Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 3. С. 446–461
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2013
EDN: LDWVUL

УДК 517.968.4

О разрешимости одного класса нелинейных двумерных интегральных уравнений типа Гаммерштейна—Немыцкого на плоскости

Х. А. Хачатрян[1], *А. С. Петросян*[2]

[1] Ереванский государственный университет,
Армения, 0025, Ереван, ул. А. Манукяна, 1.
[2] Национальный аграрный университет Армении,
Армения, 0009, Ереван, ул. Маршала Теряна, 74.

Аннотация

Работа посвящена изучению вопросов существования и единственности положительного ограниченного и непрерывного решения для одного класса двумерных нелинейных интегральных уравнений с некомпактным оператором Гаммерштейна—Немыцкого на плоскости. Такие уравнения возникают в теории p-адических открытых и открыто-замкнутых струн, в кинетической теории газов, в математической теории географического распространения эпидемических заболеваний. Доказываются конструктивные теоремы существования и единственности ограниченного положительного решения. Исследуется также асимптотическое поведение построенного решения на бесконечности. Приводятся конкретные прикладные примеры указанного класса уравнений.

Ключевые слова: монотонность, нелинейность, ограниченное решение, интегральная асимптотика, выпуклость.

Получение: 19 апреля 2023 г. / Исправление: 13 июня 2023 г. / Принятие: 25 июня 2023 г. / Публикация онлайн: 4 сентября 2023 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

Образец для цитирования
Хачатрян Х. А., Петросян А. С. О разрешимости одного класса нелинейных двумерных интегральных уравнений типа Гаммерштейна—Немыцкого на плоскости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 3. С. 446–461. EDN: LDWVUL. DOI: 10.14498/vsgtu2013.

Сведения об авторах
Хачатур Агавардович Хачатрян https://orcid.org/0000-0002-4835-943X
доктор физико-математических наук, профессор; зав. кафедрой теории функций и дифференциальных уравнений; e-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am

Айкануш Самвеловна Петросян https://orcid.org/0000-0002-7172-4730
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент каф. высшей математики и физики; e-mail: haykuhi25@mail.ru

1. Введение

Рассмотрим следующий класс двумерных интегральных уравнений на плоскости $\mathbb{R}^2$ с некомпактным и монотонным оператором типа Гаммерштейна—Немыцкого:

$$f(x,y) = \mu(x,y,f(x,y)) + \\ + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x',y-y')G(f(x',y'))dx'dy', \ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad (1)$$

относительно искомой непрерывной ограниченной и неотрицательной на множестве $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\mathbb{R} := (-\infty,+\infty)$ функции $f(x,y)$.

В уравнении (1) нелинейности μ и G — определенные и непрерывные функции соответственно на множествах $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^+$ и $\mathbb{R}^+ := [0,+\infty)$, принимают вещественные значения, удовлетворяют условию «критичности»:

$$\mu(x,y,0)\equiv 0, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad G(0)=0$$

и некоторым другим условиям (см. ниже). Из условия «критичности» сразу следует существование тривиального (нулевого) решения уравнения (1). Ядро K определено на множестве $\mathbb{R}^2$ и удовлетворяет следующим условиям:

I) $K\in C_M(\mathbb{R}^2)$, где $C_M(\mathbb{R}^2)$ — пространство непрерывных и ограниченных функций на множестве $\mathbb{R}^2$;

II) $K(x,y)=K(y,x)>0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $K(-t,y)=K(t,y)$, $t\in\mathbb{R}^+$, $y\in\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K(x,y)dxdy=1$.

Исследование вопросов существования и единственности для уравнения (1) помимо чисто математического интереса представляет определенный интерес также в приложениях. В частности, при различных представлениях функций μ, G и K такие уравнения возникают в теории p-адических открытых и открыто-замкнутых струн для скалярного поля тахионов, в математической теории распространения эпидемических заболеваний в рамках модифицированной модели Дикмана—Капера, в кинетической теории газов (см. [1–6]). Следует отметить, что такие интегральные уравнения встречаются также в космологии (см. [7]).

В частном случае, когда $K(x,y)=K_1(x)K_2(y)$,[1] а $\mu\equiv 0$, вопросы построения нечетных по каждому аргументу ограниченных и монотонных (по x и по y) решений обсуждались в работе [8]. В случае, когда $\mu\equiv 0$, при более сильных (по сравнению с условиями I), II)) условиях на K уравнение (1) исследовалось в работе [9] для нелинейностей G, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $G\in C(\mathbb{R}^+)$, $y=G(u)$ выпукла вверх на $\mathbb{R}^+$;
2) $y=G(u)\uparrow$ на $\mathbb{R}^+$;
3) существует число $\eta>0$ такое, что $G(\eta)=\eta$;
4) $G(-u)=-G(u)$, $u\in\mathbb{R}^+$.

[1] Ядра $\{K_j(u)\}_{j=1,2}$ являются четными ограниченными положительными суммируемыми и монотонно убывающими на $\mathbb{R}^+$ функциями, причем $\int_{-\infty}^{\infty}K_j(u)du=1$, $j=1,2$.

В этой работе построено знакопеременное непрерывное и ограниченное на $\mathbb{R}^2$ решение. Исследовано асимптотическое поведение решения на бесконечности по каждому аргументу. Небезынтересно отметить, что в одномерном случае уравнение (1) при различных ограничениях на μ, G и K изучалось в работах [10–13].

