Е. А. Созонтова, Условия существования и единственности решения задачи Гурса для системы уравнений с доминирующими частными производными, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023, номер 2, 375–383

DOI: 10.14498/vsgtu2012

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 2. С. 375–383
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2012
EDN: MKLZCD

УДК 517.956

# Условия существования и единственности решения задачи Гурса для системы уравнений с доминирующими частными производными

*Е. А. Созонтова*

Елабужский институт Казанского (Приволжского) федерального университета, Россия, 423600, Елабуга, ул. Казанская, 89.

**Аннотация**

Изучается $n$-мерная система уравнений с доминирующими частными производными $n$-го порядка. Признаком, отличающим рассматриваемую систему от других систем с частными производными, является наличие первого слагаемого в уравнениях правой части системы, представляющего собой доминирующую производную, при этом все остальные входящие в уравнения системы производные получаются из нее отбрасыванием по крайней мере одного дифференцирования по какой-либо из независимых переменных. Целью исследования является отыскание условий однозначной разрешимости задачи Гурса для рассматриваемой системы. Основная задача редуцируется к системе интегральных уравнений, решение которой существует и единственно при выполнении требований непрерывности ядер и правых частей этой системы в соответствующих замкнутых параллелепипедах изменения своих переменных. Получены условия, при которых основная задача однозначно разрешима. Окончательный результат в терминах коэффициентов исходной системы формулируется в виде теоремы.

**Ключевые слова:** система дифференциальных уравнений, задача Гурса, теорема существования и единственности.

Получение: 21 марта 2023 г. / Исправление: 13 мая 2023 г. / Принятие: 18 мая 2023 г. / Публикация онлайн: 20 июня 2023 г.

---

**Дифференциальные уравнения и математическая физика**
**Краткое сообщение**



**Образец для цитирования**
Созонтова Е. А. Условия существования и единственности решения задачи Гурса для системы уравнений с доминирующими частными производными // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 2. С. 375–383. EDN: MKLZCD. DOI: 10.14498/vsgtu2012.

**Сведения об авторе**
*Елена Александровна Созонтова* https://orcid.org/0000-0003-4315-0669
кандидат физико-математических наук; доцент; кафедра математики и прикладной информатики; e-mail: sozontova-elena@rambler.ru

Рассматривается система уравнений с доминирующими частными производными

$$\frac{\partial^{m_i} u_i(x)}{\partial x_1^{m_{i_1}} \cdots \partial x_n^{m_{i_n}}} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k_j<m_i,\\ k_{j_s}\leqslant m_{j_s}}} a_{jk_{j_1}\ldots k_{j_n}}(x) \frac{\partial^{k_j} u_j(x)}{\partial x_1^{k_{j_1}} \cdots \partial x_n^{k_{j_n}}} = f_i(x),\ i=\overline{1,n}, \quad (1)$$

в области $\Omega = \{x_{10} < x_1 < x_{11},\ x_{20} < x_2 < x_{21},\ \ldots,\ x_{n0} < x_n < x_{n1}\}$. Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $m_i = m_{i_1} + \cdots + m_{i_n}$, $k_j = k_{j_1} + \cdots + k_{j_n}$, $m_s, k_s$, $s = \overline{1,n}$ — целые неотрицательные числа. Гладкость коэффициентов системы (1) определяется включениями

$$a_{jk_{j_1}\ldots k_{j_n}} \in C^{(k_{j_1},\ k_{j_2},\ldots,\ k_{j_n})}(\overline{\Omega}), \quad f_i \in C^{(0,0,\ldots,0)}(\overline{\Omega}).$$

