Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23, № 4. С. 622–645
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1721

УДК 517.956.6

Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением

Ю. К. Сабитова

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
Россия, 453103, Стерлитамак, пр-т Ленина, 37.

Аннотация

Для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с характеристическим вырождением исследована первая граничная задача в прямоугольной области. Установлен критерий единственности решения задачи. Ранее при доказательстве единственности решений краевых задач для уравнений смешанного типа использовали принцип экстремума или метод интегральных тождеств. Единственность решения данной задачи установлена на основании полноты системы собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. Решение задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций. При обосновании сходимости полученного ряда возникает проблема малых знаменателей более сложной структуры, чем в известных работах, относительно параметра, зависящего от длин сторон прямоугольника из гиперболической части области и показателя степени вырождения уравнения. В связи с этим установлены оценки об отделенности от нуля с соответствующей асимптотикой в случаях, когда данный параметр представляет собой натуральное, рациональное и алгебраическое иррациональное число степени два. Если данный параметр не является алгебраическим иррациональным числом степени два, то решения задачи в виде суммы ряда не существует. С помощью полученных оценок обоснована равномерная сходимость построенного ряда в классе регулярных решений при некоторых достаточных условиях относительно граничных функций. Также доказана устойчивость решения задачи относительно граничных функций в нормах пространства суммируемых с квадратом функций и в пространстве непрерывных функций.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа с характеристическим вырождением, задача Дирихле, критерий единственности, существование, малые знаменатели.

Получение: 14 июля 2019 г. / Исправление: 23 октября 2019 г. / Принятие: 11 ноября 2019 г. / Публикация онлайн: 12 декабря 2019 г.

Научная статья

Образец для цитирования

Сабитова Ю. К. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 4. С. 622–645. doi: 10.14498/vsgtu1721.

Сведения об авторе

Юлия Камилевна Сабитова https://orcid.org/0000-0002-7969-007X
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент каф. математического анализа; e-mail: sabitovauk@rambler.ru

Введение. Для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа

$$Lu = u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)\, |y|^n u_{yy} + a|y|^{n-1} u_y - bu = 0 \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) \mid 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, где $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 < a < 1$, $0 < n < a + 1$, b — заданные действительные числа, поставим следующую граничную задачу.

Задача Дирихле. *Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям*

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1_x(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{2}$$

$$\lim_{y \to 0+0} y^a u_y(x, y) = \lim_{y \to 0-0} (-y)^a u_y(x, y); \tag{3}$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-; \tag{4}$$

$$u(0, y) = u(l, y) = 0, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta; \tag{5}$$

$$u(x, \beta) = f(x), \quad u(x, -\alpha) = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{6}$$

где $D_- = D \cap \{y < 0\}$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $f(x)$ и $g(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям $f(0) = f(l) = 0$, $g(0) = g(l) = 0$.

М. В. Келдыш [1] впервые исследовал более общее эллиптическое уравнение второго порядка от двух переменных, чем уравнение (1), при $y > 0$, с характеристическим вырождением. Он показал, что корректность первой граничной задачи существенным образом зависит от показателя степени вырождения и коэффициента при младшей производной u_y. Опираясь на эту работу, И. Л. Кароль [2] исследовал задачу Трикоми для уравнения смешанного типа (1) при $n = 1$ и $b = 0$, т.е. для уравнения

$$u_{xx} + yu_{yy} + au_y = 0 \tag{7}$$

в области G, где G — область плоскости XOY, ограниченная простой жордановой кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $O(0, 0)$ и $A(1, 0)$, характеристиками OC и AC уравнения, расположенными в полуплоскости $y < 0$. Им было доказано, что постановка краевых задач для уравнений смешанного типа с характеристическим вырождением (7) в области G зависит от коэффициента a и класса решений уравнения (7). Это является существенным отличием от постановки краевых задач для уравнений с нехарактеристическим вырождением. В качестве примера: задача Трикоми при значении коэффициента $a < 0$ недоопределена, а уже при $a > 0$ — переопределена.

И. Л. Кароль для уравнения (7) в области G при $0 < a < 1$ исследовал задачу Трикоми, где на линии перехода вводится условие сопряжения с весом:

$$\lim_{y \to 0+0} y^a u_y(x, y) = k \lim_{y \to 0-0} y^a u_y(x, y), \quad 0 < x < 1,$$

где $k = -1$ при $0 < a < 1/2$, $k = 1$ при $1/2 < a < 1$.

Задача Трикоми при $a < 0$ становится корректно поставленной, если условия склеивания ввести по-иному. С. С. Исамухамедов [3] впервые исследовал задачу Трикоми для уравнения (7) при $a = -n + a_0$, $a_0 \in (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$, где эллиптический контур Γ предполагается «нормальным» по терминологии Трикоми, т.е. имеет вид $(x-1/2)^2+4y=1/4$. На линии вырождения кроме условия непрерывности решения также задавалось условие склеивания

$$\nu_1(x)=(-1)^n\nu_2(x), \tag{8}$$

где

$$\nu_1(x)=\lim_{y\to 0+} y^a[u_y+B_a^+(u)],\quad \nu_2(x)=\lim_{y\to 0-}(-y)^a[u-B_a^-(x,y,\tau)]_y,$$

$B_a^+(u)$ — некоторый дифференциальный оператор, $B_a^-(x,y,\tau)$ — решение уравнения (7), удовлетворяющее условиям

$$B_a^-(x,0,\tau)=\tau(x),\quad \lim_{y\to 0-}(-y)^a\frac{\partial}{\partial y}B_a^-(x,y,\tau)=0.$$

М. Ю. Крикунов [4] изучал задачу Трикоми для уравнения (7) при $a=$ $=-n+1/2$. Р. С. Хайруллин [5] для уравнения (7) в случае когда $a\leqslant -1/2$ в смешанной области G, где кривая Γ является «нормальным» контуром, доказал однозначную разрешимость задачи Трикоми методом интегральных уравнений.