Относительно функции $\mu(x, y, u)$ предположим выполнение следующих условий:

a) $\mu \in C(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+)$ и при каждом фиксированном $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ функция $\mu(x, y, u) \uparrow$ по u на $\mathbb{R}^+$;

b) существует $\sup\limits_{u \in \mathbb{R}^+} \mu(x, y, u) := g(x, y)$, причем $g \in L_1(\mathbb{R}^2) \cap M(\mathbb{R}^2)$;

c) при каждом фиксированном $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ функция $\mu(x, y, u)$ выпукла вверх по u на $\mathbb{R}^+$, причем $\mu(x, y, u) < u$, когда $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, а $u \in (\eta, +\infty)$.

В настоящей работе при условиях I), II), 1)–3) и a), b) мы докажем теорему существования положительного непрерывного и ограниченного решения f, причем $f - \eta \in L_1(\mathbb{R}^2)$. В условиях теоремы существования при дополнительном ограничении на функцию μ (а именно при условии c)) докажем также единственность построенного решения в определенном подклассе ограниченных на $\mathbb{R}^2$ функций. Следует отметить, что в процессе доказательства теоремы единственности решения ключевую роль играет интегральная асимптотика построенного решения. В конце работы приведем конкретные прикладные примеры нелинейностей μ и G, а также ядра K для иллюстрации важности полученных результатов в области вышеуказанных приложений.

2. Существование ограниченного решения. Интегральная асимптотика построенного решения

Имеет место следующая

Теорема 1. *При условиях I), II), 1)–3) и a), b) уравнение (1) имеет положительное непрерывное и ограниченное на $\mathbb{R}^2$ решение $f(x, y)$, причем $f - \eta \in L_1(\mathbb{R}^2)$. Более того, если* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \lim\limits_{y \to \pm\infty} g(x, y) = 0$, *то* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \lim\limits_{y \to \pm\infty} f(x, y) = \eta$.

Доказательство. Сперва рассмотрим следующее характеристическое уравнение на множестве $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{gathered} G(u) + \gamma = u, \\ \gamma := \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} g(x, y) < +\infty. \end{gathered} \tag{2}$$

Из свойств 1)–3) немедленно следует, что уравнение (2) имеет положительное решение ξ.

Во-первых убедимся, что

$$\xi > \eta, \tag{3}$$

где число η определяется в условии 3). Действительно, в противном случае в силу свойств 1)–3) и положительности числа γ получим

$$1 = \frac{G(\eta)}{\eta} \leqslant \frac{G(\xi)}{\xi} = 1 - \frac{\gamma}{\xi},$$

а последнее невозможно.

Теперь докажем, что характеристическое уравнение (2) имеет единственное положительное решение.

Предположим обратное: существует также $\tilde{\xi} \neq \xi$ такое, что $G(\tilde{\xi}) + \gamma = \tilde{\xi}$. Тогда будем иметь

$$G(\tilde{\xi}) - \tilde{\xi} = G(\xi) - \xi = -\gamma < 0. \tag{4}$$

Снова принимая во внимание условия 1)–3), получаем, что при $\xi > \tilde{\xi}$ имеет место $G(\xi)/\xi < G(\tilde{\xi})/\tilde{\xi}$, а при $\xi < \tilde{\xi}$ справедлива оценка $G(\xi)/\xi > G(\tilde{\xi})/\tilde{\xi}$. В обоих случаях в силу (4) приходим к противоречию. Следовательно, $\tilde{\xi} = \xi$.

Рассмотрим теперь следующие последовательные приближения для уравнения (1):

$$f_{n+1}(x,y) = \mu(x,y,f_n(x,y)) + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x',y-y')G(f_n(x',y'))dx'dy',$$
$$f_0(x,y) \equiv \eta, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad n = 0,1,2,\dots. \tag{5}$$

Используя оценку (3), тот факт, что число ξ единственным образом определяется из характеристического уравнения (2), а также условия 1)–3), a), b), I), II), индукцией по n несложно проверить, что

$$f_n(x,y) \uparrow \text{ по } n, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{6}$$
$$f_n(x,y) \leqslant \xi, \quad n = 0,1,2,\dots, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{7}$$
$$f_n \in C(\mathbb{R}^2), \quad n = 0,1,2,\dots. \tag{8}$$

Убедимся, что существует константа $C > 0$ такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(f_n(x,y) - \eta)dxdy \leqslant C, \quad n = 0,1,2,\dots. \tag{9}$$

С этой целью сперва покажем, что

$$f_n - \eta \in L_1(\mathbb{R}^2), \quad n = 0,1,2,\dots. \tag{10}$$

В случае $n = 0$ включение (10) очевидно. Предположим, что $f_n - \eta \in L_1(\mathbb{R}^2)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\{\delta_j\}_{j=1,2}$, $\{r_j\}_{j=1,2}$ — произвольные вещественные числа, причем $\delta_1 < \delta_2$, $r_1 < r_2$. Тогда из (5) в силу теоремы Фубини (см. [14]), условий I), II), 1)–3), a), b) и очевидного неравенства $G(u) \leqslant u$, $u \in [\eta, \xi]$ будем иметь

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2}\int_{r_1}^{r_2}(f_{n+1}(x,y) - \eta)dxdy \leqslant \int_{\delta_1}^{\delta_2}\int_{r_1}^{r_2} g(x,y)dxdy+$$
$$+\int_{\delta_1}^{\delta_2}\int_{r_1}^{r_2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x',y-y')(G(f_n(x',y')) - \eta)dx'dy'dxdy \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dxdy + \int_{\delta_1}^{\delta_2}\int_{r_1}^{r_2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x',y-y')(f_n(x',y')-\eta)dx'dy'dxdy \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dxdy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(f_n(x',y')-\eta)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x',y-y')dxdydx'dy' =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dxdy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(f_n(x',y')-\eta)dx'dy' < +\infty.$$

В полученной оценке, устремляя $\delta_1 \to -\infty$, $\delta_2 \to +\infty$, $r_1 \to -\infty$ и $r_2 \to +\infty$, заключаем, что $f_{n+1} - \eta \in L_1(\mathbb{R}^2)$.

