Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23, № 4. С. 607–621
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1686

Дифференциальные уравнения и математическая физика

УДК 517.95

Вторая краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова

***М. А. Керефов*[1], *С. Х. Геккиева*[2]**

[1] Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова
Россия, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173.
[2] Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а.

Аннотация

При математическом моделировании сплошных сред с памятью возникают уравнения, описывающие новый тип волнового движения, занимающего промежуточное положение между обычной диффузией и классическими волнами. Имеются в виду дифференциальные уравнения дробного порядка, которые являются основой большинства математических моделей, описывающих широкий класс физических и химических процессов в средах с фрактальной геометрией. В работе представлено качественно новое уравнение влагопереноса, являющееся обобщением уравнения Аллера–Лыкова, посредством введения понятия фрактальной скорости изменения влажности, которая объясняет наличие потоков против потенциала влажности. Рассмотрена вторая краевая задача для уравнения Аллера–Лыкова с дробной производной Римана–Лиувилля. Существование решения задачи доказано методом Фурье. Для доказательства единственности решения методом энергетических неравенств получена априорная оценка в терминах дробной производной Римана–Лиувилля.

Ключевые слова: вторая краевая задача, уравнение Аллера–Лыкова, метод Фурье, оператор дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля, метод энергетических неравенств.

Получение: 5 апреля 2019 г. / Исправление: 22 августа 2019 г. / Принятие: 11 ноября 2019 г. / Публикация онлайн: 25 ноября 2019 г.

Научная статья

Образец для цитирования
Керефов М. А., Геккиева С. Х. Вторая краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 4. С. 607–621. doi: 10.14498/vsgtu1686.

Сведения об авторах

Марат Асланбиевич Керефов https://orcid.org/0000-0002-7442-5402
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент каф. прикладной математики и информатики; e-mail: kerefov@mail.ru

Сакинат Хасановна Геккиева https://orcid.org/0000-0002-2135-2115
кандидат физико-математических наук; ученый секретарь; e-mail: gekkieva_s@mail.ru

Введение. Вопросы тепловлагопереноса в почвах являются фундаментальными при решении многих задач гидрологии, агрофизики, строительной физики и других областей науки. Исследователи при этом концентрируют свое внимание на возможности отражения в характере исходных уравнений специфических особенностей изучаемых массивов, их структуры, физических свойств, протекающих в них процессов [1, гл. 6]. В связи с этим возникает качественно новый класс дифференциальных уравнений состояния и переноса с дробной производной, являющихся основой большинства математических моделей, описывающих широкий класс физических и химических процессов в средах с фрактальной структурой и памятью [2, гл. 5].

В основе математических моделей, описывающих процессы переноса почвенной влаги в зоне аэрации с учетом ее движения против потенциала влажности, лежат уравнения в частных производных третьего порядка [3, §6.2.4, с. 261].

В данной работе рассмотрено уравнение вида

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} w + D_{0t}^{\alpha} w = \frac{\partial}{\partial x}\Big(D(w)\frac{\partial w}{\partial x}\Big) + A D_{0t}^{\alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f\left(x, t\right), \tag{1}$$

где D_{0t}^{γ} — оператор дробного интегро-дифференцирования Римана—Лиувилля [2, §0.1, с. 9], $0 < \alpha < 1$; $w(x, t)$ — влажность почвы в долях единицы на глубине x в момент времени t; коэффициент A_1 принимает значение $A_1 = Cx^2$, где C — константа, зависящая от коэффициента диффузии, а также пористости тела, его капиллярных свойств и вязкости жидкости [2, §5.9, с. 197]; $D(w)$ — коэффициент диффузии; A — варьируемый коэффициент Аллера.

Уравнение (1) при $\alpha = 1$ совпадает с уравнением Аллера—Лыкова, которое впервые было предложено В. Я. Куликом в [4] для описания процессов испарения и инфильтрации влаги в почве. Такого рода уравнения в локальной постановке ($\alpha = 1$) рассматривались в работах многих авторов и решались методом разделения переменных, методом априорных оценок, а также численными методами. Среди последних отметим работы [5, 6], в которых получены априорные оценки для решения нелокальных задач для уравнения влагопереноса Аллера—Лыкова в дифференциальной и разностной трактовках, а также работы [7–9], в которых исследовано уравнение влагопереноса Аллера—Лыкова с дробной по времени производной.

Исследование уравнения (1) будем проводить методом Фурье и методом априорных оценок. Ранее методом Фурье краевые задачи для уравнений с дробной производной исследовались в работах С. Х. Геккиевой [10], O. P. Agrawal [11], В. А. Нахушевой [12], Б. Х. Турметова [13], О. Х. Масаевой [14] и других авторов, в том числе методом априорных оценок в работах [15, 16].

1. Постановка задачи. Рассмотрим соответствующее (1) однородное уравнение

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} w + D_{0t}^{\alpha} w = \frac{\partial}{\partial x}\Big(D(w)\frac{\partial w}{\partial x}\Big) + A D_{0t}^{\alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{2}$$

В целом ряде реальных ситуаций, как отмечает В. Я. Кулик в [4], зависимость A_1 и D от координаты x практически устраняется (например, когда влажность меняется в небольшом диапазоне). В дальнейшем будем предполагать, что $A_1 = \text{const}$, $D(w) = D = \text{const}$.