Класс $C^{(k_{j_1},k_{j_2},\ldots,k_{j_n})}(\overline{\Omega})$ означает существование и непрерывность в $\overline{\Omega}$ всех производных $\partial^{l_{j_1}+l_{j_2}+\cdots+l_{j_n}}/\partial x_1^{l_{j_1}} \partial x_2^{l_{j_2}} \cdots \partial x_n^{l_{j_n}}$, $l_{j_p} = \overline{0, k_{j_p}}$, $p = \overline{1,n}$. Грани параллелепипеда $\Omega$ при $x_1 = x_{10}$, $x_2 = x_{20}$, …, $x_n = x_{n0}$ обозначим соответственно $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Частные случаи системы (1) с различных точек зрения изучались многими авторами. Для $m_i = 1$ можно указать, например, публикации [1–6]. Так, в [1] при $n = 2$ исследованы задачи Коши и Гурса, получены формулы интегрального представления решения этих задач, позволяющие установить их структурные свойства. В [2,3] изучены задачи с нормальными производными первого и второго порядка в граничных условиях, в [4] с помощью решения задачи Гурса, полученного методом Римана, исследована задача Дарбу. При $n = 3$ в [5] исследована задача Гурса и получены условия ее разрешимости в квадратурах. В [6] для той же системы доказаны существование и единственность решения задачи Дарбу.

В [7, с. 62] были изложены решения задачи Коши и Гурса для системы (1) при $m_i = 2$, $m_{i_1} = m_{i_2} = 1$, полученные методом Римана. Та же система с различных точек зрения изучалась и в [8–11]. Так, в [10] исследована задача Гурса и получены условия ее разрешимости в квадратурах, в [11] исследованы характеристические задачи с условиями на трех и четырех сторонах характеристического прямоугольника. Аналогичная система (но с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа) рассматривалась в [12]. Для систем с кратными доминирующими частными производными при $m_i = 2$, $n = 2$ был разработан векторно-матричный аналог метода Римана, изучены задачи Коши и Гурса, а также поставлен ряд новых характеристических задач и исследован характер их разрешимости [13]. При $m_i = 2$, $n = 3$ для систем с кратными частными производными доказаны существование и единственность решений задачи Коши [14]. Частные случаи системы (1) более высокого порядка рассматривались, например, в [15,16] и др. работах.

Таким образом, изучение различных особых случаев системы (1) и граничных условий для них является важным направлением в теории дифференциальных уравнений. Целью данного исследования является получение условий, при которых решение задачи Гурса для системы (1) при произвольном $n$ существует и единственно (указаний на этот вопрос в литературе автору обнаружить не удалось).

Задача. *В области $\Omega$ найти регулярное решение системы (1), удовлетворяющее непрерывно дифференцируемым граничным значениям*

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^{i_1} u_i}{\partial x_1^{i_1}}\Big|_{x_1=x_{10}} = \varphi_{1ii_1}(x_2, x_3, \ldots, x_n), \qquad i_1 = \overline{0,\ m_{i_1}-1},\ i=\overline{1,n};\\
&\frac{\partial^{i_2} u_i}{\partial x_2^{i_2}}\Big|_{x_2=x_{20}} = \varphi_{2ii_2}(x_1, x_3, \ldots, x_n), \qquad i_2 = \overline{0,\ m_{i_2}-1},\ i=\overline{1,n};\\
&\qquad\vdots\\
&\frac{\partial^{i_n} u_i}{\partial x_n^{i_n}}\Big|_{x_n=x_{n0}} = \varphi_{nii_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \quad i_n = \overline{0, m_{i_n}-1},\ i=\overline{1,n}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

*При этом предполагается, что* $\varphi_{1ii_1} \in C^{(0,m_{i_2},m_{i_3},\ldots,m_{i_n})}(\overline{X_1})$,

$$\varphi_{2ii_2} \in C^{(m_{i_1},0,m_{i_3},\ldots,m_{i_n})}(\overline{X_2}), \quad \ldots, \quad \varphi_{nii_n} \in C^{(m_{i_1},m_{i_2},\ldots,m_{i_{n-1}},0)}(\overline{X_n})$$