Вернемся к доказательству оценки (9). Из свойств (6), (7) в силу условий 1)–3) для любого $\varepsilon \in (0,1)$ имеем (см. рис. 1)

$$0 \leqslant G(f_n(x,y)) - \eta \leqslant \frac{\eta - G(\varepsilon\eta)}{\eta(1-\varepsilon)}(f_n(x,y)-\eta),\ n = 0,1,2,\ldots,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2. \quad (11)$$

Очевидно, что $\rho := \dfrac{\eta - G(\varepsilon\eta)}{\eta(1-\varepsilon)} \in (0,1)$, ибо $G(\varepsilon\eta) > \varepsilon\eta$, $G(\eta) = \eta$, $y = G(u) \uparrow$ на $\mathbb{R}^+$ и $y = G(u)$ выпукла вверх на $\mathbb{R}^+$.

Принимая во внимание (11), а также условия II), a), b), 1)–3), в силу монотонности последовательности $\{f_n(x,y)\}_{n=0}^{\infty}$ по n и включения (10) из (5) будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(f_{n+1}(x,y)-\eta)dxdy \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dxdy +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x',y-y')(G(f_{n+1}(x',y'))-\eta)dx'dy' \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dxdy + \rho\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(f_{n+1}(x',y')-\eta)dx'dy',$$

откуда следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(f_{n+1}(x,y)-\eta)dxdy \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\eta(1-\varepsilon)}{G(\varepsilon\eta)-\varepsilon\eta}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dxdy := C < +\infty.$$

Таким образом, из (6)–(9) заключаем, что последовательность непрерывных на $\mathbb{R}^2$ функций $\{f_n(x,y)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет поточечный предел, когда $n \to \infty$:

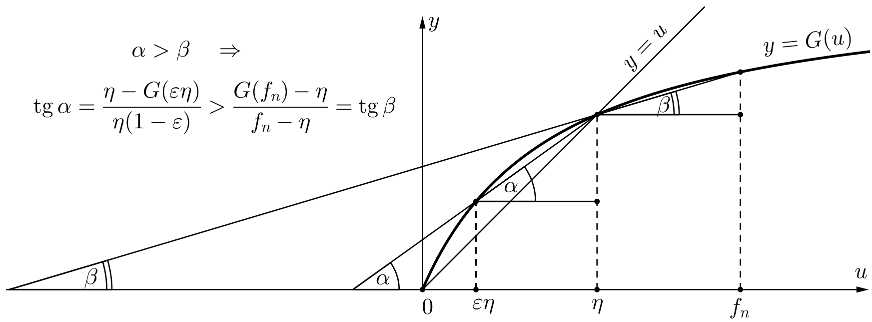

Рис. 1. [Figure 1]

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x,y) = f(x,y)$, причем предельная функция $f(x,y)$ согласно теореме Б. Леви (см. [14]) обладает следующими свойствами:

$$\eta \leqslant f(x,y) \leqslant \xi, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{12}$$

$$f - \eta \in L_1(\mathbb{R}^2), \tag{13}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(f(x,y)-\eta)dxdy \leqslant \frac{\eta(1-\varepsilon)}{G(\varepsilon\eta)-\varepsilon\eta}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dxdy. \tag{14}$$

Учитывая (8), (12), а также непрерывность функций μ, K и G, заключаем, что $f \in C(\mathbb{R}^2)$. Для завершения доказательства осталось убедиться, что если $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\lim\limits_{y\to\pm\infty} g(x,y) = 0$, то существуют $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\lim\limits_{y\to\pm\infty} f(x,y) = \eta$. Действительно, из (1), (12), a), b), 1)–3), во-первых, следует, что

$$0 \leqslant f(x,y) - \eta \leqslant g(x,y) + \\ + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x', y-y')(f(x',y')-\eta)dx'dy', \; (x,y)\in\mathbb{R}^2. \tag{15}$$

С другой стороны, известно, что если $\varphi, \psi \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R})$, то (см. [15])

$$(\varphi * \psi)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-x')\psi(x')dx' \to 0, \tag{16}$$

при $x \to \pm\infty$.

Учитывая (13), II), I), (16), а также предельное соотношение $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\lim\limits_{y\to\pm\infty} g(x,y) = 0$, из (15) получаем, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\lim\limits_{y\to\pm\infty} f(x,y) = \eta$.