Определим распределение влаги $w(x,t)$ в среде $0 \leqslant x \leqslant l$ для всех моментов времени $t \in [0,T]$, если в начальный момент выполняются условия

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1} w(x,t) = \tau(x), \quad \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha} w(x,t) = \nu(x), \tag{3}$$

а распределение влаги на концах отрезка задается соотношениями

$$\left[D\frac{\partial w}{\partial x} + AD_{0t}^{\alpha}\frac{\partial w}{\partial x}\right]_{x=0} = -\mu(t), \quad \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0. \tag{4}$$

Второе условие (4) означает отсутствие потока влаги через границу $x = l$. Что касается первого условия (4), к нему приводят следующие соображения. Обозначим через

$$B(t) = \int_0^l w(x,t)dx$$

влагосодержание слоя $[0,l]$ в момент времени t [17]. Интегрируя уравнение (2) в пределах от 0 до l и меняя слева порядок интегрирования и дифференцирования, получим

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} B(t) + D_{0t}^{\alpha} B(t) = \left[D\frac{\partial w}{\partial x} + AD_{0t}^{\alpha}\frac{\partial w}{\partial x}\right]_{x=0}^{x=l}.$$

Отсюда, учитывая второе условие (4), имеем

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} B(t) + D_{0t}^{\alpha} B(t) = -\left[D\frac{\partial w}{\partial x} + AD_{0t}^{\alpha}\frac{\partial w}{\partial x}\right]_{x=0}. \tag{5}$$

Из (5) получаем

$$D_{0t}^{\alpha}\mu_1(t) + \frac{D}{A}\mu_1(t) = -\frac{1}{A}\mu(t),$$

где

$$\mu_1(t) = \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=0}, \quad \mu(t) = A_1 D_{0t}^{\alpha+1} B(t) + D_{0t}^{\alpha} B(t).$$

В этом случае первое условие (4) заменяется более простым:

$$\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=0} = \mu_1(t), \tag{6}$$

где

$$\mu_1(t) = \tau'(0)t^{\alpha-1}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} - \frac{D}{A}t^{\alpha}E_{\frac{1}{\alpha}}\left(-\frac{D}{A}t^{\alpha};2\alpha\right)\right] - \\ - \frac{1}{A}D_{0t}^{-\alpha}\mu(t) + \frac{D}{A^2}\Gamma(2\alpha)D_{0t}^{-2\alpha}\left(E_{\frac{1}{\alpha}}\left(-\frac{D}{A}t^{\alpha};2\alpha\right)\mu(t)\right),$$

а $\tau(x)$ определяется из первого условия (3) [2, §2.2, с. 93].

Предположим, что выполнены условия непрерывности предельных соотношений

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}\mu(t) = 0, \quad \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha}\mu(t) = 0, \quad \tau'(0) = \nu'(0) = \tau'(l) = \nu'(l) = 0. \tag{7}$$

Тогда с помощью замены

$$w(x,t) = u(x,t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau(x) + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\nu(x) + \mu_1(t)\Big(x - \frac{x^2}{2l}\Big)$$

условия (3), (6) и второе условие (4) можно свести к однородным.

Получим следующую постановку задачи: *в области* $Q = \big\{(x,t) : 0 < x < l, t > 0\big\}$ *рассматривается уравнение*

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1}u + D_{0t}^{\alpha}u = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + AD_{0t}^{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\left(x,t\right), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \tag{8}$$

где A_1, A, D *— положительные константы,*

$$f(x,t) = -A_1\Big(x - \frac{x^2}{2l}\Big)D_{0t}^{\alpha+1}\mu_1(t) - \Big(x - \frac{x^2}{2l} - \frac{A}{l}\Big)D_{0t}^{\alpha}\mu_1(t) + \\ + D\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau''(x) + D\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\nu''(x) - \frac{1}{l}\mu_1(t).$$

Определение. *Регулярным решением уравнения* (8) *в области* Q *назовем функцию* $u = u\left(x,t\right)$ *из класса* $D_{0t}^{\alpha}u(x,t) \in C\left(\bar{Q}\right)$; $D_{0t}^{\alpha+1}u(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$, $D_{0t}^{\alpha}u_{xx}(x,t) \in C\left(Q\right)$, *которая удовлетворяет уравнению* (8) *во всех точках* $(x,t) \in Q$.

Сформулируем вторую краевую задачу для уравнения (8).

Задача 1. *Найти регулярное решение* $u(x,t)$ *уравнения* (8) *в области* Q, *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad t > 0$$

и начальным условиям

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t) = 0, \quad \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha}u(x,t) = 0. \tag{9}$$

Решение соответствующего (8) однородного уравнения

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1}u + D_{0t}^{\alpha}u = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + AD_{0t}^{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{10}$$

ищем в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Подставляя эту форму решения в (10), для определения $X(x)$ получим:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0, \tag{11}$$

где $\lambda = \mathrm{const}$.