*и выполняются условия согласования*

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^{i_2}\varphi_{1ii_1}}{\partial x_2^{i_2}}\Big|_{x_2=x_{20}} = \frac{\partial^{i_1}\varphi_{2ii_2}}{\partial x_1^{i_1}}\Big|_{x_1=x_{10}}, \quad \frac{\partial^{i_3}\varphi_{1ii_1}}{\partial x_3^{i_3}}\Big|_{x_3=x_{30}} = \frac{\partial^{i_1}\varphi_{3ii_3}}{\partial x_1^{i_1}}\Big|_{x_1=x_{10}}, \quad \ldots,\\
&\qquad\qquad \frac{\partial^{i_n}\varphi_{1ii_1}}{\partial x_n^{i_n}}\Big|_{x_n=x_{n0}} = \frac{\partial^{i_1}\varphi_{nii_n}}{\partial x_1^{i_1}}\Big|_{x_1=x_{10}};\\
&\frac{\partial^{i_3}\varphi_{2ii_2}}{\partial x_3^{i_3}}\Big|_{x_3=x_{30}} = \frac{\partial^{i_2}\varphi_{3ii_3}}{\partial x_2^{i_2}}\Big|_{x_2=x_{20}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{i_n}\varphi_{2ii_2}}{\partial x_n^{i_n}}\Big|_{x_n=x_{n0}} = \frac{\partial^{i_2}\varphi_{nii_n}}{\partial x_2^{i_2}}\Big|_{x_2=x_{20}};\\
&\qquad\qquad \ldots; \qquad \frac{\partial^{i_n}\varphi_{n-1ii_{n-1}}}{\partial x_n^{i_n}}\Big|_{x_n=x_{n0}} = \frac{\partial^{i_{n-1}}\varphi_{nii_n}}{\partial x_{n-1}^{i_{n-1}}}\Big|_{x_{n-1}=x_{(n-1)0}}.
\end{aligned}
$$

Решению основной задачи предпошлем следующую лемму.

Лемма. *Имеет место равенство*

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^{m_i} u_i(x)}{\partial x_1^{m_{i_1}}\cdots\partial x_n^{m_{i_n}}} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k_j<m_i,\\ k_{j_s}\leqslant m_{j_s}}} a_{jk_{j_1}\ldots k_{j_n}}\frac{\partial^{k_j} u_j(x)}{\partial x_1^{k_{j_1}}\cdots\partial x_n^{k_{j_n}}} =\\
&\qquad\qquad = \frac{\partial^{m_i} u_i(x)}{\partial x_1^{m_{i_1}}\cdots\partial x_n^{m_{i_n}}} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k_j<m_i,\\ k_{j_s}\leqslant m_{j_s}}} \frac{\partial^{k_j}(b_{jk_{j_1}\cdots k_{j_n}} u_j(x))}{\partial x_1^{k_{j_1}}\cdots\partial x_n^{k_{j_n}}},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

*где*

$$
b_{jk_{j_1}\ldots k_{j_n}} = \sum_{\substack{s_{j_1}=k_{j_1}\\ s_{j_1}+\cdots+s_{s_{j_n}}<m_i}}^{m_{i_1}}\cdots\sum_{s_{j_n}=k_{j_n}}^{m_{i_n}}\prod_{p=1}^{n} C_{s_{j_p}}^{k_{j_p}}(-1)^{\sum\limits_{p=1}^{n}(s_{j_p}+k_{j_p})}\frac{\partial^{\sum\limits_{p=1}^{n}(s_{j_p}-k_{j_p})} a_{js_{j_1}\ldots s_{j_n}}}{\partial x_1^{s_{j_1}-k_{j_1}}\cdots\partial x_n^{s_{j_n}-k_{j_n}}}, \tag{4}
$$

$$i,j=\overline{1,n}.$$

*Доказательство.* Рассмотрим правую часть равенства (3). Применяя формулу Лейбница, получим

$$\frac{\partial^{m_i}u_i(x)}{\partial x_1^{m_{i1}}\cdots\partial x_n^{m_{in}}}+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k_j<m_i,\\ k_{js}\leqslant m_{js}}}\sum_{\substack{l_1=0\\ l_1+\dots+l_n<m_i}}^{k_{j1}}\cdots\sum_{l_n=0}^{k_{jn}}\prod_{p=1}^{n}C_{k_{jp}}^{l_p}\frac{\partial^{\sum\limits_{p=1}^{n}(k_{jp}-l_p)}b_{jk_{j1}\dots k_{jn}}}{\partial x_1^{k_{j1}-l_1}\dots\partial x_n^{k_{jn}-l_n}}\cdot\frac{\partial^{\sum\limits_{p=1}^{n}l_p}u_j}{\partial x_1^{l_1}\cdots\partial x_n^{l_n}}. \tag{5}$$