Таким образом, теорема полностью доказана. $\square$

Замечание 1. Заметим, что на самом деле построенное нами решение $f(x,y)$ удовлетворяет следующему строгому неравенству снизу:

$$f(x,y) > \eta, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{17}$$

Действительно, из (1), (12), II), 3) в силу монотонности функций μ и G по u получаем

$$f(x,y) \geqslant \mu(x,y,\eta) + \\ + G(\eta)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x',y-y')dx'dy' > G(\eta) = \eta, \; (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Замечание 2. Рассмотрим теперь следующий класс нелинейных двумерных интегральных уравнений на $\mathbb{R}^2$:

$$\Phi(x,y) = \mu_0(x,y)G_0(\Phi(x,y)) + \\ + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x',y-y')G_1(\Phi(x',y'))dx'dy', \; (x,y)\in\mathbb{R}^2 \tag{18}$$

относительно искомой неотрицательной функции $\Phi(x,y)$. В уравнении (18) μ_0 — положительная непрерывная суммируемая и ограниченная на $\mathbb{R}^2$ функция, ядро K удовлетворяет условиям I), II), а функции G_0 и G_1 допускают следующие представления:

$$G_0(u) := G(u+\eta), \tag{19}$$

$$G_1(u) := G(u+\eta) - \eta, \tag{20}$$

где $G(u)$ обладает свойствами 1)–3), причем

$$\varkappa := \sup_{u\in\mathbb{R}^+} G(u) < +\infty.$$

Несложно проверить, что функция $\mu(x,y,u) = \mu_0(x,y)G_0(u)$ удовлетворяет условиям a), b), а при условии $\varkappa \leqslant 1/2$ выполняется также условие c). Следовательно, согласно теореме 1 уравнение (1) с нелинейностью вида $\mu(x,y,u) = \mu_0(x,y)G_0(u)$ имеет положительное непрерывное и ограниченное решение со свойствами (12)–(14). Заметим, что функция $\Phi^*(x,y) = f(x,y) - \eta \in L_1(\mathbb{R}^2)\cap M(\mathbb{R}^2)$ является решением уравнения (18). Действительно, учитывая II), (20), (19), (1), из (18) будем иметь

$$\mu_0(x,y)G_0(\Phi^*(x,y)) + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x',y-y')G_1(\Phi^*(x',y'))dx'dy' =$$

$$= \mu_0(x,y)G(f(x,y)) + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x',y-y')(G(f(x',y'))-\eta)dx'dy' =$$

$$= \mu(x,y,f(x,y)) + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x',y-y')G(f(x',y'))dx'dy' - \eta =$$

$$= f(x,y) - \eta = \Phi^*(x,y).$$

3. Единственность решения. Примеры

В настоящем разделе займемся вопросом единственности решения уравнения (1) в следующем классе ограниченных и неотрицательных на $\mathbb{R}^2$ функций:

$$\mathfrak{M} := \{f \in C_M(\mathbb{R}^2) : f(x,y) \geqslant 0,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \exists\, r>0, \text{ s.t. } \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus B_r} f(x,y) > 0\},$$

где

$$B_r := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|\leqslant r, |y|\leqslant r\}.$$

Справедлива следующая

Теорема 2. *При условиях теоремы 1, если функция $\mu(x,y,u)$ дополнительно удовлетворяет условию c), то уравнение (1) в классе $\mathfrak{M}$ не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Пусть $f^*(x,y)$ — произвольное решение уравнения (1) из класса $\mathfrak{M}$. Сперва докажем, что на самом деле

$$t := \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f^*(x,y) > 0.$$

Действительно, во-первых, если обозначим через $c_0 := \inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus B_r} f^*(x,y) > 0$ (так как $f^* \in \mathfrak{M}$), то в силу свойств 1)–3), a), b) и II) из (1) для всех $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ будем иметь следующие оценки:

$$\begin{aligned}
f^*(x,y) \geqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x',y-y')G(f^*(x',y'))dx'dy' \geqslant \\
\geqslant \int_{-\infty}^{-r}\int_{r}^{\infty} K(x-x',y-y')G(f^*(x',y'))dx'dy' + \\
+ \int_{r}^{\infty}\int_{r}^{\infty} K(x-x',y-y')G(f^*(x',y'))dx'dy' + \\
+ \int_{-\infty}^{-r}\int_{-\infty}^{-r} K(x-x',y-y')G(f^*(x',y'))dx'dy' + \\
+ \int_{r}^{\infty}\int_{-\infty}^{-r} K(x-x',y-y')G(f^*(x',y'))dx'dy' \geqslant \\
\geqslant G(c_0)\Bigg(\int_{-\infty}^{-r}\int_{r}^{\infty} K(x-x',y-y')dx'dy' + \int_{r}^{\infty}\int_{r}^{\infty} K(x-x',y-y')dx'dy' + \\
+ \int_{-\infty}^{-r}\int_{-\infty}^{-r} K(x-x',y-y')dx'dy' + \int_{r}^{\infty}\int_{-\infty}^{-r} K(x-x',y-y')dx'dy'\Bigg) = \\
= G(c_0)\Bigg(\int_{-\infty}^{-r-y}\int_{r-x}^{\infty} K(u,v)dudv + \int_{r-y}^{\infty}\int_{r-x}^{\infty} K(u,v)dudv + \\
+ \int_{-\infty}^{-r-y}\int_{-\infty}^{-r-x} K(u,v)dudv + \int_{r-y}^{\infty}\int_{-\infty}^{-r-x} K(u,v)dudv\Bigg) := \sigma(x,y).
\end{aligned}$$

Обозначим через Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4 следующие части $\mathbb{R}^2$:

$$\Pi_1 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0, y<0\}, \quad \Pi_2 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geqslant 0, y\geqslant 0\},$$
$$\Pi_3 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<0, y<0\}, \quad \Pi_4 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\leqslant 0, y\geqslant 0\}.$$

Теперь оценим снизу функцию $\sigma(x,y)$ на каждом из множеств Π_j, $j=1,2,3,4$. В силу условия II) имеем следующие оценки:

– если $(x,y)\in\Pi_1$, то

$$\begin{aligned}
\sigma(x,y) \geqslant G(c_0)\int_{-\infty}^{-r-y}\int_{r-x}^{\infty} K(u,v)dudv \geqslant \\
\geqslant G(c_0)\int_{-\infty}^{-r}\int_{r}^{\infty} K(u,v)dudv = \\
= G(c_0)\int_{r}^{\infty}\int_{r}^{\infty} K(u,v)dudv := \alpha_0 > 0;
\end{aligned}$$

– если $(x,y)\in\Pi_2$, то

$$\sigma(x,y) \geqslant G(c_0)\int_{r-y}^{\infty}\int_{r-x}^{\infty} K(u,v)dudv \geqslant$$

$$\geqslant G(c_0) \int_r^\infty \int_r^\infty K(u,v)dudv = \alpha_0;$$

– если $(x,y) \in \Pi_3$, то

$$\sigma(x,y) \geqslant G(c_0) \int_{-\infty}^{-r-y} \int_{-\infty}^{-r-x} K(u,v)dudv \geqslant$$
$$\geqslant G(c_0) \int_{-\infty}^{-r} \int_{-\infty}^{-r} K(u,v)dudv =$$
$$= G(c_0) \int_r^\infty \int_r^\infty K(u,v)dudv = \alpha_0;$$

– если $(x,y) \in \Pi_4$, то

$$\sigma(x,y) \geqslant G(c_0) \int_{r-y}^{\infty} \int_{-\infty}^{-r-x} K(u,v)dudv \geqslant$$
$$\geqslant G(c_0) \int_{r}^{\infty} \int_{-\infty}^{-r} K(u,v)dudv =$$
$$= G(c_0) \int_r^\infty \int_r^\infty K(u,v)dudv = \alpha_0.$$

Так как $\bigcup\limits_{j=1}^{4} \Pi_j = \mathbb{R}^2$, для всех $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ имеем $\sigma(x,y) \geqslant \alpha_0 > 0$. Следовательно, $t \geqslant \alpha_0 > 0$. Убедимся теперь, что $t \geqslant \eta$. Действительно, из уравнения (1) в силу условий 1)–3), a), b) и I), II) имеем

$$f^*(x,y) \geqslant G(t) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-x', y-y')dx'dy' = G(t), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

откуда, принимая во внимание определение числа t, получаем, что $t \geqslant G(t)$. Следовательно, учитывая 1)–3), приходим к неравенству $t \geqslant \eta$. Аналогично, как в замечании 1, можно убедиться, что

$$f^*(x,y) > \eta, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{21}$$

Несложно доказать также, что

$$f^*(x,y) \leqslant \xi, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{22}$$

Очевидно, что для завершения доказательства сформулированной теоремы достаточно доказать, что $f^*(x,y) = f(x,y)$, где $f(x,y)$ — решение уравнения (1), построенное при помощи последовательных приближений (5). Предположим обратное: существует точка $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ такая, что $f^*(x_0,y_0) \neq \neq f(x_0,y_0)$. В силу непрерывности функций f^* и f существует окрестность $O(x_0,y_0)$ этой точки такая, что $f^*(x,y) \neq f(x,y)$, $(x,y) \in O(x_0,y_0)$. Обозначим через $\mathcal{D}$ следующее измеримое множество:

$$\mathcal{D} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f^*(x,y) \neq f(x,y)\}.$$

Очевидно, что $O(x_0, y_0) \subset \mathcal{D}$ и $\operatorname{mes} \mathcal{D} > 0$. Учитывая (1) оценим теперь следующую разность:

$$|f(x,y) - f^*(x,y)| \leqslant |\mu(x,y,f(x,y)) - \mu(x,y,f^*(x,y))| +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x',y-y')|G(f(x',y')) - G(f^*(x',y'))|dx'dy',\ (x,y) \in \mathbb{R}^2. \quad (23)$$

Сперва убедимся, что

$$\chi_1(x,y) := (G(f(x,y)) - \eta) \times$$
$$\times |\mu(x,y,f(x,y)) - \mu(x,y,f^*(x,y))| \in L_1(\mathbb{R}^2) \cap M(\mathbb{R}^2), \quad (24)$$

$$\chi_2(x,y) := (G(f(x,y)) - \eta) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x',y-y') \times$$
$$\times |G(f(x',y')) - G(f^*(x',y'))|dx'dy' \in L_1(\mathbb{R}^2) \cap M(\mathbb{R}^2). \quad (25)$$

Действительно, учитывая (8), (12), (22) и условия a), b), II), 1)–3), будем иметь

$$0 \leqslant \chi_1(x,y) \leqslant 2g(x,y)(f(x,y) - \eta) \in L_1(\mathbb{R}^2) \cap M(\mathbb{R}^2),$$
$$0 \leqslant \chi_2(x,y) \leqslant 2G(\xi)(f(x,y) - \eta) \in L_1(\mathbb{R}^2) \cap M(\mathbb{R}^2),$$

Следовательно, включения (24) и (25) доказаны. Умножим обе части неравенства (23) на функцию $G(f(x,y)) - \eta$ и проинтегрируем полученное неравенство на $\mathbb{R}^2$. Принимая во внимание (24), (25), условия I), II), в силу теоремы Фубини получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (G(f(x,y)) - \eta)|f(x,y) - f^*(x,y)|dxdy \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (G(f(x,y)) - \eta)|\mu(x,y,f(x,y)) - \mu(x,y,f^*(x,y))|dxdy +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (G(f(x,y)) - \eta) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-x',y-y') \times$$
$$\times |G(f(x',y')) - G(f^*(x',y'))|dx'dy'dxdy =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (G(f(x,y)) - \eta)|\mu(x,y,f(x,y)) - \mu(x,y,f^*(x,y))|dxdy +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |G(f(x',y')) - G(f^*(x',y'))| \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x'-x,y'-y)(G(f(x,y)) - \eta)dxdydx'dy' =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (G(f(x,y)) - \eta)|\mu(x,y,f(x,y)) - \mu(x,y,f^*(x,y))|dxdy +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |G(f(x',y')) - G(f^*(x',y'))|(f(x',y') - \mu(x',y',f(x',y')) - \eta)dx'dy'.$$