Как известно, решения спектральной задачи (11) имеют вид

$$X_0(x) = \frac{1}{l},\ \ \lambda_0 = 0;\ \ X_k(x) = \frac{2}{l}\cos\Big(\frac{\pi k}{l}x\Big),\ \ \lambda_k = \Big(\frac{\pi k}{l}\Big)^2,\ \ k = 1, 2, \ldots\ . \tag{12}$$

Найдем решение неоднородного уравнения Аллера—Лыкова (8) в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям $X_k(x)$ задачи (11):

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) X_k(x). \tag{13}$$

Предположим, что функцию $f(x,t)$ можно разложить в интервале $(0,l)$ в ряд Фурье по косинусам:

$$f(x,t) = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\cos\Big(\frac{\pi k}{l}x\Big),$$

$$f_0(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)d\xi, \quad f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\cos\Big(\frac{\pi k}{l}\xi\Big)d\xi. \tag{14}$$

В силу теоремы В. А. Стеклова [18, §22.3, с. 342] разложение (14) справедливо, если

$$f(x,t) \in C^2\left(\bar{Q}\right), \quad f(0,t) = f(l,t) = 0, \tag{15}$$

и при любом фиксированном $t \geqslant 0$ функция $f(x,t)$ имеет кусочно-непрерывную производную по x с точками разрыва первого рода.

Подставляя предполагаемую форму решения (13) в уравнение (8) и начальные условия (9), с учетом (12), (14) будем иметь:

$$\begin{gathered}\frac{A_1}{l} D_{0t}^{\alpha+1} u_0(t) + \frac{1}{l} D_{0t}^{\alpha} u_0(t) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \cos\Big(\frac{\pi k}{l}x\Big)\Big\{A_1 D_{0t}^{\alpha+1} u_k(t) + D_{0t}^{\alpha} u_k(t) + D\Big(\frac{\pi k}{l}\Big)^2 u_k(t) + \\ + A\Big(\frac{\pi k}{l}\Big)^2 D_{0t}^{\alpha} u_k(t)\Big\} = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\cos\Big(\frac{\pi k}{l}x\Big),\end{gathered}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1} u_k(t) = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha} u_k(t) = 0.$$

Эти равенства возможны тогда и только тогда, когда

$$D_{0t}^{\alpha+1} u_0(t) + \frac{1}{A_1} D_{0t}^{\alpha} u_0(t) = \frac{l}{2A_1} f_0(t), \tag{16}$$

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1} u_0(t) = 0, \quad \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha} u_0(t) = 0 \tag{17}$$

и для всех $k = 1,\ 2,\ \ldots$

$$D_{0t}^{\alpha+1}u_k(t) + a_k D_{0t}^{\alpha}u_k(t) + b_k u_k(t) = \frac{f_k(t)}{A_1}, \tag{18}$$

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}u_k(t) = 0, \quad \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha}u_k(t) = 0, \tag{19}$$

где

$$a_k = \frac{1 + A\lambda_k}{A_1}, \quad b_k = \frac{\lambda_k D}{A_1}, \quad \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2.$$

Подействовав на уравнение (16) оператором дробного интегрирования порядка α с учетом обобщенной формулы Ньютона—Лейбница [19, форм. (1.2.8), с. 15], получим

$$\frac{du_0}{dt} + \frac{1}{A_1}u_0(t) = \frac{l}{2A_1}D_{0t}^{-\alpha}f_0(t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha}u_0(t) + \\ + \left(\frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}u_0(t). \tag{20}$$

Проинтегрируем неоднородное уравнение (20) с учетом начальных условий (17), в результате получим решение задачи (16), (17):

$$u_0(t) = \frac{l}{2A_1}\int_0^t e^{\frac{\xi-t}{A_1}} D_{0\xi}^{-\alpha} f_0(\xi)d\xi.$$

Прежде чем выписывать решение задачи (18), (19), отметим, что обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами исследовались достаточно интенсивно. Для них найдены явные представления начальных и краевых задач в терминах обобщенных функций Миттаг—Леффлера и функций Райта. Подробное изложение этих результатов и библиографию по теме можно найти в работах [20, 21].

Для нашей работы, чтобы избежать технически непростого аппарата теории специальных функций, возникающих при решении этих уравнений, позволим себе воспользоваться результатами работы [8], где решение однородного уравнения (10) получено путем редукции его к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода со степенным ядром и последующим решением его методом последовательных приближений.