Подставим в (5) значения из (4) и выделим слагаемые при $l_p=s_{jp}\neq k_{jp}$, $p=\overline{1,n}$:

$$\frac{\partial^{m_i}u_i(x)}{\partial x_1^{m_{i1}}\cdots\partial x_n^{m_{in}}}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k_j<m_i,\\ k_{js}\leqslant m_{js}}}a_{jk_{j1}\dots k_{jn}}\frac{\partial^{k_j}u_j(x)}{\partial x_1^{k_{j1}}\cdots\partial x_n^{k_{jn}}}+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k_j<m_i,\\ k_{js}\leqslant m_{js}}}\sum_{l_1=0}^{k_{j1}}\cdots\sum_{l_n=0}^{k_{jn}}\sum_{s_{j1}=k_{j1}}^{m_{i1}}\cdots\sum_{s_{jn}=k_{jn}}^{m_{in}}\prod_{p=1}^{n}C_{s_{jp}}^{k_{jp}}C_{k_{jp}}^{l_p}(-1)^{\sum\limits_{p=1}^{n}(s_{jp}+k_{jp})}\times$$
$$\times\frac{\partial^{\sum\limits_{p=1}^{n}(s_{jp}-l_p)}a_{js_{j1}\dots s_{jn}}}{\partial x_1^{s_{j1}-l_1}\cdots\partial x_n^{s_{jn}-l_n}}\cdot\frac{\partial^{\sum\limits_{p=1}^{n}l_p}u_j}{\partial x_1^{l_1}\cdots\partial x_n^{l_n}}, \tag{6}$$

где $l_1+\dots+l_n<m_i$, $s_{j1}+\dots+s_{s_{jn}}<m_i$, $l_p=s_{jp}\neq k_{jp}$. Подсчитаем в последней сумме из (6) количество слагаемых вида

$$\frac{\partial^{\sum\limits_{p=1}^{n}(s_{jp}-l_p)}a_{js_{j1}\dots s_{jn}}}{\partial x_1^{s_{j1}-l_1}\cdots\partial x_n^{s_{jn}-l_n}}\cdot\frac{\partial^{\sum\limits_{p=1}^{n}l_p}u_j}{\partial x_1^{l_1}\cdots\partial x_n^{l_n}},$$

где $s_{jp}$, $l_p$ — фиксированные значения, $k_{jp}=s_{jp},s_{jp}-1,\dots,l_p$, $p=\overline{1,n}$. Используя свойства сочетаний, получим

$$(-1)^{\sum\limits_{p=1}^{n}(2s_{jp})}\prod_{p=1}^{n}C_{s_{jp}}^{s_{jp}}C_{s_{jp}}^{l_p}+(-1)^{\sum\limits_{p=1}^{n}(2s_{jp}-1)}\prod_{p=1}^{n}C_{s_{jp}}^{s_{jp}-1}C_{s_{jp}-1}^{l_p}+$$
$$+(-1)^{\sum\limits_{p=1}^{n}(2s_{jp}-2)}\prod_{p=1}^{n}C_{s_{jp}}^{s_{jp}-2}C_{s_{jp}-2}^{l_p}+\dots+(-1)^{\sum\limits_{p=1}^{n}(s_{jp}+l_p)}\prod_{p=1}^{n}C_{s_{jp}}^{l_p}C_{l_p}^{l_p}=0.$$

Таким образом, последняя сумма в (6) обращается в 0. Лемма доказана. □

Согласно лемме, систему (1) можно записать в виде

$$\frac{\partial^{m_i} u_i(x)}{\partial x_1^{m_{i1}} \cdots \partial x_n^{m_{in}}} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k_j < m_i, \\ k_{js} \leqslant m_{js}}} \frac{\partial^{k_j}(b_{jk_{j1}\dots k_{jn}} u_j(x))}{\partial x_1^{k_{j1}} \cdots \partial x_n^{k_{jn}}} = f_i(x), \quad i = \overline{1,n}, \tag{7}$$

где коэффициенты $b_{jk_{j1}\dots k_{jn}}$ вычисляются по формуле (4). Проинтегрируем систему (7) по области $\Omega$. Учитывая формулу

$$\underbrace{\int_{x_{j0}}^{x_j} \dots \int_{x_{j0}}^{x_j}}_{l_j \ \text{раз}} u_i(x_1, \dots, x_n) d\alpha_j =$$

$$= \int_{x_{j0}}^{x_j} \frac{(x_j - \alpha_j)^{l_j - 1}}{(l_j - 1)!} u_i(x_1, \dots, x_{j-1}, \alpha_j, x_{j+1}, x_n) d\alpha_j,$$

