})$. *Кроме того,*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m^{(+)}) \cup \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m^{(-)}), \quad \sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}_m) = \sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}_m^{(+)}) \cup \sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}_m^{(-)}).$$

Доказательство. Введем три оператора перестановки:

$$\Phi_m : \mathcal{H}^{(m)} \to \mathcal{F}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})) \oplus \mathcal{F}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})), \quad m=1,2,3;$$
$$\Phi_1 : (f_0^{(+)}, f_0^{(-)}, f_1^{(+)}, f_1^{(-)}) \to (f_0^{(+)}, f_1^{(-)}, f_0^{(-)}, f_1^{(+)}),$$
$$\Phi_2 : (f_0^{(+)}, f_0^{(-)}, f_1^{(+)}, f_1^{(-)}, f_2^{(+)}, f_2^{(-)}) \to (f_0^{(+)}, f_1^{(-)}, f_2^{(+)}, f_0^{(-)}, f_1^{(+)}, f_2^{(-)}),$$
$$\Phi_3 : (f_0^{(+)}, f_0^{(-)}, f_1^{(+)}, f_1^{(-)}, f_2^{(+)}, f_2^{(-)}, f_3^{(+)}, f_3^{(-)}) \to$$
$$(f_0^{(+)}, f_1^{(-)}, f_2^{(+)}, f_3^{(-)}, f_0^{(-)}, f_1^{(+)}, f_2^{(-)} f_3^{(+)}).$$

Очевидно, что Φ_m — унитарная операторная матрица и

$$\Phi_m^{-1} : \mathcal{F}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})) \oplus \mathcal{F}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})) \to \mathcal{H}^{(m)}, \quad m=1,2,3;$$
$$\Phi_1^{-1} : (\phi,\phi') \to (\phi_0,\phi_0',\phi_1',\phi_1), \quad \phi=(\phi_0,\phi_1),\ \phi'=(\phi_0',\phi_1') \in \mathcal{F}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}));$$
$$\Phi_2^{-1} : (\varphi,\varphi') \to (\varphi_0,\varphi_0',\varphi_1',\varphi_1,\varphi_2,\varphi_2'),$$
$$\varphi=(\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2),\ \varphi'=(\varphi_0',\varphi_1',\varphi_2') \in \mathcal{F}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}));$$
$$\Phi_3^{-1} : (\psi,\psi') \to (\psi_0,\psi_0',\psi_1',\psi_1,\psi_2,\psi_2',\psi_3',\psi_3),$$
$$\psi=(\psi_0,\psi_1,\psi_2,\psi_3),\ \psi'=(\psi_0',\psi_1',\psi_2',\psi_3') \in \mathcal{F}^{(3)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})).$$

Тогда из определения операторных матриц $\mathcal{A}_m$, $\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})}$ и Φ_m следует, что

$$\Phi_m \mathcal{A}_m \Phi_m^{-1} = \mathrm{diag}\{\mathcal{A}_m^{(+)}, \mathcal{A}_m^{(-)}\}.$$

Полученное равенство означает унитарную эквивалентность операторной матрицы $\mathcal{A}_m$ и диагональной операторной матрицы $\mathrm{diag}\{\mathcal{A}_m^{(+)}, \mathcal{A}_m^{(-)}\}$. Отсюда следует связь между спектрами операторных матриц $\mathcal{A}_m$ и $\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})}$, указанная в лемме. □

Замечание 1. При $m=1,2,3$ часть дискретного спектра $\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})})$ операторной матрицы $\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})}$ может лежать в существенном спектре $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m^{(-\mathrm{s})})$ операторной матрицы $\mathcal{A}_m^{(-\mathrm{s})}$, поэтому имеют место соотношения

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m) \subseteq \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m^{(+)}) \cup \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m^{(-)}), \tag{1}$$

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m) = \{\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m^{(+)}) \cup \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m^{(-)})\} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m). \tag{2}$$

Точнее,

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m) = \bigcup_{\mathrm{s}=\pm} \{\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})}) \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m^{(-\mathrm{s})})\}.$$

Очевидно, что при $m=1,2,3$ и $\mathrm{s}=\pm$ операторная матрица $\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})}$ имеет более простую структуру, чем $\mathcal{A}_m$, поэтому лемма 1 и соотношения (1), (2) дают возможность получить более точную информацию относительно спектра $\mathcal{A}_m$.

3. Описание существенного и дискретного спектров операторной матрицы $\boldsymbol{\mathcal{A}_1}$. Рассмотрим операторную матрицу $\mathcal{A}_{1,0}^{(\mathrm{s})}$, $\mathrm{s}=\pm$, которая действует в $\mathcal{F}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ как

$$\mathcal{A}_{1,0}^{(\mathrm{s})} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\mathrm{s})} \end{pmatrix}.$$

Тогда оператор возмущения $\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})} - \mathcal{A}_{1,0}^{(\mathrm{s})}$ операторной матрицы $\mathcal{A}_{1,0}^{(\mathrm{s})}$ является самосопряженной операторной матрицей ранга 2. Следовательно, из известной теоремы Г. Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр операторной матрицы $\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}$ совпадает с существенным спектром операторной матрицы $\mathcal{A}_{1,0}^{(\mathrm{s})}$. Известно, что

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_{1,0}^{(\mathrm{s})}) = [-\mathrm{s}\varepsilon, -\mathrm{s}\varepsilon + M], \quad M := \max_{k\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w(k).$$

Из последних фактов следует, что

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}) = [-\mathrm{s}\varepsilon, -\mathrm{s}\varepsilon + M].$$

Тогда, используя лемму 1, получаем, что справедливо равенство

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_1) = [-\varepsilon, -\varepsilon + M] \cup [\varepsilon, \varepsilon + M].$$

Подчеркнем, что в непрерывном случае [20–23] существенный спектр соответствующий модели состоит из полуоси $[-\varepsilon, \infty)$. В рассматриваемом случае видно, что существенный спектр операторной матрицы $\mathcal{A}_1$ есть объединение двух отрезков конечной длины, которые не пересекаются, если $\varepsilon > M/2$. Иначе говоря, если $\varepsilon > M/2$, то в существенном спектре операторной матрицы $\mathcal{A}_1$ имеется лакуна $(-\varepsilon + M, \varepsilon)$.