Подействовав на уравнение (18) оператором дробного интегрирования порядка $\alpha + 1$, получим

$$u_k(t) + \int_0^t u_k(\tau)\left[a_k + \frac{b_k}{\Gamma(\alpha+1)(t-\tau)^{-\alpha}}\right]d\tau = F_k(t), \tag{21}$$

где

$$F_k(t) = \frac{1}{A_1\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha} f_k(\tau)d\tau.$$

Найдем решение интегрального уравнения (21) аналогично тому, как это было проделано в [8]:

$$u_k(t) = F_k(t) + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\sum_{s=0}^{n+1}\binom{n+1}{s}\frac{a_k^{n+1-s}b_k^s}{\Gamma(n+1+s\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{n+s\alpha}F_k(t)d\tau =$$
$$= \frac{1}{A_1\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t \frac{f_k(\tau)}{(t-\tau)^{-\alpha}}d\tau + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\sum_{s=0}^{n+1}\binom{n+1}{s}\times$$
$$\times\frac{a_k^{n+1-s}b_k^s}{A_1\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1+s\alpha)}\int_0^t\int_0^\tau \frac{(t-\tau)^{n+s\alpha}f_k(\tau_1)}{(\tau-\tau_1)^{-\alpha}}d\tau_1 d\tau, \quad (22)$$

где $\binom{n+1}{s} = \dfrac{(n+1)!}{s!(n+1-s)!}$.

В правой части (22) рассмотрим двойной интеграл. Поменяв порядок интегрирования и сделав замену $\tau = \tau_1 + z\,(t-\tau)$, находим

$$\int_0^t\int_0^\tau \frac{(t-\tau)^{n+s\alpha}f_k(\tau_1)}{(\tau-\tau_1)^{-\alpha}}d\tau_1 d\tau = \int_0^t f_k(\tau_1)d\tau_1\int_{\tau_1}^t (t-\tau)^{n+s\alpha}(\tau-\tau_1)^{\alpha}d\tau =$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+s\alpha+1)}{\Gamma(n+2+s\alpha+\alpha)}\int_0^t (t-\tau_1)^{n+s\alpha+\alpha+1}f_k(\tau_1)d\tau_1.$$

Или окончательно

$$u_k(t) = \frac{1}{A_1\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t \frac{f_k(\tau)}{(t-\tau)^{-\alpha}}d\tau +$$
$$+\frac{1}{A_1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\sum_{s=0}^{n+1}\binom{n+1}{s}\frac{a_k^{n+1-s}b_k^s}{\Gamma(n+2+s\alpha+\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{n+s\alpha+\alpha+1}f_k(\tau)d\tau =$$
$$= \frac{1}{A_1}\int_0^t\Bigg[\frac{(t-\tau)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} +$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\sum_{s=0}^{n+1}\binom{n+1}{s}\frac{{a_k}^{n+1-s}{b_k}^s}{\Gamma(n+2+s\alpha+\alpha)}(t-\tau)^{n+s\alpha+\alpha+1}\Bigg]f_k(\tau)d\tau.$$

Таким образом, согласно (13), искомое решение задачи (8), (9) запишется в виде

$$u(x,t) = \frac{l}{2A_1}\int_0^t e^{\frac{1}{A_1}(\xi-t)}D_{0\xi}^{-\alpha}f_0\,(\xi)\,d\xi +$$
$$+\frac{1}{A_1}\int_0^t\int_0^l G^{\alpha}\,(x,\xi,t-\tau)\,f\,(\xi,\tau)\,d\xi d\tau, \quad (23)$$

где

$$G^{\alpha}\,(x,\xi,t-\tau) = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}E_k\,(t,\tau)\cos\Big(\frac{\pi k}{l}x\Big)\cos\Big(\frac{\pi k}{l}\xi\Big),$$

$$E_k\,(t,\tau) = \frac{(t-\tau)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\sum_{s=0}^{n+1}\binom{n+1}{s}\frac{{a_k}^{n+1-s}{b_k}^s(t-\tau)^{n+s\alpha+\alpha+1}}{\Gamma(n+2+s\alpha+\alpha)}.$$

Сходимость ряда (23) и рядов производных $D_{0t}^{\alpha+1}u(x,t)$, $D_{0t}^{\alpha}u(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$, $D_{0t}^{\alpha}u_{xx}(x,t)$ обеспечивается требованием соблюдения условий (15).

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $f(x,t) \in C^2\left(\overline{Q}\right)$, $\tau \in C^3[0,l]$, $\nu \in C^2[0,l]$ *и выполнены условия* (7) *и условия согласования* $f(0,t) = f(l,t) = 0$. *Тогда регулярное решение* $u(x,t)$ *задачи 1 представимо в виде* (23).

2. Единственность решения задачи для неоднородного уравнения Аллера—Лыкова с дробной по времени производной. Обозначим $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$. В предположении, что $D(w) = k(x,t)$ — известная функция координаты и времени, рассмотрим в области Q_T вторую краевую задачу для неоднородного уравнения (1) с начальными условиями (3) и однородными краевыми условиями

$$w_x(0,t) = w_x(l,t) = 0, \quad t > 0. \tag{24}$$

В дальнейшем будем предполагать существование регулярного решения задачи (1), (3), (24) и будем использовать обозначения

$$\|w\|_0^2 = \int_0^l w^2(x,t)dx, \quad D_{0t}^{\alpha}w(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{w(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}},$$

$$\|D_{0t}^{\alpha}w\|_{2,Q_t}^2 = \int_0^t \|D_{0t}^{\alpha}w(x,\tau)\|_0^2\, d\tau.$$