Р. И. Сохадзе [6] для уравнения (7) при $0<a<1$ исследовал первую краевую задачу в прямоугольной области D (где $l=1$) при условии, что при всех $n\in\mathbb{N}$

$$J_{a-1}(2\pi k\sqrt{\alpha})I_{1-a}(2\pi k\sqrt{\beta})+J_{1-a}(2\pi k\sqrt{\alpha})I_{a-1}(2\pi k\sqrt{\beta})\neq 0,$$

где $J_{1-a}(z)$ и $I_{1-a}(z)$ — функции Бесселя первого рода порядка $1-a$ с действительными и чисто мнимыми аргументами соответственно. А в другой работе этого же автора [7] для уравнения (7) при $a>1$, где a — фиксированное целое число, изучена задача Дирихле со следующими весовыми условиями склеивания:

$$\lim_{y\to 0+0} y^{a-1}u(x,y)=\lim_{y\to 0-0}(-y)^{a-1}u(x,y),\quad 0\leqslant x\leqslant 1;$$
$$\lim_{y\to 0+0} y^{a}u_y(x,y)=\lim_{y\to 0-0}(-y)^{a}u_y(x,y),\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

В этих работах методом разделения переменных построены частные решения уравнения (7) при указанных значениях a. Решение задачи формально построено в виде суммы ряда, но отсутствуют четкие доказательства единственности поставленных задач и не приводятся обоснования сходимости рядов.

Для уравнения смешанного типа второго рода

$$u_{xx}+\operatorname{sgn} y\,|y|^m u_{yy}-b^2u=0,\quad 0<m<2,\quad b=\mathrm{const}\geqslant 0, \tag{9}$$

в прямоугольной области D в зависимости от значений параметра m К. Б. Сабитовым и А. Х. Трегубовой (Сулеймановой) [8] была решена первая граничная задача и видоизмененные задачи. Решение задач построено в виде суммы ряда Фурье. Доказаны теоремы единственности решения задач и найдены достаточные условия сходимости рядов в соответствующих классах решений уравнения (9) при следующих значениях параметра m: $0 < m < 1$, $1 < m < 2$, $m = 1$.

Р. С. Хайруллин [9], используя методы работ [8–10], установил критерий единственности решения задачи Дирихле для уравнения (7) в прямоугольной области D при отрицательных значениях параметра $a \leqslant -1/2$, при этом на линии изменения типа уравнения задаются неклассические условия сопряжения типа (8). Позже в работе [11] он показал существование решения этой задачи.

Отметим также работы А. И. Кожанова [12, 13], И. Е. Егорова [14, 15] и их учеников, где изучались краевые задачи для уравнений смешанного типа функциональными методами.

Автором [16] исследована нелокальная задача, близкая к задаче (2)–(6), для уравнения смешанного типа с нехарактеристическим вырождением вида

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{10}$$

где $K(y) = \operatorname{sgn} y|y|^m$, $m > 0$. Уравнение (10) сводится к уравнению (7) путем замены $x = x$, $z = |y|^{m+2}/(m+2)^2$, где $a = (m+1)/(m+2) \in (1/2, 1)$.

Данная работа является продолжением исследований автора [16–18]. Здесь при всех $a \in (0, 1)$ и $0 < n < a + 1$ установлен критерий единственности решения задачи (2)–(6).

Теорема 1 (Критерий единственности решения). *Если существует решение задачи (2)–(6), то для его единственности необходимо и достаточно, чтобы при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнялись условия*

$$\Delta_k(\alpha, \beta) = J_\nu(p_k\alpha^q)K_\nu(p_k\beta^q) + I_\nu(p_k\beta^q)\overline{Y}_\nu(p_k\alpha^q) \neq 0,$$

где

$$\overline{Y}_\nu(p_k(-y)^q) = \frac{\pi}{2\sin\pi\nu}(J_\nu(p_k(-y)^q) + J_{-\nu}(p_k(-y)^q)),$$

$J_\nu(p_k(-y)^q)$ и $Y_\nu(p_k(-y)^q)$ — функции Бесселя первого и второго рода соответственно, $I_\nu(p_k y^q)$ и $K_\nu(p_k y^q)$ — модифицированные функции Бесселя, $\nu = (1-a)/2q$, $p_k = \lambda_k/q$, $q = (2-n)/2$, $\lambda_k = \sqrt{\mu_k^2 + b}$, $\mu_k = \pi k/l$.

В дальнейшем, не теряя общности, будем считать, что $b \geqslant 0$, так как в противном случае начиная с некоторого номера k_0 при всех $k \geqslant k_0$ выполняется неравенство $\mu_k^2 + b \geqslant 0$. Поэтому знак b не влияет на полученные результаты.

Отметим, что ранее при доказательстве единственности решений краевых задач для уравнений смешанного типа применяли принцип экстремума или метод интегральных тождеств ([19, с. 28–64], [20, с. 295–302], [21, с. 37–58]). В прямоугольной области эти методы не работают. Поэтому здесь единственность решения задачи (2)–(6) установлена на основании полноты системы собственных функций соответствующей спектральной задачи.

Решение задачи (2)–(6) построено в виде суммы ряда

$$u(x, y) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty} u_k(y)\sin\mu_k x, \tag{11}$$

где функция $u_k(y)$ построена и приведена ниже формулой (39). Выражение $\Delta_k(\alpha,\beta)$ является знаменателем этих коэффициентов. Для обоснования сходимости ряда (39) в классе регулярных решений (2)–(4) доказаны следующие утверждения.

Утверждение 1. *Выражение $\Delta_k(\alpha,\beta)$ имеет счетное множество положительных нулей относительно параметра $\alpha_{ql}=\alpha^q/(ql)$.*

В силу этого утверждения возникает проблема малых знаменателей более сложной структуры, чем в известных работах В. И. Арнольда [22, 23].