Определим функцию

$$\Omega_1^{(\mathrm{s})}(z) := \mathrm{s}\varepsilon - z - \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{-\mathrm{s}\varepsilon + w(t) - z},$$

регулярную в $\mathbb{C} \setminus [-\mathrm{s}\varepsilon, -\mathrm{s}\varepsilon + M]$.

Функция $\Omega_1^{(\mathrm{s})}(\,\cdot\,)$ называется детерминантом Фредгольма, ассоциированным с операторной матрицей $\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}$.

Связь между собственными значениями операторной матрицы $\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}$ и нулями функции $\Omega_1^{(\mathrm{s})}(\,\cdot\,)$ устанавливается следующей леммой.

Лемма 2 [19]. *Число $z^{(\mathrm{s})} \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})})$ есть собственное значение операторной матрицы $\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}$ тогда и только тогда, когда $\Omega_1^{(\mathrm{s})}(z^{(\mathrm{s})}) = 0$.*

Из леммы 2 вытекает, что

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}) = \big\{ z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}) : \Omega_1^{(\mathrm{s})}(z) = 0 \big\}.$$

Тогда с учетом замечания 1 получаем, что

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_1) = \big\{ z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_1) : \Omega_1^{(+)}(z)\Omega_1^{(-)}(z) = 0 \big\}.$$

Из определения функции $\Omega_1^{(\mathrm{s})}(\,\cdot\,)$ и последнего равенства получим следующее утверждение.

Лемма 3 [19]. *При всех $\alpha > 0$ операторная матрица $\mathcal{A}_1$ имеет не менее одного и не более четырех собственных значений.*

Замечание 2. Собственное значение E_0 операторной матрицы $\mathcal{A}_1$, которое существует при всех $\alpha > 0$, обычно называется основным состоянием. Компоненты соответствующей собственной вектор-функции выглядят так:

$$f_0^{(+)} = 0, \quad f_0^{(-)} = \mathrm{const} \neq 0, \quad f_1^{(+)}(k_1) = -\frac{\alpha v(k_1) f_0^{(-)}}{\varepsilon + w(k_1) - E_0}, \quad f_1^{(-)}(k_1) = 0.$$

Из приведенных в этом разделе рассуждений можно заметить, что существование изолированных собственных значений операторной матрицы $\mathcal{A}_1$ тесно связано с операторными матрицами $\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}$, $\mathrm{s} = \pm$. Причем $\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_1) \neq \emptyset$.

4. Описание спектра операторной матрицы $\boldsymbol{\mathcal{A}_2}$. В этом разделе для операторной матрицы $\mathcal{A}_2$ установлено местоположение существенного спектра и приведена оценка его нижней грани, а также изучено местоположение дискретного спектра.

Хорошо известно, что для $\lambda \in \mathbb{R}$ и $A \subset \mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$\lambda + A = \{\lambda + a : a \in A\}.$$

Обозначим

$$\sigma_1^{(\mathrm{s})} := \bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{ w(k_1) + \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_1^{(-\mathrm{s})}) \}, \quad \Sigma_1^{(\mathrm{s})} := \sigma_1^{(\mathrm{s})} \cup [\mathrm{s}\varepsilon, \mathrm{s}\varepsilon + 2M].$$

Отметив, что
$$\bigcup_{k_1\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}\{w(k_1)+\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_1^{(-\mathrm{s})})\}=[\mathrm{s}\varepsilon,\mathrm{s}\varepsilon+2M],$$
приходим к равенству
$$\bigcup_{k_1\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}\{w(k_1)+\sigma(\mathcal{A}_1^{(-\mathrm{s})})\}=\Sigma_1^{(\mathrm{s})}.$$

Местоположение существенного спектра оператора $\mathcal{A}_2$ описывается следующей теоремой.

Теорема 1. *Существенный спектр оператора* $\mathcal{A}_2$ *совпадает с множеством* $\Sigma_1^{(+)}\cup\Sigma_1^{(-)}$, *т.е.* $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2)=\Sigma_1^{(+)}\cup\Sigma_1^{(-)}$. *Более того, множество* $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2)$ *представляет собой объединение не более чем шести отрезков.*

Доказательство. В силу леммы 1 имеем
$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2)=\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(+)})\cup\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(-)}).$$
Покажем, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})=\Sigma_1^{(\mathrm{s})}$. По определению $\Sigma_1^{(\mathrm{s})}=\sigma_1^{(\mathrm{s})}\cup[\mathrm{s}\varepsilon,\mathrm{s}\varepsilon+2M]$.

Запишем операторную матрицу $\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})}$ в виде суммы двух операторных матриц $\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})}=\mathcal{A}_{2,0}^{(\mathrm{s})}+\mathcal{A}_{2,1}^{(\mathrm{s})}$, где
$$\mathcal{A}_{2,0}^{(\mathrm{s})}:=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\mathrm{s})}&\widehat{\mathcal{A}}_{12}\\0&\widehat{\mathcal{A}}_{12}^{*}&\widehat{\mathcal{A}}_{22}^{(\mathrm{s})}\end{pmatrix},\qquad \mathcal{A}_{2,1}^{(\mathrm{s})}:=\begin{pmatrix}\widehat{\mathcal{A}}_{00}^{(\mathrm{s})}&\widehat{\mathcal{A}}_{01}&0\\\widehat{\mathcal{A}}_{01}^{*}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Видно, что операторная матрица $\mathcal{A}_{2,1}^{(\mathrm{s})}$ есть двумерная самосопряженная операторная матрица. Поэтому $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})=\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_{2,0}^{(\mathrm{s})})$. Точнее, $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})=$ $=\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_{2,3}^{(\mathrm{s})})$, где
$$\mathcal{A}_{2,3}^{(\mathrm{s})}:=\begin{pmatrix}\widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\mathrm{s})}&\widehat{\mathcal{A}}_{12}\\\widehat{\mathcal{A}}_{12}^{*}&\widehat{\mathcal{A}}_{22}^{(\mathrm{s})}\end{pmatrix}.$$

Можно показать, что оператор $\mathcal{A}_{2,3}^{(\mathrm{s})}$ коммутирует с любой операторной матрицей U_φ, действующей в $\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$, по правилу
$$U_\varphi\begin{pmatrix}f_1(k_2)\\f_2(k_1,k_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi(k_1)f_1(k_2)\\\varphi(k_1)f_2(k_1,k_2)\end{pmatrix},\quad \varphi(\,\cdot\,)\in C(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}),\quad f_i\in\mathcal{H}_i,\quad i=1,2,$$
где $C(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ — банахово пространство непрерывных функций, определенных на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$.