Теорема 2. *Пусть* $k_x(x,t)$, $k_t(x,t)$, $f(x,t) \in C\left(\bar{Q}_T\right)$, $\nu(x) \in C[0,l]$, $\tau(x) \in C^2[0,l]$, $0 < c_1 \leqslant k(x,t) \leqslant c_2$, $k_t(x,t) \leqslant 0$ *всюду на* $\bar{Q}_T$ *и выполнены условия* $\tau(0) = \tau(l) = 0$, $\tau'(0) = \tau'(l) = 0$. *Тогда для решения задачи* (1), (3), (24) *справедлива априорная оценка*

$$\|D_{0t}^{\alpha}w\|_0^2 + \|D_{0t}^{\alpha}w_x\|_{2,Q_t}^2 + \|D_{0t}^{\alpha}w\|_{2,Q_t}^2 \leqslant \\ \leqslant M_1(t)\left(\|f\|_{2,Q_t}^2 + \left\|\tau'(x)\right\|_0^2 + \left\|\tau''(x)\right\|_0^2 + \|\nu(x)\|_0^2\right). \tag{25}$$

Доказательство. Введем новую неизвестную функцию $v(x,t)$, полагая

$$w(x,t) = v(x,t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau(x)$$

так, что $v(x,t)$ представляет собой отклонение функции $w(x,t)$ от известной функции $\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau(x)$. С учетом $D_{0t}^{\alpha+1}t^{\alpha-1} = 0$, $D_{0t}^{\alpha}t^{\alpha-1} = 0$ [19, §1.2, с. 15] имеем, что функция $v(x,t)$ будет определяться как решение уравнения

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1}v + D_{0t}^{\alpha}v - (kv_x)_x - AD_{0t}^{\alpha}v_{xx} = F(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{26}$$

с начальными условиями

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}v(x,t) = \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}\left(w(x,t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau(x)\right) =$$

$$= \tau(x) - \frac{\tau(x)}{\Gamma(\alpha)} \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1} t^{\alpha-1} = 0, \quad (27)$$

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha} v(x,t) = \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha}\Big(w(x,t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau(x)\Big) = \nu(x) - \frac{\tau(x)}{\Gamma(\alpha)} \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha} t^{\alpha-1} = \nu(x)$$

и граничными условиями

$$v_x(0,t) = v_x(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{28}$$

где

$$F(x,t) = f(x,t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(k_x\tau'(x) + k\tau''(x)\right).$$

Получим априорную оценку в терминах дробной производной Римана—Лиувилля, для этого умножим уравнение (26) скалярно на $D_{0t}^{\alpha} v$:

$$\begin{aligned} A_1\left(D_{0t}^{\alpha+1} v, D_{0t}^{\alpha} v\right) + \left(D_{0t}^{\alpha} v, D_{0t}^{\alpha} v\right) - \\ - \left((kv_x)_x, D_{0t}^{\alpha} v\right) - A\left(D_{0t}^{\alpha} v_{xx}, D_{0t}^{\alpha} v\right) = \left(F, D_{0t}^{\alpha} v\right), \end{aligned} \tag{29}$$

где

$$(w,v) = \int_0^l wv dx, \quad (w,w) = \|w\|_0^2.$$

Преобразуем слагаемые тождества (29) с учетом (27), (28):

$$\begin{aligned} &A_1\left(D_{0t}^{\alpha+1} v, D_{0t}^{\alpha} v\right) = \\ &= A_1 \int_0^l \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t \frac{v(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v(x,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} dx = \\ &= \frac{A_1}{2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t}\left(D_{0t}^{\alpha} v\right)^2 dx = \frac{A_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|D_{0t}^{\alpha} v\|_0^2, \end{aligned}$$

$$\left(D_{0t}^{\alpha} v, D_{0t}^{\alpha} v\right) = \|D_{0t}^{\alpha} v\|_0^2,$$

$$\begin{aligned} &\left((kv_x)_x, D_{0t}^{\alpha} v\right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l (kv_x)_x \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} dx = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left\{ kv_x(x,t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\Big|_0^l - \int_0^l kv_x(x,t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} dx \right\} = \\ &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l kv_x(x,t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &A\left(D_{0t}^{\alpha} v_{xx}, D_{0t}^{\alpha} v\right) = \frac{A}{\Gamma^2(1-\alpha)} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v_{xx}(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} dx = \\ &= \frac{A}{\Gamma^2(1-\alpha)}\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\Big|_0^l - \right. \end{aligned}$$

$$-\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{v_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{v_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha}dx\Bigg\} =$$
$$= -A\int_0^l \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{v_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha}\right)^2 dx = -A\left\|D_{0t}^\alpha v_x\right\|_0^2.$$

Для оценки правой части воспользуемся неравенством Коши—Буняковского и ε-неравенством [22, §2.7, форм. (46), с. 86], которое справедливо для любого числа $\varepsilon > 0$:

$$(F, D_{0t}^\alpha v) \leqslant \frac{1}{4\varepsilon}\left\|F\right\|_0^2 + \varepsilon\left\|D_{0t}^\alpha v\right\|_0^2.$$