Для исследования асимптотики нулей представим $\Delta_k(\alpha,\beta)$ в следующем виде:

$$\Delta_k(\alpha,\beta)=I_\nu(p_k\beta^q)\delta_k(\alpha,\beta),$$

где

$$\delta_k(\alpha,\beta)=J_\nu(p_k\alpha^q)\frac{K_\nu(p_k\beta^q)}{I_\nu(p_k\beta^q)}+\overline{Y}_\nu(p_k\alpha^q)=$$
$$=J_\nu(\pi k\tilde{\lambda}_k\alpha_{ql})\frac{K_\nu(\pi k\tilde{\lambda}_k\beta_{ql})}{I_\nu(\pi k\tilde{\lambda}_k\beta_{ql})}+\overline{Y}_\nu(\pi k\tilde{\lambda}_k\alpha_{ql})=\delta_k(\alpha_{ql},\beta_{ql}),$$

$$\tilde{\lambda}_k=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{b}l}{\pi k}\right)^2},\quad \alpha_{ql}=\frac{\alpha^q}{ql},\quad \beta_{ql}=\frac{\beta^q}{ql}.$$

Функция $K_\nu(\pi k\tilde{\lambda}_k\beta_{ql})$ при больших k строго убывает по асимптотической формуле $k^{-1/2}e^{-\pi k\beta_{ql}}$, а функция $I_\nu(\pi k\tilde{\lambda}_k\beta_{ql})$ строго возрастает по формуле $k^{-1/2}e^{\pi k\beta_{ql}}$, поэтому величина $J_\nu(\pi k\tilde{\lambda}_k\alpha_{ql})\frac{K_\nu(\pi k\tilde{\lambda}_k\beta_{ql})}{I_\nu(\pi k\tilde{\lambda}_k\beta_{ql})}$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\overline{Y}_\nu(\pi k\tilde{\lambda}_k\alpha_{ql})$ при больших k. Поэтому достаточно рассмотреть выражение

$$\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql})=\frac{2\sin\pi\nu}{\pi}\overline{Y}_\nu(\pi k\tilde{\lambda}_k\alpha_{ql})=J_\nu(\pi k\tilde{\lambda}_k\alpha_{ql})+J_{-\nu}(\pi k\tilde{\lambda}_k\alpha_{ql}),$$

которое также имеет счетное множество положительных нулей относительно α_{ql}.

Утверждение 2. *Если выполнено одно из следующих условий:*

1) *α_{ql} является произвольным натуральным числом;*
2) *$\alpha_{ql}=d/t$ является произвольным рациональным числом, d, $t\in\mathbb{N}$, $(d,t)=1$, $(t,4)=1$, $d/t\notin\mathbb{N}$,*

то существуют положительные постоянные C_0 и k_0 $(k_0\in\mathbb{N})$, зависящие от α, l, a, q, такие, что для всех $k>k_0$ справедлива оценка

$$|\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql})|\geqslant\frac{C_0}{\sqrt{k}}>0. \tag{12}$$

Если же

3) *α_{ql} является иррациональным алгебраическим числом степени 2,*

то существуют положительные постоянные C_1 *и* k_0 ($k_0 \in \mathbb{N}$), *зависящие от* α, l, a, q, b, ε_0 *и удовлетворяющие неравенству*

$$\varepsilon_0 - 2\alpha_{ql}\Big(\frac{2l\sqrt{b}}{\pi}\Big)^2 > 0,$$

и для всех $k > k_0$ *справедлива оценка*

$$|\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql})| \geqslant \frac{C_1}{k^{3/2}}. \tag{13}$$

Если $\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}) \neq 0$ при всех $k = \overline{1, k_0}$, то существует единственное решение задачи (2)–(6), которое определяется рядом (11).

На основании утверждения 2 при определенных условиях относительно граничных функций $f(x)$ и $g(x)$ доказана равномерная сходимость ряда (11) в классе регулярных решений (2)–(4), т.е. доказаны следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть число* α_{ql} *удовлетворяет условиям* 1), 2) *утверждения* 2, *т.е. выполнена оценка* (12) *при всех* $k > k_0$, *функции* $f(x)$, $g(x) \in C^3[0,l]$, $f(0) = g(0) = 0$, $f(l) = g(l) = 0$, $f''(0) = g''(0) = 0$, $f''(l) = g''(l) = 0$. *Тогда, если* $\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}) \neq 0$ *при всех* $k = \overline{1, k_0}$, *то существует единственное решение задачи* (2)–(6) *и это решение определяется рядом* (11). *Если же* $\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}) = 0$ *при некоторых* $k = s_1, s_2, \ldots, s_m \leqslant k_0$, *то задача* (2)–(6) *разрешима только тогда, когда выполнены условия* (59) *и решение определяется рядом* (60).

Теорема 3. *Пусть число* α_{ql} *является иррациональным алгебраическим числом степени* 2, *т.е. выполнена оценка* (13) *при всех* $k > k_0$, *функции* $f(x)$, $g(x) \in C^4[0,l]$, $f(0) = g(0) = 0$, $f(l) = g(l) = 0$, $f''(0) = g''(0) = 0$, $f''(l) = g''(l) = 0$. *Тогда, если* $\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}) \neq 0$ *при всех* $k = \overline{1, k_0}$, *то существует единственное решение задачи* (2)–(6) *и это решение определяется рядом* (11). *Если же* $\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}) = 0$ *при некоторых* $k = s_1, s_2, \ldots, s_m \leqslant k_0$, *то задача* (2)–(6) *разрешима только тогда, когда выполнены условия* (59) *и решение определяется рядом* (60).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и* $\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}) \neq 0$ *при* $k = \overline{1, k_0}$. *Тогда для решения задачи* (2)–(6) *справедливы оценки*

$$\|u(x,y)\|_{L_2} \leqslant \begin{cases} M_1(\|f\|_{L_2[0,l]} + \|g\|_{L_2[0,l]}) & \text{при} \quad \nu \geqslant 1/2, \\ M_2(\|f'\|_{C[0,l]} + \|g'\|_{C[0,l]}) & \text{при} \quad \nu < 1/2; \end{cases} \tag{14}$$

$$\|u(x,y)\|_{C(\overline{D})} \leqslant \begin{cases} M_3(\|f'\|_{C[0,l]} + \|g''\|_{C[0,l]}) & \text{при} \quad \nu \geqslant 1/2, \\ M_4(\|f'\|_{C[0,l]} + \|g'\|_{C[0,l]}) & \text{при} \quad \nu < 1/2, \end{cases} \tag{15}$$

где M_1, M_2, M_3, M_4 — *положительные постоянные, не зависящие от граничных функций* $f(x)$ *и* $g(x)$.