Следовательно, из разложения в прямой интеграл пространства $\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$:
$$\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2=\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}\oplus(\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1)dk_1$$

следует, что оператор $\mathcal{A}_{2,3}^{(\mathrm{s})}$ разлагается в прямой интеграл

$$\mathcal{A}_{2,3}^{(\mathrm{s})} = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \oplus (w(k_1)I + \mathcal{A}_1^{(-\mathrm{s})}) dk_1. \tag{3}$$

Из разложения (3) оператора $\mathcal{A}_{2,3}^{(\mathrm{s})}$ в силу теоремы о спектре разложимых операторов [25, теорема XIII.86] вытекает, что

$$\sigma(\mathcal{A}_{2,3}^{(\mathrm{s})}) = \bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1) + \sigma(\mathcal{A}_1^{(-\mathrm{s})})\}.$$

Тогда, учитывая равенства

$$\sigma(\mathcal{A}_1^{(-\mathrm{s})}) = \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_1^{(-\mathrm{s})}) \cup [-\mathrm{s}\varepsilon, -\mathrm{s}\varepsilon + M]$$

и

$$\bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} [-\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1), -\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) + M] = [-\mathrm{s}\varepsilon, -\mathrm{s}\varepsilon + 2M],$$

мы приходим к равенству $\sigma(\mathcal{A}_{2,3}^{(\mathrm{s})}) = \Sigma_1^{(\mathrm{s})}$, т. е. $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})}) = \Sigma_1^{(\mathrm{s})}$.

Теперь осталось доказать, что множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})$ представляет собой объединение не более чем трех отрезков. Так как операторная матрица $\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}$ имеет не более двух простых собственных значений, лежащих вне отрезка $[\mathrm{s}\varepsilon, \mathrm{s}\varepsilon + 2M]$, и функция $w(\,\cdot\,)$ непрерывна на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, то множество $\sigma_1^{(\mathrm{s})}$ состоит из объединения не более чем двух отрезков. Следовательно, множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})$ представляет собой объединение не более чем трех отрезков. Доказательство теоремы 1 завершается применением леммы 1. $\square$

Введем подмножества

$$\sigma_{\mathrm{two}}(\mathcal{A}_2) := \sigma_1^{(+)} \cup \sigma_1^{(-)} \quad \text{и} \quad \sigma_{\mathrm{three}}(\mathcal{A}_2) := [-\varepsilon, -\varepsilon + 2M] \cup [\varepsilon, \varepsilon + 2M]$$

существенного спектра $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2)$ оператора $\mathcal{A}_2$.

Определение 1. Множества $\sigma_{\mathrm{two}}(\mathcal{A}_2)$ и $\sigma_{\mathrm{three}}(\mathcal{A}_2)$ называются соответственно *двухчастичной* и *трехчастичной ветвями существенного спектра оператора* $\mathcal{A}_2$.

В силу определения множества $\sigma_{\mathrm{three}}(\mathcal{A}_2)$ имеет место равенство

$$\min(\sigma_{\mathrm{three}}(\mathcal{A}_2)) = -\varepsilon.$$

Определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus \Sigma^{(\mathrm{s})}$ функцию

$$\Omega_2^{(\mathrm{s})}(z) := \mathrm{s}\varepsilon - z - \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{\Omega_1^{(-\mathrm{s})}(z - w(t))}.$$

Положим $\Omega_2(z) := \Omega_2^{(+)}(z)\Omega_2^{(-)}(z)$.

Связь между собственными значениями оператора $\mathcal{A}_2$ и нулями функции $\Omega_2(\,\cdot\,)$ устанавливается следующей теоремой, в которой также определяется число собственных значений оператора $\mathcal{A}_2$.

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения*:

(а) *если число* $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2)$ *является собственным значением оператора* $\mathcal{A}_2$, *то* $\Omega_2(z)=0$, *и наоборот*;

(б) *число простых собственных значений оператора* $\mathcal{A}_2$ *не больше восьми.*

Доказательство. (а) Предположим, что точка $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_1^{(\mathrm{s})}$ является собственным значением оператора $\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})}$ с соответствующей собственной вектор-функцией $f=(f_0,f_1,f_2) \in \mathcal{F}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$. В этом случае элементы f_0, f_1 и f_2 являются решением системы уравнений

$$
\begin{gathered}
(\mathrm{s}\varepsilon - z)f_0 + \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t)f_1(t)dt = 0;\\
\alpha v(k_1)f_0 + (-\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) - z)f_1(k_1) + \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t)f_2(k_1,t)dt = 0;\\
\alpha v(k_2)f_1(k_1) + (\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) + w(k_2) - z)f_2(k_1,k_2) = 0.
\end{gathered} \tag{4}
$$

Так как $z \notin [\mathrm{s}\varepsilon, \mathrm{s}\varepsilon + 2M]$, из третьего уравнения системы (4) для f_2 имеем

$$
f_2(k_1,k_2) = -\frac{\alpha v(k_2) f_1(k_1)}{\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) + w(k_2) - z}. \tag{5}
$$

Подставляя выражение (5) для f_2 во второе уравнение (4), получим систему уравнений

$$
\begin{gathered}
0 = (z - \mathrm{s}\varepsilon)f_0 - \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t)f_1(t)dt,\\
\Omega_1^{(-\mathrm{s})}(z - w(k_1))f_1(k_1) = -\alpha v(k_1) f_0,
\end{gathered} \tag{6}
$$

которая имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда система уравнений (4) имеет нетривиальное решение.