Полученное неравенство в силу оценки (17) и определения множества $\mathcal{D}$ можно переписать в следующем виде:

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} (f(x,y)-\eta)|f(x,y)-f^*(x,y)|\Big(\frac{G(f(x,y))-\eta}{f(x,y)-\eta} - \\ - \frac{G(f(x,y))-\eta}{f(x,y)-\eta}\cdot\frac{|\mu(x,y,f(x,y))-\mu(x,y,f^*(x,y))|}{|f(x,y)-f^*(x,y)|} - \\ - \frac{|G(f(x,y))-G(f^*(x,y))|}{|f(x,y)-f^*(x,y)|} + \\ + \frac{|G(f(x,y))-G(f^*(x,y))|}{|f(x,y)-f^*(x,y)|}\cdot\frac{\mu(x,y,f(x,y))}{f(x,y)-\eta}\Big)dxdy \leqslant 0. \quad (26)$$

Учитывая условие c), можем утверждать, что для всех $(x,y)\in\mathcal{D}$ имеем

$$\frac{\mu(x,y,f(x,y))}{f(x,y)-\eta} > \frac{\mu(x,y,f(x,y))}{f(x,y)} > \frac{|\mu(x,y,f(x,y))-\mu(x,y,f^*(x,y))|}{|f(x,y)-f^*(x,y)|}, \quad (27)$$

$$\mu(x,y,f(x,y)) < f(x,y). \quad (28)$$

Принимая во внимание (27), (28) и (26), приходим к следующему неравенству:

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} (f(x,y)-\eta)|f(x,y)-f^*(x,y)|\Big(\frac{G(f(x,y))-\eta}{f(x,y)-\eta} - \\ - \frac{G(f(x,y))-\eta}{f(x,y)-\eta}\cdot\frac{\mu(x,y,f(x,y))}{f(x,y)} - \frac{|G(f(x,y))-G(f^*(x,y))|}{|f(x,y)-f^*(x,y)|} + \\ + \frac{|G(f(x,y))-G(f^*(x,y))|}{|f(x,y)-f^*(x,y)|}\cdot\frac{\mu(x,y,f(x,y))}{f(x,y)}\Big)dxdy \leqslant 0. \quad (29)$$

Из свойств нелинейности 1)–3) с учетом неравенств (17) и (21) имеем (см. рис. 2):

$$\frac{G(f(x,y))-\eta}{f(x,y)-\eta} > \frac{|G(f(x,y))-G(f^*(x,y))|}{|f(x,y)-f^*(x,y)|}, \quad (x,y)\in\mathcal{D}. \quad (30)$$

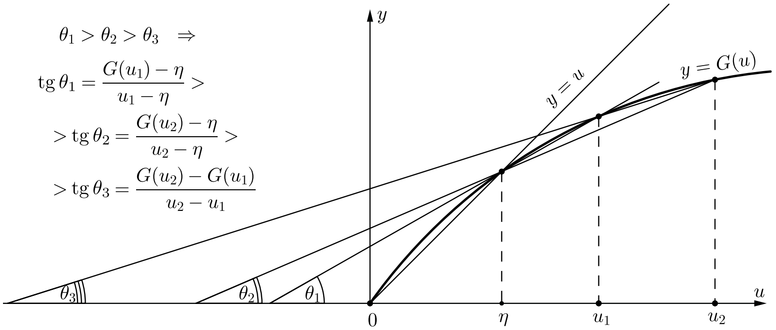

Рис. 2. [Figure 2]

Из оценок (30) и (28) в (29) приходим к противоречию. Следовательно, $f(x, y) = f^*(x, y)$, Теорема доказана. □

Замечание 3. Отметим, что полученные результаты можно распространить на n-мерные аналоги ($n > 2$) уравнения (1).

Приведем конкретные примеры нелинейностей μ, G и ядра K, удовлетворяющих всем условиям доказанных теорем.

3.1. Примеры функции $\boldsymbol{\mu(x, y, u)}$

μ_1) $\mu(x, y, u) = \mu_0(x, y)(1 - e^{-u})$, $(x, y, u) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$;

μ_2) $\mu(x, y, u) = \mu_0(x, y)\dfrac{u}{u+1}$, $(x, y, u) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$;

μ_3) $\mu(x, y, u) = \dfrac{\mu_0(x, y)}{2}\Big(\dfrac{u}{u+1} + 1 - e^{-u}\Big)$, $(x, y, u) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$, где $\mu_0 \in L_1(\mathbb{R}^2) \cap C_M(\mathbb{R}^2)$ — произвольная положительная функция.

3.2. Примеры функции $\boldsymbol{G(u)}$

g_1) $G(u) = \gamma(1 - e^{-u})$, $\gamma > 1$ — произвольный числовой параметр, а $u \in \mathbb{R}^+$;

g_2) $G(u) = u^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$ — числовой параметр, $u \in \mathbb{R}^+$;

g_3) $G(u) = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{u}{u+1} + u^\alpha\Big)$, $\alpha \in (0, 1)$, $u \in \mathbb{R}^+$.