Ниже приводятся доказательства теорем 1–4.

1. Критерий единственности решения задачи. Пусть $u(x,y)$ является решением задачи (2)–(6). Подставляя произведение $u(x,y) = X(x)Y(y)$

в уравнение (1), относительно функции $X(x)$ получим спектральную самосопряженную задачу:

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{16}$$

$$X(0) = X(l) = 0, \tag{17}$$

где μ — постоянная. Решение спектральной задачи (16), (17) имеет вид

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \mu_k x, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Тогда по системе (18) введем функции

$$u_k(y) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l u(x,y) \sin \mu_k x dx, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

На основании (19) рассмотрим вспомогательные функции

$$u_{\varepsilon,k}(y) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x,y) \sin \mu_k x dx, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{20}$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Дифференцируя дважды равенство (20) при $y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta)$ и учитывая уравнение (1), получим

$$u''_{\varepsilon,k}(y) = \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_{yy}(x,y) \sin \mu_k x dx = (\operatorname{sgn} y) \left[\frac{b^2}{|y|^n} u_{\varepsilon,k}(y) - \frac{a}{|y|} u'_{\varepsilon,k}(y) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{|y|^n} \sqrt{\frac{2}{l}} \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_{xx}(x,y) \sin \mu_k x dx \right]. \tag{21}$$

Интегрируя (21) по частям два раза с учетом условий (5) и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u''_k(y) + (\operatorname{sgn} y) \frac{a}{|y|} u'_k(y) - (\operatorname{sgn}\, y) \frac{b^2 + \mu_k^2}{|y|^n} u_k(y) = 0, \quad y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta). \tag{22}$$

Произведя в уравнении (22) замену при $y > 0$

$$u_k^+(y) = W(p_k y^q) y^{\frac{1-a}{2}}, \quad q = \frac{2-n}{2}, \quad p_k = \frac{\lambda_k}{q}, \quad \lambda_k = \sqrt{\mu_k^2 + b}, \tag{23}$$

получим модифицированное уравнение Бесселя

$$W''(z) + \frac{1}{z} W'(z) - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) W(z) = 0, \quad z = p_k y^q, \quad \nu = \frac{1-a}{2q}. \tag{24}$$

В дальнейшем, не теряя общности, будем считать, что $b \geqslant 0$, так как в противном случае начиная с некоторого номера k_0 при всех $k \geqslant k_0$ выполняется неравенство $\mu_k^2 + b \geqslant 0$.

Общее решение уравнения (24) определяется по формуле

$$W(z) = C_1 I_\nu(z) + C_2 K_\nu(z), \quad z > 0, \tag{25}$$

где $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ — соответственно модифицированные функции Бесселя первого и третьего рода, C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Тогда на основании (23) и (25) общее решение уравнения (22) при $y > 0$ определяется по формуле

$$u_k^+(y) = y^{\frac{1-a}{2}}[a_k I_\nu(p_k y^q) + b_k K_\nu(p_k y^q)], \tag{26}$$

где a_k и b_k — произвольные постоянные.

В уравнении (22) при $y < 0$ произведем замену

$$u_k^-(y) = Z(p_k(-y)^q)(-y)^{\frac{1-a}{2}}, \tag{27}$$

в результате получим уравнение Бесселя

$$Z''(z) + \frac{1}{z}Z'(z) + \Big(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\Big)Z(z) = 0, \quad z = p_k(-y)^q. \tag{28}$$

Общее решение уравнения (28) определяется по формуле

$$Z(z) = C_3 J_\nu(z) + C_4 Y_\nu(z), \quad z < 0, \tag{29}$$

где $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — соответственно функции Бесселя первого и второго рода, C_3 и C_4 — произвольные постоянные. Тогда на основании (27) и (29) общее решение уравнения (22) при $y < 0$ определяется по формуле

$$u_k^-(y) = (-y)^{\frac{1-a}{2}}[c_k J_\nu(p_k(-y)^q) + d_k Y_\nu(p_k(-y)^q)], \tag{30}$$

где c_k и d_k — произвольные постоянные.

Таким образом, функции (19) определяются с учетом формул (26) и (30):

$$u_k(y) = \begin{cases} u_k^+(y), & y > 0, \\ u_k^-(y), & y < 0. \end{cases} \tag{31}$$

С учетом класса решения (2) и (3) в (31) подберем постоянные a_k, b_k, c_k и d_k так, чтобы выполнялись условия сопряжения

$$u_k(0+0) = u_k(0-0), \quad \lim_{y\to 0+0} y^a u_k'(y) = \lim_{y\to 0-0}(-y)^a u_k'(y). \tag{32}$$

Первое из равенств (32) выполнено, если $d_k = -\pi b_k/2$ при любых a_k и c_k, а второе равенство будет иметь место при $n < a+1$ и $c_k = \pi b_k \operatorname{ctg}(\pi\nu)/2 - a_k$, $d_k = -\pi b_k/2$.