В силу определения множества $\sigma_1^{(\mathrm{s})}$ для любых $z \notin \sigma_1^{(\mathrm{s})}$ и $k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ имеет место неравенство $\Omega_1^{(-\mathrm{s})}(z - w(k_1)) \neq 0$. Значит, система уравнений (6) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда система уравнений

$$
\begin{gathered}
f_0 = (1 + z - \mathrm{s}\varepsilon)f_0 - \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t)f_1(t)dt,\\
f_1(k_1) = -\frac{\alpha v(k_1) f_0}{\Omega_1^{(-\mathrm{s})}(z - w(k_1))}
\end{gathered}
$$

имеет решение, не равное тождественно нулю, или когда $\Omega_2^{(\mathrm{s})}(z)=0$. Теперь замечание 1 завершает доказательство утверждения (а) теоремы 2.

(б) Так как операторная матрица $\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})}$ является самосопряженной, ее дискретный спектр вещественен. Поэтому исследуем вещественные нули функции $\Omega_2^{(\mathrm{s})}(\,\cdot\,)$. Из определения функции $\Omega_2^{(\mathrm{s})}(\,\cdot\,)$ вытекает, что она регулярна на $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})$. Простые преобразования показывают, что для любого $z \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})$ имеет место равенство

$$
\frac{d}{dz}\Omega_2^{(\mathrm{s})}(z) = -1 - \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(s)}{(\Omega_1^{(-\mathrm{s})}(z - w(s)))^2}\left(1 + \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{(\mathrm{s}\varepsilon + w(s) + w(t) - z)^2}\right)ds.
$$

Очевидно, что $\dfrac{d}{dz}\Omega_2^{(\mathrm{s})}(z) < 0$ при всех $z \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})$. Это и означает, что функция $\Omega_2^{(\mathrm{s})}(\cdot)$ монотонно убывает на $\mathbb{R}\setminus\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})$. В силу теоремы 1 множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})$ состоит из объединения не более чем трех отрезков, поэтому из монотонности функции $\Omega_2^{(\mathrm{s})}(\cdot)$ вытекает, что эта функция может иметь четыре простых нуля в $\mathbb{R}\setminus\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})$. Теперь утверждение (а) теоремы 2 завершает доказательство утверждения (б) этой теоремы. $\square$

Из теоремы 2 следует, что

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})}) = \big\{z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_1^{(\mathrm{s})} : \Omega_2^{(\mathrm{s})}(z) = 0\big\}.$$

Отсюда с учетом замечания 1 получаем, что

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_2) = \big\{z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_1^{(\mathrm{s})} : \Omega_2(z) = 0\big\}.$$

5. Местоположение существенного и дискретного спектров оператора $\boldsymbol{\mathcal{A}_3}$. Обозначим

$$\sigma_2^{(\mathrm{s})} := \bigcup_{k_1\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1)+\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_2^{(-\mathrm{s})})\}\cup \bigcup_{k_1\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1)+\sigma_1^{(\mathrm{s})}\}, \quad \Sigma_2^{(\mathrm{s})} := \sigma_2^{(\mathrm{s})}\cup[\mathrm{s}\varepsilon, \mathrm{s}\varepsilon+3M].$$

Здесь следует отметить, что

$$\bigcup_{k_1\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1) + [\mathrm{s}\varepsilon, \mathrm{s}\varepsilon + 2M]\} = [\mathrm{s}\varepsilon, \mathrm{s}\varepsilon + 3M].$$

Поэтому имеет место равенство

$$\bigcup_{k_1\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1) + \sigma(\mathcal{A}_2^{(-\mathrm{s})})\} = \Sigma_2^{(\mathrm{s})}.$$

Местоположение существенного спектра оператора $\mathcal{A}_3$ описывается следующей теоремой.

Теорема 3. *Существенный спектр оператора $\mathcal{A}_3$ совпадает с множеством $\Sigma_2^{(+)} \cup \Sigma_2^{(-)}$, т.е. $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2) = \Sigma_2^{(+)} \cup \Sigma_2^{(-)}$. Более того, множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3)$ представляет собой объединение не более чем четырнадцати отрезков.*

Доказательство. В силу леммы 1 имеем

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(+)}) \cup \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(-)}).$$

Покажем, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})}) = \Sigma_2^{(\mathrm{s})}$. По определению $\Sigma_2^{(\mathrm{s})} = \sigma_2^{(\mathrm{s})} \cup [\mathrm{s}\varepsilon, \mathrm{s}\varepsilon + 3M]$.

Запишем операторную матрицу $\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})}$ в виде суммы двух операторных матриц: $\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})} = \mathcal{A}_{3,0}^{(\mathrm{s})} + \mathcal{A}_{3,1}^{(\mathrm{s})}$, где

$$\mathcal{A}_{3,0}^{(\mathrm{s})} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathcal{A}}_{12} & 0 \\ 0 & \widehat{\mathcal{A}}_{12}^{*} & \widehat{\mathcal{A}}_{22}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathcal{A}}_{23} \\ 0 & 0 & \widehat{\mathcal{A}}_{23}^{*} & \widehat{\mathcal{A}}_{33}^{(\mathrm{s})} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_{3,1}^{(\mathrm{s})} := \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}}_{00}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathcal{A}}_{01} & 0 & 0 \\ \widehat{\mathcal{A}}_{01}^{*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что $\mathcal{A}_{3,1}^{(\mathrm{s})}$ есть двумерная самосопряженная операторная матрица. Поэтому $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})})=\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_{3,0}^{(\mathrm{s})})$. Точнее, из одномерности пространства $\mathbb{C}$ и построения операторной матрицы $\mathcal{A}_{3,0}^{(\mathrm{s})}$ следует, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})})=\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_{3,3}^{(\mathrm{s})})$, где

$$\mathcal{A}_{3,3}^{(\mathrm{s})}:=\begin{pmatrix}\widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathcal{A}}_{12} & 0\\ \widehat{\mathcal{A}}_{12}^{*} & \widehat{\mathcal{A}}_{22}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathcal{A}}_{23}\\ 0 & \widehat{\mathcal{A}}_{23}^{*} & \widehat{\mathcal{A}}_{33}^{(\mathrm{s})}\end{pmatrix}.$$