С учетом полученных неравенств из (29) получим

$$\frac{A_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|D_{0t}^\alpha v\right\|_0^2 + \left\|D_{0t}^\alpha v\right\|_0^2 +$$
$$+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^l k v_x(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{v_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha}dx + A\left\|D_{0t}^\alpha v_x\right\|_0^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{4\varepsilon}\left\|F\right\|_0^2 + \varepsilon\left\|D_{0t}^\alpha v\right\|_0^2. \quad (30)$$

Проинтегрируем (30) по τ от 0 до t:

$$\frac{A_1}{2}\left\|D_{0t}^\alpha v\right\|_0^2 + \int_0^t \left\|D_{0t}^\alpha v(x,\tau)\right\|_0^2 d\tau +$$
$$+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t d\tau\int_0^l k v_x(x,\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^\tau \frac{v_x(x,\tau_1)\,d\tau_1}{(\tau-\tau_1)^\alpha}dx +$$
$$+A\int_0^t \left\|D_{0t}^\alpha v_x(x,\tau)\right\|_0^2 d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{4\varepsilon}\left\|F\right\|_{2,Q_t}^2 + \varepsilon\int_0^t \left\|D_{0t}^\alpha v(x,\tau)\right\|_0^2 d\tau + \frac{A_1}{2}\left\|D_{0t}^\alpha v(x,0)\right\|_0^2.$$

Предположим, что $k_t \leqslant 0$, тогда неотрицательность тройного интеграла, стоящего в левой части последнего неравенства, доказывается так же, как в [2, §1.5, с. 43]. Усиливая последнее неравенство, получим

$$A_1\left\|D_{0t}^\alpha v\right\|_0^2 + 2A\left\|D_{0t}^\alpha v_x\right\|_{2,Q_t}^2 + 2\varepsilon_1\left\|D_{0t}^\alpha v\right\|_{2,Q_t}^2 \leqslant \frac{1}{2\varepsilon}\left\|F\right\|_{2,Q_t}^2 + A_1\left\|\nu(x)\right\|_0^2,$$

где $\varepsilon_1 = 1 - \varepsilon$. Откуда следует оценка

$$\left\|D_{0t}^\alpha v\right\|_0^2 + \left\|D_{0t}^\alpha v_x\right\|_{2,Q_t}^2 + \left\|D_{0t}^\alpha v\right\|_{2,Q_t}^2 \leqslant M\left(\left\|F\right\|_{2,Q_t}^2 + \left\|\nu(x)\right\|_0^2\right),$$

или, возвращаясь к $w\,(x,t)$, получим (25). Теорема доказана. □

Замечание 1. Из (25) следует единственность решения задачи (1), (3), (24).

Действительно, пусть w — решение однородной задачи, т. е. $f = \tau = \nu = 0$. Тогда из (25) имеем

$$\|D_{0t}^{\alpha}w\|_0^2 + \|D_{0t}^{\alpha}w_x\|_{2,Q_t}^2 + \|D_{0t}^{\alpha}w\|_{2,Q_t}^2 = 0.$$

Применяя обобщенную формулу Ньютона—Лейбница

$$D_{0t}^{-\alpha}D_{0t}^{\alpha}w(x,t) = w(x,t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-1}w(x,t),$$

в частности, получим

$$w(x,t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-1}w(x,t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau(x) = 0 \text{ в } Q_T.$$

Учитывая произвольность T, получаем, что $w\,(x,t) = 0$ во всех точках $(x,t) \in Q$.

Заключение. В работе рассмотрены вопросы однозначной разрешимости второй краевой задачи для уравнения Аллера—Лыкова с дробной производной Римана—Лиувилля. Рассматриваемое уравнение является обобщением уравнения Аллера—Лыкова посредством введения понятия фрактальной скорости изменения влажности, которая объясняет наличие потоков против потенциала влажности. С помощью метода энергетических неравенств для решения задачи получена априорная оценка в терминах дробной производной Римана—Лиувилля, из которой следует единственность решения. Существование решения второй краевой задачи для случая с постоянными коэффициентами доказано методом Фурье.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Это исследование не получило специального финансирования.

Благодарность. Авторы выражают благодарность и глубокую признательность заведующему отделом дробного исчисления ИПМА КБНЦ РАН, д.ф.-м.н. Арсену Владимировичу Псху за советы и ценные замечания при работе над данной статьей.

Библиографический список

1. Чудновский А. Ф. *Теплофизика почв.* М.: Наука, 1976. 352 с.
2. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит, 2003. 352 с.
3. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии.* М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
4. Кулик В. Я. Исследование движения почвенной влаги с точки зрения инвариантности относительно непрерывных групп преобразований / *Исследование процессов обмена энергией и веществом в системе почва-растение-воздух.* Л.: Наука, 1972.
5. Архестова С. М., Шхануков–Лафишев М. Х. Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова с нелокальным условием // *Изв. КБНЦ РАН*, 2012. №3. С. 7–16.
6. Лафишева М. М., Керефов М. А., Дышекова Р. В. Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова с нелокальным условием // *Владикавк. матем. журн.*, 2017. Т. 19, №1. С. 50–58.