Подставив полученные выражения для постоянных c_k и d_k в (31), будем иметь

$$u_k(y) = \begin{cases} y^{\frac{1-a}{2}}[a_k I_\nu(p_n y^q) + b_k K_\nu(p_k y^q)], & y \geqslant 0, \\ (-y)^{\frac{1-a}{2}}[-a_k J_\nu(p_k(-y)^q) + b_k \overline{Y}_\nu(p_k(-y)^q)], & y \leqslant 0, \end{cases} \tag{33}$$

где

$$\overline{Y}_\nu(p_k(-y)^q) = \frac{\pi}{2\sin\pi\nu}[J_\nu(p_k(-y)^q) + J_{-\nu}(p_k(-y)^q)].$$

На основании граничных условий (6) и формулы (19) справедливы равенства

$$u_k(\beta) = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l f(x)\sin\lambda_k x dx = f_k, \quad u_k(-\alpha) = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l g(x)\sin\lambda_k x dx = g_k. \tag{34}$$

Удовлетворяя функции (33) граничным условиям (34), получим систему для нахождения постоянных a_k и b_k:

$$\begin{cases} a_k I_\nu(p_k\beta^q) + b_k K_\nu(p_k\beta^q) = f_k\beta^{\frac{a-1}{2}}, \\ -a_k J_\nu(p_k\alpha^q) + b_k\overline{Y}_\nu(p_k\alpha^q) = g_k\alpha^{\frac{a-1}{2}}, \quad k = 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{35}$$

Если при всех $k \in \mathbb{N}$ определитель системы (35)

$$\Delta_k(\alpha, \beta) = J_\nu(p_k\alpha^q)K_\nu(p_k\beta^q) + I_\nu(p_k\beta^q)\overline{Y}_\nu(p_k\alpha^q) \neq 0, \tag{36}$$

то данная система имеет единственное решение

$$a_k = \frac{1}{\Delta_k(\alpha,\beta)}[f_k\beta^{\frac{a-1}{2}}\ \overline{Y}_\nu(p_k\alpha^q) - g_k\alpha^{\frac{a-1}{2}}K_\nu(p_k\beta^q)], \tag{37}$$

$$b_k = \frac{1}{\Delta_k(\alpha,\beta)}[f_k\beta^{\frac{a-1}{2}}\ J_\nu(p_k\alpha^q) + g_k\alpha^{\frac{a-1}{2}}I_\nu(p_k\beta^q)]. \tag{38}$$

Подставляя (37) и (38) в (35), найдем функции

$$u_k(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta_k(\alpha,\beta)}\left[f_k\left(\dfrac{y}{\beta}\right)^{\frac{1-a}{2}}\Delta_k(\alpha, y) + g_k\left(\dfrac{y}{\alpha}\right)^{\frac{1-a}{2}}A_k(y,\beta)\right], & y \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{\Delta_k(\alpha,\beta)}\left[f_k\left(\dfrac{-y}{\beta}\right)^{\frac{1-a}{2}}B_k(\alpha,-y) + g_k\left(\dfrac{-y}{\alpha}\right)^{\frac{1-a}{2}}\Delta_k(-y,\beta)\right], & y \leqslant 0, \end{cases} \tag{39}$$

где

$$\Delta_k(\alpha, y) = J_\nu(p_k\alpha^q)K_\nu(p_k y^q) + \overline{Y}_\nu(p_k\alpha^q)I_\nu(p_k y^q),$$

$$A_k(y,\beta) = I_\nu(p_k\beta^q)K_\nu(p_k y^q) - I_\nu(p_k y^q)K_\nu(p_k\beta^q),$$

$$B_k(\alpha,-y) = J_\nu(p_k\alpha^q)\overline{Y}_\nu(p_k(-y)^q) - \overline{Y}_\nu(p_k\alpha^q)J_\nu(p_k(-y)^q) =$$
$$= \frac{\pi}{2\sin\pi\nu}[J_\nu(p_k\alpha^q)J_\nu(p_k(-y)^q) - J_\nu(p_k\alpha^q)J_\nu(p_k(-y)^q)],$$

$$\Delta_k(-y,\beta) = J_\nu(p_k(-y)^q)K_\nu(p_k\beta^q) + \overline{Y}_\nu(p_k(-y)^q)I_\nu(p_k\beta^q).$$

Доказательство теоремы 1. Если существует решение задачи (2)–(6), то для его единственности необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (36) при всех $k \in \mathbb{N}$.

Достаточность. Пусть $f(x) \equiv 0$, $g(x) \equiv 0$ на $[0,l]$ и выполнены условия (36) при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $f_k \equiv 0$, $g_k \equiv 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, согласно формуле (39) при $y \in [-\alpha, \beta]$ функции $u_k(y) \equiv 0$ и в силу (19) имеем

$$\sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l u(x,y) \sin \mu_k x dx = 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда в силу полноты системы (18) в пространстве $L_2[0,l]$ следует, что функция $u(x,y) = 0$ почти всюду на $[0,l]$ при любом $y \in [-\alpha, \beta]$. Поскольку в силу (2) функция $u(x,y)$ непрерывна в $\overline{D}$, то $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Необходимость. Пусть существует единственное решение задачи (2)–(6). Надо показать, что при этом выполняются условия (36) при всех $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что при некотором $k = d$ выражение $\Delta_d(\alpha, \beta) = 0$. Тогда однородная задача (2)–(6), где $f(x) = g(x) \equiv 0$, имеет ненулевое решение

$$u_d(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^{\frac{1-a}{2}} A_d(y,\beta)}{I_\nu(p_d \beta^q)} \sin \mu_d x, & y \geqslant 0, \\ \dfrac{(-y)^{\frac{1-a}{2}} \Delta_d(-y,\beta)}{I_\nu(p_d \beta^q)} \sin \mu_d x, & y \leqslant 0, \end{cases}$$

что противоречит условию.