получим

$$\begin{aligned} & u_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + \\ & \quad + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{Q_{k,n}} \int_{x_{q_1 0}}^{x_{q_1}} \int_{x_{q_2 0}}^{x_{q_2}} \dots \int_{x_{q_k 0}}^{x_{q_k}} K^i_{jq_1 q_2 \dots q_k}(x_1, \dots, x_n, \alpha_{q_1}, \dots, \alpha_{q_k}) \times \\ & \qquad \times u_j(x_1, x_2, \dots, x_{q_1 - 1}, \alpha_{q_1}, x_{q_1 + 1}, \dots, x_{q_k - 1}, \alpha_{q_k}, x_{q_k + 1}, \dots, x_n) \times \\ & \qquad\qquad \times d\alpha_{q_k} \cdots d\alpha_{q_2} d\alpha_{q_1} = F_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь

$$\begin{aligned} & K^i_{jq_1 q_2 \dots q_k}(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_{q_1}, \alpha_{q_2}, \dots, \alpha_{q_k}) = \\ & \qquad = \sum_{p_{q_1}=0}^{m_{i_1}-1} \dots \sum_{p_{q_k}=0}^{m_{i_k}-1} b_{jp_1 p_2 \dots p_n}(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^{k} \frac{(x_{q_j} - \alpha_{q_j})^{m_{i_j} - p_{q_j} - 1}}{(m_{i_j} - p_{q_j} - 1)!}, \end{aligned}$$

причем если $i \neq q_j$, то $p_i = m_{i_j}$, а $b_{jp_1 p_2 \dots p_n} = 0$, если выполняется хотя бы одно из неравенств $p_k > m_{j_k}$, $k = \overline{1,n}$; $Q_{k,n} = \{(q_1, q_2, \dots, q_n) : 1 \leqslant q_1 < < q_2 < \dots < q_l \leqslant n\}$. Функции $F_i$ в силу условий (2) являются известными непрерывными функциями.

Известно [13, с. 30], что решение системы (8) существует и единственно, если все ядра и правые части в (8) непрерывны в соответствующих замкнутых параллелепипедах изменения своих переменных. Из проведенных рассуждений следует

Теорема. *Если в системе* (8) $K^i_{jq_1 q_2 \dots q_k}$, $i, j, k = \overline{1,n}$, *непрерывны в соответствующих замкнутых параллелепипедах изменения своих переменных, то решение задачи существует и единственно.*

**Заключение.** В работе рассмотрена задача Гурса для $n$-мерной системы уравнений с доминирующими частными производными $n$-го порядка. С помощью вспомогательного утверждения относительно вида рассматриваемой системы и на основании методов теории интегральных уравнений исходная задача редуцирована к системе интегральных уравнений, решение которой существует и единственно при выполнении требований непрерывности ядер и правых частей этой системы в соответствующих замкнутых параллелепипедах изменения своих переменных. Таким образом, в терминах коэффициентов исходной системы получены условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи. Результат сформулирован в виде теоремы.