3.3. Примеры ядра $\boldsymbol{K(x, y)}$

k_1) $K(x, y) = \dfrac{1}{\pi}e^{-(x^2+y^2)}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

k_2) $K(x, y) = \displaystyle\int_a^b e^{-(|x|+|y|)s}d\sigma(s)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, где $\sigma(s)$ — определенная на $[a, b)$, $0 < a < b \leqslant +\infty$ монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая равенству

$$\int_a^b \frac{1}{s^2}d\sigma(s) = \frac{1}{4}.$$

Подробно остановимся на примере μ_3). Проверка остальных примеров осуществляется аналогичным образом. Во-первых, очевидно, что $\mu \in C(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+)$ и $\sup\limits_{u\in\mathbb{R}^+} \mu(x, y, u) = \mu_0(x, y) \in L_1(\mathbb{R}^2) \cap C_M(\mathbb{R}^2)$.

Так как

$$\frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{\mu_0(x, y)}{2}\Big(\frac{1}{(u+1)^2} + e^{-u}\Big) > 0,$$

$\mu \uparrow$ по u на $\mathbb{R}^+$. С другой стороны,

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2} = -\frac{\mu_0(x, y)}{2}\Big(\frac{2}{(u+1)^3} + e^{-u}\Big) < 0.$$

Следовательно, $\mu(x, y, u)$ выпукла вверх по u на $\mathbb{R}^+$. Осталось проверить неравенство

$$\mu(x, y, u) < u \quad \text{при} \quad u > \eta. \tag{31}$$

Обозначим через $d := \sup\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \mu_0(x, y) < +\infty$. Тогда будем иметь

$$\mu(x, y, u) \leqslant \frac{d}{2}\Big(\frac{u}{u+1} + 1 - e^{-u}\Big) \leqslant \frac{d}{2}\frac{2u+1}{u+1} \leqslant d, \quad u \in \mathbb{R}^+.$$

Таким образом, если $d < \eta$, то оценка (31) будет выполнена.

Отметим, что приведенные примеры имеют также практическое значение в математической физике и в математической биологии (см. [1–6]).

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21T-1A047.

Библиографический список

1. Volovich I. V. p-adic string // *Class. Quantum Grav.*, 1987. vol. 4, no. 4. pp. L83–L87. DOI: https://doi.org/10.1088/0264-9381/4/4/003.
2. Moeller N., Schnabl M. Tachyon condensation in open-closed p-adic string theory // *J. High Energ. Phys.*, 2004. vol. 2004, no. 01, 011, arXiv: hep-th/0304213. DOI: https://doi.org/10.1088/1126-6708/2004/01/011.
3. Владимиров В. С. О нелинейных уравнениях p-адических открытых, замкнутых и открыто-замкнутых струн // *Теорет. мат. физ.*, 2006. Т. 149, № 3. С. 354–367. EDN: HYLHJV. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf5522.
4. Diekmann O. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection // *J. Math. Biology*, 1978. vol. 6, no. 2. pp. 109–130. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02450783.
5. Diekmann O., Kaper H. G. On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation // *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 1978. vol. 2, no. 6. pp. 721–737. DOI: https://doi.org/10.1016/0362-546X(78)90015-9.
6. Cercignani C. *The Boltzmann Equation and Applications* / Applied Mathematical Sciences. vol. 67. New York: Springer, 1988. 455 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1039-9.
7. Aref'eva I. Ya., Volovich I. V. Cosmological daemon // *J. High Energ. Phys.*, 2011. vol. 2011, no. 8, 102, arXiv: 1103.0273 [hep-th]. DOI: https://doi.org/10.1007/JHEP08(2011)102.
8. Хачатрян Х. А., Петросян А. С., Аветисян М. О. Вопросы разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений типа свертки в $\mathbb{R}^n$ // *Тр. ИММ УрО РАН*, 2018. Т. 24, № 3. С. 247–262. EDN: UXZCME. DOI: https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-3-247-262.
9. Хачатрян Х. А., Петросян А. С. О знакопеременных и ограниченных решениях одного класса нелинейных двумерных интегральных уравнений типа свертки // *Тр. ММО*, 2021. Т. 82, № 2. С. 313–327.
10. Хачатрян Х. А., Петросян А. С. О построении суммируемого решения одного класса нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна–Немыцкого на всей прямой // *Тр. ИММ УрО РАН*, 2020. Т. 26, № 2. С. 278–287. EDN: UTSHCD. DOI: https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-2-278-287.
11. Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A. Hammerstein–Nemytskii type nonlinear integral equations on half-line in space $L_1(0,+\infty) \cap L_\infty(0,+\infty)$ // *Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. Rerum Nat., Math.*, 2013. vol. 52, no. 1. pp. 89–100.
12. Хачатрян А. Х., Хачатрян Х. А., Петросян А. С. О положительных ограниченных решениях одного класса нелинейных интегральных уравнений с оператором Гаммерштейна–Немыцкого // *Диффер. уравн.*, 2021. Т. 57, № 6. С. 784–795. EDN: BNGWGX. DOI: https://doi.org/10.31857/S0374064121060066.