Выясним, при каких α, β, l, a и k выражение $\Delta_k(\alpha, \beta)$ равно нулю. Для этого представим знаменатель $\Delta_k(\alpha, \beta)$ в следующем виде:

$$\Delta_k(\alpha, \beta) = I_\nu(p_k \beta^q) \delta_k(\alpha, \beta),$$

где

$$\delta_k(\alpha, \beta) = J_\nu(p_k \alpha^q) \frac{K_\nu(p_k \beta^q)}{I_\nu(p_k \beta^q)} + \overline{Y}_\nu(p_k \alpha^q).$$

Представим аргументы функций Бесселя, входящих в формулу (20), в виде

$$p_k \alpha^q = \frac{\lambda_k}{q} \alpha^q = \frac{\sqrt{\mu_k^2 + b}}{q} \alpha^q = \frac{\pi k \alpha^q}{lq} \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{b} l}{\pi k} \right)^2} = \pi k \tilde{\lambda}_k \alpha_{ql},$$

где

$$\tilde{\lambda}_k = \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{b} l}{\pi k} \right)^2}, \quad \alpha_{ql} = \frac{\alpha^q}{ql}, \quad \beta_{ql} = \frac{\beta^q}{ql}.$$

Тогда выражение $\delta_k(\alpha, \beta)$ будет определяться по формуле

$$\delta_k(\alpha, \beta) = J_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \alpha_{ql}) \frac{K_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \beta_{ql})}{I_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \beta_{ql})} + \overline{Y}_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \alpha_{ql}) = \delta_k(\alpha_{ql}, \beta_{ql}).$$

Существование нулей $\delta_k(\alpha_{lq}, \beta_{ql})$ относительно α_{ql} следует из того, что функции $J_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \alpha_{ql})$ и $\overline{Y}_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \alpha_{ql})$ являются линейно независимыми решениями уравнения Бесселя

$$y''(\alpha_{ql}) + \frac{1}{\alpha_{ql}} y'(\alpha_{ql}) + \left[(\pi k \tilde{\lambda}_k)^2 - \frac{\nu^2}{\alpha_{ql}^2} \right] y(\alpha_{ql}) = 0. \tag{40}$$

Поскольку функции $J_\nu(\pi k\tilde{\lambda}_k\alpha_{ql})$ и $\delta_k(\alpha_{ql},\beta_{ql})$ являются линейно независимыми решениями уравнения (40), из общей теории линейных дифференциальных уравнений следует, что нули двух линейно независимых решений уравнения Бесселя строго чередуются, т.е. на интервале между любыми последовательными нулями любого из этих решений содержится ровно один нуль другого решения. Функция $J_\nu(\pi k\tilde{\lambda}_k\alpha_{ql})$ имеет счетное множество положительных нулей. Тогда функция $\delta_k(\alpha_{ql},\beta_{ql})$ также имеет счетное множество положительных нулей относительно α_{ql}. Следовательно, для задачи (2)–(6) установлен критерий единственности. $\square$

2. Оценки малых знаменателей. Поскольку α_{ql} — любое положительное число, то при достаточно больших k выражение $\Delta_k(\alpha,\beta)$, которое входит в знаменатель формулы (39), может стать достаточно малым из-за существования счетного множества нулей $\delta_k(\alpha_{ql},\beta_{ql})$ относительно α_{ql}. Следовательно, возникает проблема малых знаменателей [10,22,23]. Функция $K_\nu(\pi k\tilde{\lambda}_k\beta_{ql})$ при больших k строго убывает по асимптотической формуле $k^{-1/2}e^{-\pi k\beta_{ql}}$, а функция $I_\nu(\pi k\tilde{\lambda}_k\beta_{ql})$ строго возрастает по формуле $k^{-1/2}e^{\pi k\beta_{ql}}$, поэтому величина

$$J_\nu(\pi k\tilde{\lambda}_k\alpha_{ql})\frac{K_\nu(\pi k\tilde{\lambda}_k\beta_{ql})}{I_\nu(\pi k\tilde{\lambda}_k\beta_{ql})}$$

есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\overline{Y}_\nu(\pi k\tilde{\lambda}_k\alpha_{ql})$ при больших k. В связи с этим достаточно рассмотреть выражение

$$\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql})=\frac{2\sin\pi\nu}{\pi}\overline{Y}_\nu(\pi k\tilde{\lambda}_k\alpha_{ql})=J_\nu(\pi k\tilde{\lambda}_k\alpha_{ql})+J_{-\nu}(\pi k\tilde{\lambda}_k\alpha_{ql}),$$

которое также имеет счетное множество положительных нулей относительно α_{ql}.

Функция $J_\nu(\pi k\tilde{\lambda}_k\alpha_{ql})=0$ только в том случае, когда аргумент $\pi k\tilde{\lambda}_k\alpha_{ql}$ совпадает с нулями функции Бесселя первого рода $J_\nu(x)$, $\nu=(1-a)/(2q)$, при $x>0$. Известно [25, с. 70], что функция $J_\nu(x)$ при $\nu>-1$ и $x>0$ имеет счетное множество изолированных нулей $x_{\nu,m}$, $m\in\mathbb{N}$. Значит, $J_\nu(\pi k\tilde{\lambda}_k\alpha_{ql})=0$ только тогда, когда

$$\alpha_{ql}=\frac{x_{\nu,m}}{\pi k\tilde{\lambda}_k},\quad k,\ m\in\mathbb{N}.$$

Поскольку α_{ql} — любое положительное число, оно может принимать значения, близкие к нулям $\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql},\beta_{ql})$. Поэтому при больших k выражение $\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql},\beta_{ql})$ может стать достаточно малым.