7. Геккиева С. Х. Первая краевая задач для уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова с дробной по времени производной / *Устойчивое развитие: проблемы, концепции, модели*: Мат. Всерос. конф. с междун. участием. Нальчик: КБНЦ РАН, 2017. С. 99–102.
8. Геккиева С. Х., Керефов М. А. Краевые задачи для обобщенного уравнения влагопереноса // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2018. №1(21). С. 21–31. doi: 10.18454/2079-6641-2018-21-1-21-31.
9. Геккиева С. Х. Нелокальная краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2018. №4(24). С. 19–28. doi: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-19-28.
10. Геккиева С. Х. Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной по времени // *Докл. АМАН*, 1994. Т. 1, №1. С. 17–18.
11. Agrawal O. P. Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain // *Nonlinear Dynamics*, 2002. vol. 29, no. 1. pp. 145–155. doi: 10.1023/A:1016539022492.
12. Нахушева В. А. *Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов*. М.: Наука, 2006. 173 с.
13. Turmetov B. Kh., Torebek B. T. On solvability of some boundary value problems for a fractional analogue of the Helmholtz equation // *New York J. Math.*, 2014. vol. 20. pp. 1237–1251, http://nyjm.albany.edu/j/2014/20-57p.pdf.
14. Masaeva O. Kh. Uniqueness of solutions to Dirichlet problems for generalized Lavrent'ev–Bitsadze equations with a fractional derivative // *Electron. J. Differ. Equ.*, 2017. vol. 2017. pp. 1–8, https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2017/74/masaeva.pdf.
15. Шогенов В. Х., Кумыкова С. К., Шхануков–Лафишев М. Х. Обобщенное уравнение переноса и дробные производные // *Докл. НАН Украины*, 1997. №12. С. 47–55.
16. Керефов М. А. *Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной*: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Нальчик, 2000. 175 с.
17. Янгарбер В. А. О смешанной задаче для модифицированного уравнения влагопереноса // *ПМТФ*, 1967. №1. С. 247–254.
18. Владимиров В. С. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1981. 512 с.
19. Псху А. В. *Уравнения в частных производных дробного порядка*. М.: Наука, 2005. 199 с.
20. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and applications of fractional differential equations* / North-Holland Mathematics Studies. vol. 204. Amsterdam: Elsevier, 2006. xv+523 pp.
21. Псху А. В. Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // *Матем. сб.*, 2011. Т. 202, №4. С. 111–122. doi: 10.4213/sm7645.
22. Самарский А. А. *Теория разностных схем*. М.: Наука, 1971. 552 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 607–621
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1686

MSC: 35R11, 35Q35, 35E99

Second boundary-value problem for the generalized Aller–Lykov equation

***M. A. Kerefov*[1], *S. Kh. Gekkieva*[2]**

[1] Kabardino-Balkarian State University,
173, Chernyshevskogo st., Nal'chik, 360004, Russian Federation.
[2] Institute of Applied Mathematics and Automation
of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS,
89 a, Shortanova st., Nal'chik, 360000, Russian Federation.

Abstract

The equations that describe a new type of wave motion arise in the course of mathematical modeling for continuous media with memory. This refers to differential equations of fractional order, which form the basis for most mathematical models describing a wide class of physical and chemical processes in media with fractal geometry. The paper presents a qualitatively new equation of moisture transfer, which is a generalization of the Aller–Lykov equation, by introducing the concept of the fractal rate of change in humidity clarifying the presence of flows affecting the potential of humidity. We have studied the second boundary value problem for the Aller–Lykov equation with the fractional Riemann–Liouville derivative. The existence of a solution to the problem has been proved by the Fourier method. To prove the uniqueness of the solution we have obtained an a priori estimate, in terms of a fractional Riemann–Liouville using the energy inequality method.

Keywords: second boundary-value problem, Aller–Lykov equation, Fourier method, fractional Riemann–Liouville operator of fractional integro-differentiation, method of energy inequalities.

Received: 5$^{\text{th}}$ April, 2019 / Revised: 22$^{\text{nd}}$ August, 2019 /
Accepted: 11$^{\text{th}}$ November, 2019 / First online: 25$^{\text{th}}$ November, 2019

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely

Research Article

Please cite this article in press as:
K e r e f o v M. A., G e k k i e v a S. Kh. Second boundary-value problem for the generalized Aller–Lykov equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 607–621. doi: 10.14498/vsgtu1686 (In Russian).

Authors' Details:
Marat A. Kerefov https://orcid.org/0000-0002-7442-5402
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science; e-mail: kerefov@mail.ru

Sakinat Kh. Gekkieva https://orcid.org/0000-0002-2135-2115
Cand. Phys. & Math. Sci.; Scientific Secretary; e-mail: gekkieva_s@mail.ru

responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research did not funded by a specific project grant.