13. Арабаджян Л. Г. О существовании нетривиальных решений некоторых линейных и нелинейных уравнений типа свертки // *Укр. мат. жс.*, 1989. Т. 41, № 12. С. 1587–1595.
14. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука, 1981. 542 с.
15. Арабаджян Л. Г., Хачатрян А. С. Об одном классе интегральных уравнений типа свертки // *Матем. сб.*, 2007. Т. 198, № 7. С. 45–62. EDN: IAUUZL. DOI: https://doi.org/10.4213/sm1483.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 446–461
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2013

MSC: 45G05

On the solvability of a class of nonlinear two-dimensional integral equations Hammerstein–Nemytskii type on the plane

Kh. A. Khachatryan[1], *H. S. Petrosyan*[2]

[1] Yerevan State University,
1, A. Manukyan str., Yerevan, 0025, Armenia.
[2] Armenian National Agrarian University,
74, Marshal Teryan str., Yerevan, 0009, Armenia.

Abstract

We consider a class of nonlinear integral equations with a stochastic and symmetric kernel on the whole line. With certain particular representations of the kernel and nonlinearity, equations of the above character arise in many branches of mathematical natural science. In particular, such equations occur in the theory p-adic strings, in the kinetic theory of gases, in mathematical biology and in the theory of radiative transfer. Constructive existence theorems are proved for non-negative non-trivial and bounded solutions under various restrictions on the function describing the nonlinearity in the equation. Under additional restrictions on the kernel and on the nonlinearity, a uniqueness theorem is also proved in a certain class of bounded and non-negative functions that have a finite limit in $\pm\infty$. Specific applied examples of the kernel and non-linearity are given that satisfy all the restrictions of the proven statements.

Keywords: monotonicity, successive approximations, convergence, bounded solution, solution limit, Caratheodory condition.

Received: 19th April, 2023 / Revised: 13th June, 2023 /
Accepted: 25th June, 2023 / First online: 4th September, 2023

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

Please cite this article in press as:
Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S. On the solvability of a class of nonlinear two-dimensional integral equations Hammerstein–Nemytskii type on the plane, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 446–461. EDN: LDWVUL. DOI: 10.14498/vsgtu2013 (In Russian).

Authors' Details:

Khachatur A. Khachatryan https://orcid.org/0000-0002-4835-943X
D.Sc. (Phys. & Math. Sci.), Professor; Head of the Dept.; Dept. of Theory of Functions and Differential Equations; e-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am

Haykanush S. Petrosyan https://orcid.org/0000-0002-7172-4730
Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Dept of Higher Mathematics and Physics; e-mail: haykuhi25@mail.ru

Authors' Responsibilities. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research was supported by the Science Committee of the Republic of Armenia, scientific project no. 21T-1A047.

References

1. Volovich I. V. p-adic string, *Class. Quantum Grav.*, 1987, vol. 4, no. 4, pp. L83–L87. DOI: https://doi.org/10.1088/0264-9381/4/4/003.
2. Moeller N., Schnabl M. Tachyon condensation in open-closed p-adic string theory, *J. High Energ. Phys.*, 2004, vol. 2004, no. 01, 011, arXiv: hep-th/0304213. DOI: https://doi.org/10.1088/1126-6708/2004/01/011.
3. Vladimirov V. S. Nonlinear equations for p-adic open, closed, and open-closed strings, *Theoret. and Math. Phys.*, 2006, vol. 149, no. 3, pp. 1604–1616. EDN: LJOAVJ. DOI: https://doi.org/10.1007/s11232-006-0144-z.
4. Diekmann O. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection, *J. Math. Biology*, 1978, vol. 6, no. 2, pp. 109–130. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02450783.
5. Diekmann O., Kaper H. G. On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation, *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 1978, vol. 2, no. 6, pp. 721–737. DOI: https://doi.org/10.1016/0362-546X(78)90015-9.
6. Cercignani C. *The Boltzmann Equation and Applications*, Applied Mathematical Sciences, vol. 67. New York, Springer, 1988, 455 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1039-9.
7. Aref'eva I. Ya., Volovich I. V. Cosmological daemon, *J. High Energ. Phys.*, 2011, vol. 2011, no. 8, 102, arXiv: 1103.0273 [hep-th]. DOI: https://doi.org/10.1007/JHEP08(2011)102.
8. Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S., Avetisyan M. H. Solvability issues for a class of convolution type nonlinear integral equations in $\mathbb{R}^n$, *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 247–262 (In Russian). EDN: UXZCME. DOI: https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-3-247-262.
9. Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S. Alternating bounded solutions of a class of nonlinear two-dimensional convolution-type integral equations, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2021, vol. 82, pp. 259–271. EDN: JDJCFK. DOI: https://doi.org/10.1090/mosc/329.
10. Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S. On the construction of an integrable solution to one class of nonlinear integral equations of Hammerstein–Nemytskii type on the whole axis, *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 278–287 (In Russian). EDN: UTSHCD. DOI: https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-2-278-287.
11. Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A. Hammerstein–Nemytskii type nonlinear integral equations on half-line in space $L_1(0,+\infty) \cap L_\infty(0,+\infty)$, *Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. Rerum Nat., Math.*, 2013, vol. 52, no. 1, pp. 89–100.
12. Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S. On positive bounded solutions of one class of nonlinear integral equations with the Hammerstein–Nemytskii operator, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 6, pp. 768–779. EDN: UVRUYT. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266121060069.
13. Arabadzhyan L. G. Existence of nontrivial solutions of certain linear and nonlinear convolution-type equations, *Ukr. Math. J.*, 1989, vol. 41, no. 12, pp. 1359-1367. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01056100.
14. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Moscow, Nauka, 1981, 542 pp. (In Russian)
15. Arabadzhyan L. G., Khachatryan A. S. A class of integral equations of convolution type, *Sb. Math.*, 2007, vol. 198, no. 7, pp. 949–966. EDN: XLRESL. DOI: https://doi.org/10.1070/SM2007v198n07ABEH003868.