**Конкурирующие интересы.** Конкурирующих интересов не имею.

**Авторская ответственность.** Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

**Финансирование.** Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета.

## Библиографический список

1. Бицадзе А. В. О структурных свойствах решений гиперболических систем уравнений в частных производных первого порядка // *Матем. моделирование*, 1994. Т. 6, № 6. С. 22–31.
2. Жегалов В. И. Задача с нормальными производными в граничных условиях для системы дифференциальных уравнений // *Изв. вузов. Матем.*, 2008. № 8. С. 70–72. EDN: JHCZWJ.
3. Созонтова Е. А. О характеристических задачах с нормальными производными для системы гиперболического типа // *Изв. вузов. Матем.*, 2013. № 10. С. 43–54. EDN: QZPDWX.
4. Mironova L. B. Boundary-value problems with data on characteristics for hyperbolic systems of equations // *Lobachevskii J. Math.*, 2020. vol. 41, no. 3. pp. 400–406. EDN: ZPBRIK. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080220030130.
5. Созонтова Е. А. К условиям разрешимости задачи Гурса в квадратурах для трехмерной системы первого порядка // *Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика*, 2017. № 2. С. 128–138. EDN: ZAERAX.
6. Миронов А. Н., Миронова Л. Б. Метод Римана–Адамара для одной системы в трехмерном пространстве // *Диффер. уравн.*, 2021. Т. 57, № 8. С. 1063–1070. EDN: GWQQJD. DOI: https://doi.org/10.31857/S0374064121080070.
7. Бицадзе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* М.: Наука, 1981. 448 с.
8. Жибер А. В., Старцев С. Я. Интегралы, решения и существование преобразований Лапласа линейной гиперболической системы уравнений // *Матем. заметки*, 2003. Т. 74, № 6. С. 848–857. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm322.
9. Старцев С. Я. Метод каскадного интегрирования Лапласа для линейных гиперболических систем уравнений // *Матем. заметки*, 2008. Т. 83, № 1. С. 107–118. EDN: RLQXKH. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm4338.
10. Созонтова Е. А. Об условиях разрешимости граничных задач в квадратурах для гиперболических систем второго порядка // *Уфимск. матем. журн.*, 2016. Т. 8, № 3. С. 135–140. EDN: WMAPYB.
11. Созонтова Е. А. К условиям разрешимости характеристических задач для одной системы гиперболического типа // *Вестн. Сыктывкар. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. Информ.*, 2020. № 1(34). С. 22–28. EDN: BVIINY.
12. Михайлова Ю. Г. О задаче Коши для линейных гиперболических систем уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа // *Уфимск. матем. журн.*, 2010. Т. 2, № 2. С. 20–26. EDN: MVUKRT.
13. Миронова Л. Б. *Линейные системы уравнений с кратными старшими частными про-*

*изводными*: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Казань: Казан. гос. ун-т, 2005. 140 с. EDN: NNQRYV.

14. Миронова Л. Б. Применение метода Римана к одной системе в трехмерном пространстве // *Изв. вузов. Матем.*, 2019. № 6. С. 48–57. EDN: KJXFEH DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-6-48-57.
15. Джохадзе О. М. Функция Римана для гиперболических уравнений и систем высокого порядка с доминированными младшими членами // *Диффер. уравн.*, 2003. Т. 39, № 10. С. 1366–1378. EDN: OPFXSJ.
16. Созонтова Е. А. К условиям разрешимости задачи Гурса в квадратурах для двумерной системы высокого порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 1. С. 94–111. EDN: YPZFUZ. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1479.

**Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki**
**[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 375–383**
**ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print)** https://doi.org/10.14498/vsgtu2012

**MSC: 35G15**

# Conditions for the existence and uniqueness of the solution of the Goursat problem for a system of equations with dominant partial derivatives

***E. A. Sozontova***

Elabuga Institute of Kazan (Volga Region) Federal University,
89, Kazanskaya st., Elabuga, 423600, Russian Federation.

**Abstract**

An $n$-dimensional system of equations with dominant partial derivatives of the $n$th order is being studied. The distinguishing feature of the considered system compared to other systems with partial derivatives is the presence of a first term in the equations on the right side of the system, representing a dominant derivative, while all other derivatives appearing in the system equations are obtained from it by discarding at least one differentiation with respect to any of the independent variables. The aim of the study is to find conditions for the unique solvability of the Goursat problem for the considered system. The main problem is reduced to a system of integral equations, the solution of which exists and is unique when the requirements of continuity of the kernels and right sides of this system are satisfied in the corresponding closed parallelepipeds of variable ranges. Conditions under which the main problem is uniquely solvable have been obtained. The final result in terms of the coefficients of the original system is formulated as a theorem.

**Keywords:** system of differential equations, Goursat problem, existence and uniqueness theorem.

Received: 21st March, 2023 / Revised: 13th May, 2023 /
Accepted: 18th May, 2023 / First online: 20th June, 2023

**Competing interests.** I have no competing interests.

**Author's Responsibilities.** I take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript has been approved by me.

**Differential Equations and Mathematical Physics**
**Short Communication**



**Please cite this article in press as:**
S o z o n t o v a E. A. Conditions for the existence and uniqueness of the solution of the Goursat problem for a system of equations with dominant partial derivatives, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 375–383. EDN: MKLZCD. DOI: 10.14498/vsgtu2012 (In Russian).