Можно показать, что оператор $\mathcal{A}_{3,3}^{(\mathrm{s})}$ коммутирует с любой операторной матрицей V_φ, действующей в $\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2\oplus\mathcal{H}_2$ по правилу

$$V_\varphi\begin{pmatrix}f_1(k_2)\\ f_2(k_1,k_2)\\ f_3(k_1,k_2,k_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi(k_1)f_1(k_2)\\ \varphi(k_1)f_2(k_1,k_2)\\ \varphi(k_1)f_3(k_1,k_2,k_3)\end{pmatrix},\quad \varphi(\cdot)\in C(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}),\quad f_i\in\mathcal{H}_i,\quad i=1,2,3,$$

где $C(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ — банахово пространство непрерывных функций, определенных на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$.

Следовательно, из разложения в прямой интеграл пространства $\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2\oplus\mathcal{H}_3$:

$$\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2\oplus\mathcal{H}_3=\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}\oplus(\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2)dk_1$$

следует, что оператор $\mathcal{A}_{3,3}^{(\mathrm{s})}$ разлагается в прямой интеграл:

$$\mathcal{A}_{3,3}^{(\mathrm{s})}=\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}\oplus(w(k_1)I+\mathcal{A}_2^{(-\mathrm{s})})dk_1. \tag{7}$$

Из разложения (7) оператора $\mathcal{A}_{3,3}^{(\mathrm{s})}$ в силу теоремы о спектре разложимых операторов [25, теорема XIII.86] вытекает, что

$$\sigma(\mathcal{A}_{3,3}^{(\mathrm{s})})=\bigcup_{k_1\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}\{w(k_1)+\sigma(\mathcal{A}_2^{(-\mathrm{s})})\}.$$

Тогда, учитывая равенства

$$\sigma(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})=\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})\cup\sigma_1^{(\mathrm{s})}\cup[\mathrm{s}\varepsilon,\mathrm{s}\varepsilon+2M]$$

и

$$\bigcup_{k_1\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}[\mathrm{s}\varepsilon+w(k_1),\mathrm{s}\varepsilon+w(k_1)+2M]=[\mathrm{s}\varepsilon,\mathrm{s}\varepsilon+3M],$$

мы приходим к равенству $\sigma(\mathcal{A}_{3,3}^{(\mathrm{s})})=\Sigma_2^{(\mathrm{s})}$, т. е. $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})})=\Sigma_2^{(\mathrm{s})}$.

Осталось доказать, что множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})})$ представляет собой объединение не более чем семи отрезков. Так как операторная матрица $\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})}$ имеет не более четырех простых собственных значений, лежащих вне своего существенного спектра, и функция $w(\,\cdot\,)$ является непрерывной на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, множество

$\sigma_2^{(\mathrm{s})}$ состоит из объединения не более чем шести отрезков. Следовательно, множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})})$ представляет собой объединение отрезков, число которых не больше семи. Теперь лемма 1 завершает доказательство теоремы 3. $\square$

Введем подмножества

$$\sigma_{\mathrm{two}}(\mathcal{A}_3) := \bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1) + \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_2^{(-\mathrm{s})})\} \cup \bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1) + \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})\};$$

$$\sigma_{\mathrm{three}}(\mathcal{A}_3) := \bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1) + \sigma_1^{(-\mathrm{s})}\} \cup \bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1) + \sigma_1^{(\mathrm{s})}\};$$

$$\sigma_{\mathrm{four}}(\mathcal{A}_3) := [-\varepsilon, -\varepsilon + 3M] \cup [\varepsilon, \varepsilon + 3M]$$

существенного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_3$.

Определение 2. Множества $\sigma_{\mathrm{two}}(\mathcal{A}_3)$, $\sigma_{\mathrm{three}}(\mathcal{A}_3)$ и $\sigma_{\mathrm{four}}(\mathcal{A}_3)$ называются *двухчастичной*, *трехчастичной* и *четырехчастичной ветвями существенного спектра оператора* $\mathcal{A}_3$ соответственно.

Из определения множества $\sigma_{\mathrm{four}}(\mathcal{A}_3)$ видно, что $\min(\sigma_{\mathrm{four}}(\mathcal{A}_3)) = -\varepsilon$.

Определим регулярную на $\mathbb{C} \setminus \Sigma_2^{(\mathrm{s})}$ функцию

$$\Omega^{(\mathrm{s})}(z) := \mathrm{s}\varepsilon - z - \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{\Omega_2^{(-\mathrm{s})}(z - w(t))}.$$

Положим $\Omega(z) := \Omega^{(+)}(z)\Omega^{(-)}(z)$.

Связь между собственными значениями оператора $\mathcal{A}_3$ и нулями функции $\Omega(\,\cdot\,)$ устанавливается следующей теоремой, в которой также определяется число собственных значений оператора $\mathcal{A}_3$.