Выражение $\widetilde{\lambda}_k$, которое зависит от $\sqrt{b}l$, при условии

$$\frac{\sqrt{b}l}{\pi}<1\quad\text{или}\quad k>\frac{\sqrt{b}l}{\pi}=k_1$$

можно представить в виде

$$\widetilde{\lambda}_k=\Big(1+\Big(\frac{\sqrt{b}l}{\pi k}\Big)^2\Big)^{1/2}=1+\theta_k,$$

при этом для θ_k справедлива оценка

$$\frac{3}{8}\Big(\frac{\sqrt{b}l}{\pi k}\Big)^2 < \theta_k < \frac{1}{2}\Big(\frac{\sqrt{b}l}{\pi k}\Big)^2. \tag{41}$$

Используя асимптотическую формулу [25, с. 98]

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\Big(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\Big) + O(z^{-5/2}), \quad z \to \infty,$$

при $k > k_0$, где k_0 — достаточно большое натуральное число, получаем

$$\sqrt{k}\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\tilde{\lambda}_k\alpha_{ql}}}\Big[\cos\Big(\pi k\alpha_{ql} + \tilde{\theta}_k\alpha_{ql} - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\Big) + \\ + \cos\Big(\pi k\alpha_{ql} + \tilde{\theta}_k\alpha_{ql} + \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\Big)\Big] = \\ = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\tilde{\lambda}_k\alpha_{ql}}}\cos\frac{\pi\nu}{2}\sin\Big(\pi k\alpha_{ql} + \tilde{\theta}_k\alpha_{ql} + \frac{\pi}{4}\Big), \quad \tilde{\theta}_k = \pi k\theta_k. \tag{42}$$

1. Пусть $\alpha_{ql} = p$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда, поскольку

$$\tilde{\lambda}_k \to 1 \quad \text{и} \quad \widetilde{\theta}_k \to 0, \tag{43}$$

при всех $k > k_0$ из (44) получим оценку

$$\Big|\sqrt{k}\tilde{\delta}_k(p)\Big| = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2}{p}}\Big|\sin\Big(\pi kp + \frac{\pi}{4}\Big)\cos\frac{\pi\nu}{2}\Big| \geqslant \frac{1}{\pi\sqrt{p}}\Big|\cos\frac{\pi\nu}{2}\Big| = \widetilde{C}_1 > 0. \tag{44}$$

2. Пусть $\alpha_{ql} = d/t$ — рациональное число, где d, $t \in \mathbb{N}$, $(d,t) = 1$, $(t,4) = 1$, $d/t \notin \mathbb{N}$. Разделим kd на t с остатком: $kd = st + r$, s, $t \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}$, $0 \leqslant r < t$. Тогда соотношение (42) принимает вид

$$\sqrt{k}\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}) = (-1)^s\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\tilde{\lambda}_k\alpha_{ql}}}\sin\Big[\frac{\pi r}{t} + \widetilde{\theta}_k\alpha_{ql} + \frac{\pi}{4}\Big]\cos\frac{\pi\nu}{2}. \tag{45}$$

Если $r = 0$, то из представления (45) получим

$$\sqrt{k}\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}) = (-1)^s\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\tilde{\lambda}_k\alpha_{ql}}}\sin\Big[\widetilde{\theta}_k\alpha_{ql} + \frac{\pi}{4}\Big]\cos\frac{\pi\nu}{2}. \tag{46}$$

Поскольку последовательность $\widetilde{\theta}_k$ в силу оценки (41) является бесконечно малой при $k \to +\infty$, существует число $k_2 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $k > k_2$

$$0 < \widetilde{\theta}_k\alpha_{ql} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда в силу неравенства

$$\sin x > \frac{2}{\pi}x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

на основании (41), (46) получим оценку

$$\sqrt{k}\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}) > \frac{4}{\pi^2}\sqrt{\frac{2}{\tilde{\lambda}_k\alpha_{ql}}}\left|\cos\frac{\pi\nu}{2}\right|\left(\widetilde{\theta}_k\alpha_{ql} + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\tilde{\lambda}_k\alpha_{ql}}}\left|\cos\frac{\pi\nu}{2}\right|\left(\frac{3}{2}\left(\frac{bl}{\pi}\right)^2 + 1\right) \geqslant \widetilde{C}_2 > 0$$

при $k \geqslant \max\{k_1, k_2\}$.

Пусть $r > 0$, тогда $1 < r < t-1$, $t \geqslant 2$. Поскольку выражение $\sin\left[\frac{\pi r}{t} + \widetilde{\theta}_k\alpha_{ql} + \frac{\pi}{4}\right]$ имеет конечный предел при $k \to \infty$, существует $k_3 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $k > k_3$ из (45) будем иметь

$$\left|\sqrt{k}\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql})\right| \geqslant \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\alpha_{ql}}}\left|\cos\frac{\pi\nu}{2}\right| \cdot \left|\sin\pi\left(\frac{r}{t} + \frac{1}{4}\right)\right| = \widetilde{C}_3. \tag{47}$$

В силу последней оценки следует исключить случай, когда $\frac{r}{t} + \frac{1}{4} = 1$, то есть число $\frac{r}{t}$ надо взять так, чтобы выполнялось неравенство $\frac{r}{t} \neq \frac{3}{4}$. Если числа t и 4 взаимно простые, то постоянная $\widetilde{C}_3$ из (47) всегда больше нуля.

Из полученных выше неравенств (44) и (47) следует справедливость оценки

$$|\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql})| \geqslant \frac{C_0}{\sqrt{k}} > 0$$

при всех $k > k_0 = \max\{k_1, k_2, k_3\}$, где $C_0 = \min\{\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \widetilde{C}_3\}$.

Замечание. *Если $(t, 4) > 1$, т.е. пусть $t = 4t_1$, $t_1 \in \mathbb{R}$, тогда из оценки (47) следует, что*

$$\sin\pi\left(\frac{r}{t} + \frac{1}{4}\right) = \sin\pi\left(\frac{r}{t} + \frac{1}{4}\right) = \sin\pi\left(\frac{r}{4t_1} + \frac{1}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\left(\frac{r}{t_1} + 1\right).$$

Отсюда, например, при $r = 3t_1$ последнее равенство будет равно нулю.