Acknowledgments. The authors express their gratitude and deep appreciation to the head of the Dept. of fractional calculus of the IAMA KBSC RAS, Dr. Phys. & Math. Sci. Arsen Vladimirovich Pskhu for advice and valuable comments at different stages of this work.

References

1. Chudnovsky A. F. *Teplofizika pochv* [Thermophysics of soils]. Moscow, Nauka, 1976, 352 pp. (In Russian)
2. Nakhushev A. M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional calculus and its applications]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 352 pp. (In Russian)
3. Nakhushev A. M. *Uravneniia matematicheskoi biologii* [Equations of mathematical biology]. Moscow, Vysshaia Shkola, 1995, 301 pp. (In Russian)
4. Kulik V. Ya. The study of the soil moisture movement from the point of view of invariance of continuous groups of transformations, In: *Issledovanie processov obmena jenergiej i veshhestvom v sisteme pochva-rastenie-vozduh* [The Study of the Processes of Energy and Mass-Transfer in the System Soil-Plant-Air]. Leningrad, Nauka, 1972 (In Russian).
5. Arkhestova S. M., Shkhanukov–Lafishev M. Kh. Difference schemes for the Aller–Lykov moisture transfer equation with a nonlocal condition, *Izvestiya KBSC RAS*, 2012, no. 3, pp. 7–16 (In Russian).
6. Lafisheva M. M., Kerefov M. A., Dyshekova R. V. Difference schemes for the Aller–Lykov moisture transfer equations with a nonlocal condition, *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2017, vol. 19, no. 1, pp. 50–58 (In Russian).
7. Gekkieva S. Kh. The first boundary-value problem for the Aller–Lykov moisture transfer equations with a fractional time derivative, In: *Ustoychivoe razvitie: problemy, kontseptsii, modeli* [Sustainable Development. Problems, Concepts, Models]. Nal'chik, KBSC RAS, 2017, pp. 99–102 (In Russian).
8. Gekkieva S. Kh., Kerefov M. A. The boundary-value problem for the generalized moisture transfer equation, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki*, 2018, no. 1(21), pp. 21–31 (In Russian). doi: 10.18454/2079-6641-2018-21-1-21-31.
9. Gekkieva S. Kh. Nonlocal boundary-value problem for the generalized Aller–Lykov moisture transport equation, *Vestnik KRAUNTs. Fiz.-mat. nauki*, 2018, no. 4(24), pp. 19–28 (In Russian). doi: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-19-28.
10. Gekkieva S. Kh. A boundary-value problem for the generalized transport equation with a fractional time derivative, *Dokl. Adygskoi (Cherkesskoi) Mezhdunar. Akad. Nauk*, 1994, vol. 1, no. 1, pp. 17–18 (In Russian).
11. Agrawal O. P. Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain, *Nonlinear Dynamics*, 2002, vol. 29, no. 1, pp. 145–155. doi: 10.1023/A:1016539022492.
12. Nakhusheva V. A. *Differentsial'nye uravneniia matematicheskikh modelei nelokal'nykh protsessov* [Differential Equations of Mathematical Models of Nonlocal Processes]. Moscow, Nauka, 2006, 173 pp. (In Russian)
13. Turmetov B. Kh., Torebek B. T. On solvability of some boundary value problems for a fractional analogue of the Helmholtz equation, *New York J. Math.*, 2014, vol. 20, pp. 1237–1251, http://nyjm.albany.edu/j/2014/20-57p.pdf.
14. Masaeva O. Kh. Uniqueness of solutions to Dirichlet problems for generalized Lavrent'ev–Bitsadze equations with a fractional derivative, *Electron. J. Differ. Equ.*, 2017, vol. 2017, pp. 1–8, https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2017/74/masaeva.pdf.
15. Shogenov V. Kh., Kumykova S. K., Shkhanukov–Lafishev M. Kh. Generalized transport equations and fractional derivatives, *Dop. Nats. Akad. Nauk Ukr.*, no. 12, pp. 47–55 (In Russian).

16. Kerefov M. A. *Boundary-value problems for a modified moisture transfer equation with a fractional time derivative*, Cand. Phys. & Math. Sci. Diss.. Nal'chik, 2000, 175 pp. (In Russian)
17. Yangarber V. A. The mixed problem for a modified moisture-transfer equation, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1967, vol. 8, no. 1, pp. 62–64. doi: 10.1007/BF00913245.
18. Vladimirov V. S. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1981, 512 pp. (In Russian)
19. Pskhu A. V. *Uravneniia v chastnykh proizvodnykh drobnogo poriadka* [Partial differential equations of fractional order]. Moscow, Nauka, 2005, 199 pp. (In Russian)
20. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Amsterdam, Elsevier, 2006, xv+523 pp.
21. Pskhu A. V. Initial-value problem for a linear ordinary differential equation of noninteger order, *Sb. Math.*, 2011, vol. 202, no. 4, pp. 571–582. doi: 10.1070/SM2011v202n04ABEH004156.
22. Samarskiy A. A. *Teoriia raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1971, 552 pp. (In Russian)