Теорема 4. *Справедливы следующие утверждения*:

(а) *если число* $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3)$ *является собственным значением оператора* $\mathcal{A}_3$, *то* $\Omega(z) = 0$, *и наоборот*;

(б) *число простых собственных значений оператора* $\mathcal{A}_3$ *не больше шестнадцати.*

Доказательство. (а) Предположим, что точка $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_2^{(\mathrm{s})}$ является собственным значением оператора $\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})}$ с соответствующей собственной вектор-функцией $f = (f_0, f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{F}^{(3)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$. В этом случае элементы f_0, f_1, f_2 и f_3 являются решением системы уравнений

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{s}\varepsilon - z)f_0 + \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t)f_1(t)dt = 0;\\
&\alpha v(k_1)f_0 + (-\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) - z)f_1(k_1) + \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t)f_2(k_1,t)dt = 0;\\
&\alpha v(k_2)f_1(k_1) + (\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) + w(k_2) - z)f_2(k_1,k_2) + \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t)f_3(k_1,k_2,t)dt = 0;\\
&\alpha v(k_3)f_2(k_1,k_2) + \big(-\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) + w(k_2) + w(k_3) - z\big)f_3(k_1,k_2,k_3) = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Так как $z \notin [-\mathrm{s}\varepsilon, -\mathrm{s}\varepsilon + 3M]$, из четвертого уравнения системы (8) для f_3 имеем

$$f_3(k_1, k_2, k_3) = -\frac{\alpha v(k_3) f_2(k_1, k_2)}{-\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) + w(k_2) + w(k_3) - z}. \qquad (9)$$

Подставляя выражение (9) для f_3 во второе уравнение (8), получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{s}\varepsilon - z) f_0 + \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_1(t) dt = 0;\\
&\alpha v(k_1) f_0 + (-\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) - z) f_1(k_1) + \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_2(k_1, t) dt = 0;\\
&\alpha v(k_2) f_1(k_1) + \Omega_1^{(-\mathrm{s})}(z - w(k_2)) f_2(k_1, k_2) = 0,
\end{aligned} \qquad (10)$$

которая имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда система уравнений (8) имеет нетривиальное решение.

В силу определения множества $\sigma_2^{(\mathrm{s})}$ для любых $z \notin \sigma_2^{(\mathrm{s})}$ и $k_2 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ имеет место неравенство $\Omega_2^{(-\mathrm{s})}(z - w(k_2)) \neq 0$. Значит, система уравнений (10) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{s}\varepsilon - z) f_0 + \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_1(t) dt = 0;\\
&f_1(k_1) = -\frac{\alpha v(k_1) f_0}{\Omega_2^{(-\mathrm{s})}(z - w(k_1))}
\end{aligned}$$

имеет решение, не равное тождественно нулю, или когда $\Omega^{(\mathrm{s})}(z) = 0$. Теперь замечание 1 завершает доказательство утверждения (а) теоремы 4.

(б) Так как операторная матрица $\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})}$ является самосопряженной, ее дискретный спектр вещественен. Поэтому исследуем вещественные нули функции $\Omega^{(\mathrm{s})}(\cdot)$. Из определения функции $\Omega^{(\mathrm{s})}(\cdot)$ вытекает, что она регулярна на $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})})$. Простые вычисления показывают, что

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\Omega^{(\mathrm{s})}(z) = -1 - \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} &\frac{v^2(t)}{(\Omega_2^{(-\mathrm{s})}(z - w(s)))^2} \times\\
&\times \left(1 + \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t) dt}{(\mathrm{s}\varepsilon + w(s) + w(t) - z)^2}\right) ds, \quad z \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})}).
\end{aligned}$$

Очевидно, что $\dfrac{d}{dz}\Omega^{(\mathrm{s})}(z) < 0$ при всех $z \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})})$. Это и означает, что функция $\Omega^{(\mathrm{s})}(\cdot)$ монотонно убывает на $\mathbb{R} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})})$. В силу теоремы 1 множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})})$ состоит из объединения не более чем семи отрезков, поэтому из монотонности функции $\Omega^{(\mathrm{s})}(\cdot)$ вытекает, что эта функция может иметь не более восьми простых нулей в $\mathbb{R} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})})$. Теперь утверждение (а) теоремы 4 завершает доказательство утверждения (б) этой теоремы. □

Из теоремы 4 следует, что

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})}) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_2^{(\mathrm{s})} : \Omega^{(\mathrm{s})}(z) = 0\}.$$

Отсюда с учетом замечания 1 получаем, что

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_3) = \big\{z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_2^{(\mathrm{s})} : \Omega(z) = 0\big\}.$$

Найденное выше равенство для дискретного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_3$ позволяет определить число и местоположение собственных значений этой матрицы.

Заключение. В настоящей статье исследуется операторная матрица $\mathcal{A}$ четвертого порядка, которая соответствует гамильтониану системы с несохраняющимся числом и не более четырех частиц на решетке. Эта операторная матрица действует в четырехчастичном обрезанном подпространстве фоковского пространства.

Для рассматриваемой операторной матрицы $\mathcal{A}$ получены следующие результаты:

– описано местоположение существенного спектра;
– доказано, что существенный спектр состоит из объединения не более шести отрезков;
– определено число и местоположение собственных значений;
– оценена нижняя грань существенного спектра.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Благодарности. Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам за ценные и полезные замечания.

Библиографический список

1. Tretter C. *Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications.* London: Imperial College Press, 2008. xxxi+264 pp.
2. Mogilner A. I. Hamiltonians in solid state physics as multiparticle discrete Schrödinger operators: Problems and results / *Many particle Hamiltonians: Spectra and Scattering* / Advances in Soviet Mathematics, vol. 5. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1991. pp. 139–194.
3. Friedrichs K. O. *Perturbation of Spectra in Hilbert Space* / Lectures in Applied Mathematics. vol. 3. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1965. xii+178 pp.
4. Минлос Р. А., Малышев В. А. *Линейные операторы в бесконечночастичных системах.* М.: Наука, 1994. 425 с.
5. Thaller B. *The Dirac Equation* / Texts and Monographs in Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1991. xvii+357 pp.
6. Lifschitz A. E. *Magnetohydrodynamics and Spectral Theory* / Developments in Electromagnetic Theory and Applications. vol. 4. Kluwer Academic Publ.: Dordrecht, 1989. xii+446 pp.
7. Меркурьев С. П., Фаддеев Л. П. *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц.* М.: Наука, 1985. 400 с.
8. Cycon H. L., Froese R. G., Kirsch W., Simon B. *Schrödinger Operators, with Application to Quantum Mechanics and Global Geometry* / Springer Study edition. Texts and Monographs in Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1987. ix+319 pp.
9. Hunziker W. On the spectra of Schrödinger multiparticle Hamiltonians // *Helv. Phys. Acta*, 1966. vol. 39. pp. 451–462.