**Author's Details:**
*Elena A. Sozontova* https://orcid.org/0000-0003-4315-0669
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mathematics and Applied Computer Science; e-mail: sozontova-elena@rambler.ru

**Funding.** The work was carried out at the expense of the Strategic Academic Leadership Program of Kazan (Volga Region) Federal University.

## References


1. Bitsadze A. V. On structural properties of solutions of hyperbolic systems of partial differential equations of the first order, *Mat. Model.*, 1994, vol. 6, no. 6, pp. 22–31 (In Russian).
2. Zhegalov V. I. A problem with normal derivatives in boundary conditions for a system of differential equations, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2008, vol. 52, no. 8, pp. 58–60. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X08080070.
3. Sozontova E. A. Characteristic problems with normal derivatives for hyperbolic systems, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2013, vol. 57, no. 10, pp. 37–47. EDN: SKVOOR. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X13100046.
4. Mironova L. B. Boundary-value problems with data on characteristics for hyperbolic systems of equations, *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 3, pp. 400–406. EDN: ZPBRIK. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080220030130.
5. Sozontova E. A. The conditions of solvability of the Goursat problem in quadratures for three-dimensional system of first order, *Proc. Voronezh State Univ. Ser. Phys., Math.*, 2017, no. 2, pp. 128–138 (In Russian). EDN: ZAERAX.
6. Mironov A. N., Mironova L. B. Riemann–Hadamard method for one system in three-dimensional space, *Differ. Equ.*, 2021, vol. 57, no. 8, pp. 1034–1041. EDN: BWRRVC. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266121080073.
7. Bitsadze A. V. *Nekotorye klassy uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Some Classes of Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1981, 448 pp. (In Russian)
8. Zhiber A. V., Startsev S. Ya. Integrals, solutions, and existence problems for Laplace transformations of linear hyperbolic systems, *Math. Notes*, 2003, vol. 74, no. 6, pp. 803–811. EDN: LHRQKD. DOI: https://doi.org/10.1023/B:MATN.0000009016.91968.ed.
9. Startsev S. Ya. Cascade method of Laplace integration for linear hyperbolic systems of equations, *Math. Notes*, 2008, vol. 83, no. 1, pp. 97–106. EDN: LLHRQR. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434608010124.
10. Sozontova E. A. On solvability by quadratures conditions for second order hyperbolic systems, *Ufa Math. J.*, 2016, vol. 8, no. 3, pp. 130–135. EDN: YVGUUD. DOI: https://doi.org/10.13108/2016-8-3-130.
11. Sozontova E. A. On the solvability conditions of characteristic problems for one hyperbolic type system, *Vestn. Syktyvkar. Univ. Ser 1. Mat. Mekh. Inform.*, 2020, no. 1(34), pp. 22–28 (In Russian). EDN: BVIINY.
12. Mihaylova Yu. G. On Cauchy problem for linear hyperbolic systems of equations with zero generalized Laplace invariants, *Ufim. Mat. Zh.*, 2010, vol. 2, no. 2, pp. 20–26 (In Russian). EDN: MVUKRT.
13. Mironova L. B. *Linear systems of equations with multiple higher partial derivatives*, Thesis of Dissertation (Cand. Phys. & Math. Sci.). Kazan, Kazan State Univ., 2005, 140 pp. (In Russian). EDN: NNQRYV.
14. Mironova L. B. Application of Riemann method to one system in three-dimensional space, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2019, vol. 63, no. 6, pp. 42–50. EDN: GGFHED. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X19060057.
15. Dzhokhadze O. M. The Riemann function for higher-order hyperbolic equations and systems with dominated lower-order terms, *Differ. Equ.*, 2003, vol. 39, no. 10, pp. 1440–1453. EDN: VYSOQG. DOI: https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000017917.55876.38.
16. Sozontova E. A. A conditions of solvability of the Goursat problem in quadratures for the two-dimensional system of high order, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 1, pp. 94–111 (In Russian). EDN: YPZFUZ. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1479.