10. van Winter C. *Theory of Finite Systems of Particles. I: The Green Function* / Mat.-Fys. Skr., Danske Vid. Selsk. 2, No. 8, 1964. 60 pp.
11. Жислин Г. М. Исследование спектра оператора Шредингера для системы многих частиц / Тр. ММО, Т. 9. М.: ГИФМЛ, 1960. С. 81–120.
12. Муминов М. Э. Теорема Хунцикера–ван Винтера–Жислина для четырехчастичного оператора Шредингера на решетке // *ТМФ*, 2006. Т. 148, № 3. С. 428–443. EDN: HVALGT. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf2325.
13. Лакаев С. Н., Расулов Т. Х. Модель в теории возмущений существенного спектра многочастичных операторов // *Матем. заметки*, 2003. Т. 73, № 4. С. 556–564. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm203.
14. Albeverio S., Lakaev S. N., Rasulov T. H. On the spectrum of an Hamiltonian in Fock space. Discrete spectrum asymptotics // *J. Stat. Phys.*, 2007. vol. 127, no. 2. pp. 191–220, arXiv: math-ph/0508028. EDN: LXQYHX. DOI: https://doi.org/10.1007/s10955-006-9240-6.
15. Расулов Т. Х. О структуре существенного спектра модельного оператора нескольких частиц // *Матем. заметки*, 2008. Т. 83, № 1. С. 86–94. EDN: RLQXJN. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm4337.
16. Rasulov T. H., Muminov M. E., Hasanov M. On the spectrum of a model operator in Fock space // *Methods Funct. Anal. Topol.*, 2009. vol. 15, no. 4. pp. 369–383, arXiv: 0805.1284 [math-ph].
17. Rasulov T. H. Investigations of the essential spectrum of a Hamiltonian in Fock space // *Appl. Math. Inform. Sci.*, 2010. vol. 4, no. 3. pp. 395–412. EDN: SQGWHZ.
18. Muminov M., Neidhardt H., Rasulov T. On the spectrum of the lattice spin-boson Hamiltonian for any coupling: 1D case // *J. Math. Phys.*, 2015. vol. 56, 053507, arXiv: 1410.4763 [math-ph]. EDN: URDADB. DOI: https://doi.org/10.1063/1.4921169.
19. Расулов Т. Х. О ветвях существенного спектра решетчатой модели спин–бозон с не более чем двумя фотонами // *Теор. и мат. физ.*, 2016. Т. 186, № 2. С. 293–310. EDN: VQORSX. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf8854.
20. Spohn H. Ground state(s) of the spin-boson hamiltonian // *Commun. Math. Phys.*, 1989. vol. 123, no. 2. pp. 277–304. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01238859.
21. Hübner M., Spohn H. Spectral properties of the spin-boson Hamiltonian // *Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor.*, 1995. vol. 62, no. 3. pp. 289–323.
22. Жуков Ю. В., Минлос Р. А. Спектр и рассеяние в модели “спин–бозон” с не более чем тремя фотонами // *Теор. и мат. физ.*, 1995. Т. 103, № 1. С. 63–81.
23. Minlos R. A., Spohn H. The three-body problem in radioactive decay: The case of one atom and at most two photons / *Topics in Statistical and Theoretical Physics* / American Mathematical Society Translations, Ser. 2, 177. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1996. pp. 159–193. DOI: https://doi.org/10.1090/trans2/177/09.
24. Feynman R. P. *Statistical Mechanics. A Set of Lectures* / Advanced Book Classics. Reading, MA: Perseus Books, 1998. xiv+354 pp.
25. Reed M., Simon B. *Methods of Modern Mathematical Physics.* vol. 4: Analysis of Operators. New York: Academic Press, 1978. xv+396 pp.
26. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* М.: Наука, 1965. 448 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 427–445
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2003

MSC: 81Q10, 35P20, 47N50

Description of the spectrum of one fourth-order operator matrix

T. Kh. Rasulov, H. M. Latipov

Bukhara State University,
11, Muhammad Ikbol st., Bukhara, 705018, Uzbekistan.

Abstract

An operator matrix $\mathcal{A}$ of fourth-order is considered. This operator corresponds to the Hamiltonian of a system with non conserved number and at most four particles on a lattice. It is shown that the operator matrix $\mathcal{A}$ is unitarily equivalent to the diagonal matrix, the diagonal elements of which are operator matrices of fourth-order. The location of the essential spectrum of the operator $\mathcal{A}$ is described, that is, two-particle, three-particle and four-particle branches of the essential spectrum of the operator $\mathcal{A}$ are singled out. It is established that the essential spectrum of the operator matrix $\mathcal{A}$ consists of the union of closed intervals whose number is not over 14. A Fredholm determinant is constructed such that its set of zeros and the discrete spectrum of the operator matrix $\mathcal{A}$ coincide, moreover, it was shown that the number of simple eigenvalues of the operator matrix $\mathcal{A}$ lying outside the essential spectrum does not exceed 16.

Keywords: Fock space, operator matrix, annihilation and creation operators, unitary equivalent operators, essential, discrete and point spectra.

Received: 7th March, 2023 / Revised: 15th September, 2023 / Accepted: 18th September, 2023 / First online: 28th September, 2023

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' Responsibilities. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

Please cite this article in press as:
Rasulov T. Kh., Latipov H. M. Description of the spectrum of one fourth-order operator matrix, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 427–445. EDN: UKZLQF. DOI: 10.14498/vsgtu2003 (In Russian).

Authors' Details:

Tulkin Kh. Rasulov https://orcid.org/0000-0002-2868-4390
Dr. Sci. (Phys. & Math.), Professor; Vice-Rector for Research and Innovation;
e-mail: rth@mail.ru, t.h.rasulov@buxdu.uz

Hakimboy M. Latipov https://orcid.org/0000-0002-4806-0155
Assistant Lecturer; Dept. of Mathematical Analysis; e-mail: h.m.latipov@buxdu.uz

Acknowledgments. The authors express their deep gratitude to the reviewers for valuable and useful comments.

References

1. Tretter C. *Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications*. London, Imperial College Press, 2008, xxxi+264 pp.
2. Mogilner A. I. Hamiltonians in solid state physics as multiparticle discrete Schrödinger operators: Problems and results, In: *Many particle Hamiltonians: Spectra and Scattering*, Advances in Soviet Mathematics, vol. 5. Providence, RI, Am. Math. Soc., 1991, pp. 139–194.
3. Friedrichs K. O. *Perturbation of Spectra in Hilbert Space*, Lectures in Applied Mathematics, vol. 3. Providence, RI, Am. Math. Soc., 1965, xii+178 pp.
4. Malyshev V. A., Minlos R. A. *Linear Infinite-Particle Operators*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 143. Providence, RI, Am. Math. Soc., 1995, viii+298 pp.
5. Thaller B. *The Dirac Equation*, Texts and Monographs in Physics. Berlin, Springer-Verlag, 1991, xvii+357 pp.
6. Lifschitz A. E. *Magnetohydrodynamics and Spectral Theory*, Developments in Electromagnetic Theory and Applications, vol. 4. Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1989, xii+446 pp.
7. Faddeev L. D., Merkuriev S. P. *Quantum Scattering Theory for Several Particle Systems*, Mathematical Physics and Applied Mathematics, vol. 11. Kluwer Academic Publ., 1993, xiii+404 pp.
8. Cycon H. L., Froese R. G., Kirsch W., Simon B. *Schrödinger Operators, with Application to Quantum Mechanics and Global Geometry*, Springer Study edition. Texts and Monographs in Physics. Berlin, Springer-Verlag, 1987, ix+319 pp.
9. Hunziker W. On the spectra of Schrödinger multiparticle Hamiltonians, *Helv. Phys. Acta*, 1966, vol. 39, pp. 451–462.
10. van Winter C. *Theory of Finite Systems of Particles. I: The Green Function*, Mat.-Fys. Skr., Danske Vid. Selsk. 2, No. 8, 1964, 60 pp.
11. Zhislin G. M. A study of the spectrum of the Schrödinger operator for a system of several particles, Tr. Mosk. Mat. Obs., 9, 1960, pp. 81–120 (In Russian).
12. Muminov M. É. A Hunziker–van Winter–Zhislin theorem for a four-particle lattice Schrödinger operator, *Theoret. and Math. Phys.*, 2006, vol. 148, no. 3, pp. 1236–1250. EDN: XLLPVN. DOI: https://doi.org/10.1007/s11232-006-0114-5.
13. Lakaev S. N., Rasulov T. K. A model in the theory of perturbations of the essential spectrum of multiparticle operators, *Math. Notes*, 2003, vol. 73, no. 4, pp. 521–528. EDN: XJVQYB. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1023207220878.
14. Albeverio S., Lakaev S. N., Rasulov T. H. On the spectrum of an Hamiltonian in Fock space. Discrete spectrum asymptotics, *J. Stat. Phys.*, 2007, vol. 127, no. 2, pp. 191–220, arXiv: math-ph/0508028. EDN: LXQYHX. DOI: https://doi.org/10.1007/s10955-006-9240-6.
15. Rasulov T. K. On the structure of the essential spectrum of a model many-body Hamiltonian, *Math. Notes*, 2008, vol. 83, no. 1, pp. 80–87. EDN: LKYTYL. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434608010100.
16. Rasulov T. H., Muminov M. E., Hasanov M. On the spectrum of a model operator in Fock space, *Methods Funct. Anal. Topol.*, 2009, vol. 15, no. 4, pp. 369–383, arXiv: 0805.1284 [math-ph].
17. Rasulov T. H. Investigations of the essential spectrum of a Hamiltonian in Fock space, *Appl. Math. Inform. Sci.*, 2010, vol. 4, no. 3, pp. 395–412. EDN: SQGWHZ.
18. Muminov M., Neidhardt H., Rasulov T. On the spectrum of the lattice spin-boson Hamiltonian for any coupling: 1D case, *J. Math. Phys.*, 2015, vol. 56, 053507, arXiv: 1410.4763 [math-ph]. EDN: URDADB. DOI: https://doi.org/10.1063/1.4921169.
19. Rasulov T. K. Branches of the essential spectrum of the lattice spin-boson model with at most two photons, *Theoret. and Math. Phys.*, 2016, vol. 186, no. 2, pp. 251–267. EDN: WPRRHL. DOI: https://doi.org/10.1134/S0040577916020094.

20. Spohn H. Ground state(s) of the spin-boson hamiltonian, *Commun. Math. Phys.*, 1989, vol. 123, no. 2, pp. 277–304. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01238859.
21. Hübner M., Spohn H. Spectral properties of the spin-boson Hamiltonian, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor.*, 1995, vol. 62, no. 3, pp. 289–323.
22. Zhukov Yu. V., Minlos R. A. Spectrum and scattering in a “spin-boson” model with not more than three photons, *Theoret. and Math. Phys.*, 1995, vol. 103, no. 1, pp. 398–411. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02069784.
23. Minlos R. A., Spohn H. The three-body problem in radioactive decay: The case of one atom and at most two photons, In: *Topics in Statistical and Theoretical Physics*, American Mathematical Society Translations, Ser. 2, 177. Providence, RI, Am. Math. Soc., 1996, pp. 159–193. DOI: https://doi.org/10.1090/trans2/177/09.
24. Feynman R. P. *Statistical Mechanics. A Set of Lectures*, Advanced Book Classics. Reading, MA, Perseus Books, 1998, xiv+354 pp.
25. Reed M., Simon B. *Methods of Modern Mathematical Physics*, vol. 4, Analysis of Operators. New York, Academic Press, 1978, xv+396 pp.
26. Gohberg I. C., Kreĭn M. G. *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in Hilbert Space*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 18. Providence, RI, Am. Math. Soc., 1969, xv+378 pp. DOI: https://doi.org/10.1090/mmono/018.