3. Рассмотрим случай, когда α_{ql} является алгебраическим иррациональным числом степени 2. Тогда соотношение (42) представим в виде

$$\sqrt{k}\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}) = (-1)^m\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\tilde{\lambda}_k\alpha_{ql}}}\cos\frac{\pi\nu}{2}\sin\left(\frac{\pi k}{4}\left(4\alpha_{ql} - \frac{4m-1}{k}\right) + \tilde{\theta}_k\alpha_{ql}\right), \tag{48}$$

где m — произвольное натуральное число.

Для любого $k \in \mathbb{N}$ существует нечетное число $m' = 4m - 1 = 2m'' - 1$, $m'' = 2m$ [26] такое, что имеет место неравенство

$$\left|4\alpha_{ql} - \frac{m'}{k}\right| < \frac{1}{k}. \tag{49}$$

Действительно, для этого достаточно положить

$$m' = \begin{cases} [4k\alpha_{ql}], & \text{если } [4k\alpha_{ql}] — \text{нечетное},\\ [4k\alpha_{ql}]+1, & \text{если } [4k\alpha_{ql}] — \text{четное}, \end{cases}$$

где $[4k\alpha_{ql}]$ — целая часть иррационального числа $4k\alpha_{ql}$.

Число $m \in \mathbb{N}$ возьмем таким, чтобы в силу неравенства (49) выполнялось неравенство

$$\pi k\Big|\alpha_{ql} - \frac{4m-1}{4k}\Big| < \frac{\pi}{4}. \tag{50}$$

Если α_{ql} является алгебраическим числом степени два, то в силу теоремы Лиувилля [27, с. 60] существует положительное число ε_0, зависящее от α_{ql}, такое, что при любых целых $4k$ и $4m-1$, $k>0$, выполняется неравенство

$$\Big|\alpha_{ql} - \frac{4m-1}{4k}\Big| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{16k^2}. \tag{51}$$

В силу оценок (41) имеем

$$0 < \alpha_{ql}\widetilde{\theta}_k < \frac{\alpha_{ql}(bl)^2}{2\pi k} = \frac{\widetilde{C}_4}{k}. \tag{52}$$

Тогда с некоторого номера k_0 при всех $k > k_0$ выполняется условие

$$\frac{\alpha_{ql}(bl)^2}{2\pi} < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда из (50) и (52) возможны два случая:

$$1)\qquad \frac{\pi}{2} \leqslant \pi k\Big(\alpha_{ql} - \frac{4m-1}{4k}\Big) + \alpha_{ql}\widetilde{\theta}_k < \frac{\pi}{4} + \widetilde{C}_4 < \pi,$$

$$2)\quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \pi k\Big(\alpha_{ql} - \frac{4m-1}{4k}\Big) + \alpha_{ql}\widetilde{\theta}_k < \frac{\pi}{2}.$$

В первом случае

$$\Big|\sin\Big[\pi k\Big(\alpha_{ql} - \frac{4m-1}{4k}\Big) + \alpha_{ql}\widetilde{\theta}_k\Big]\Big| \geqslant \sin\Big(\frac{\pi}{4} + \widetilde{C}_4\Big) > \sin\frac{3\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} \geqslant \frac{\widetilde{C}_5}{k}.$$

Во втором случае с учетом неравенств (51) и

$$|\sin x| > \frac{2}{\pi}|x|, \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2},$$

имеем

$$\Big|\sin\Big[\pi k\Big(\alpha_{ql} - \frac{4m-1}{4k}\Big) + \alpha_{ql}\widetilde{\theta}_k\Big]\Big| > \frac{2}{\pi}\Big|\pi k\Big(\alpha_{ql} - \frac{4m-1}{4k}\Big) + \alpha_{ql}\widetilde{\theta}_k\Big| \geqslant$$

$$\geqslant 2k\Big|\alpha_{ql} - \frac{4m-1}{4k}\Big| - \alpha_{ql}\widetilde{\theta}_k\frac{2}{\pi} \geqslant \frac{\varepsilon_0}{8k} - \frac{2C_4}{\pi k} = \frac{1}{k}\Big(\varepsilon_0 - \frac{2C_4}{\pi}\Big). \tag{53}$$

Потребуем, чтобы постоянные α_{ql}, l, $\sqrt{b}$ и ε_0 удовлетворяли неравенству

$$\varepsilon_0 - 2\alpha_{ql}\Big(\frac{2l\sqrt{b}}{\pi}\Big)^2 > 0,$$

которое, например, при малых l, или $\sqrt{b}$, или α всегда имеет место.

Тогда из (48) и (53) при $k > k_0$ следует

$$|\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql})| \geqslant \frac{C_1}{k^{3/2}}.$$

Тем самым нами *доказано утверждение* 2.

3. Обоснование существования решения задачи. Если $\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}) \neq 0$ при $k = \overline{1, k_0}$ и выполнена оценка (12), то на основании частных решений (18) и (39) решение задачи (2)–(6) представим в виде суммы ряда

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) X_k(x). \tag{54}$$

Покажем, что при определенных условиях на числа $\alpha_{ql} = \alpha^q/(ql)$ и функции $f(x)$, $g(x)$ ряд (54) сходится равномерно в замкнутой области $\overline{D}$ и можно применить дважды почленное дифференцирование по переменным x и y соответственно в замкнутых областях $\overline{D}_{+\varepsilon}$ и $\overline{D}_{-\varepsilon}$, где $\overline{D}_{+\varepsilon} = \overline{D}_+ \cap \{y > \varepsilon\}$ и $\overline{D}_{-\varepsilon} = \overline{D}_- \cap \{y < -\varepsilon\}$, где ε — достаточно малое положительное число.

Рассмотрим следующие отношения:

$$\begin{aligned} R_k(y) &= \frac{y^{\frac{1-a}{2}} \Delta_k(\alpha, y)}{\Delta_k(\alpha, \beta)}, & T_k(y) &= \frac{y^{\frac{1-a}{2}} A_k(y, \beta)}{\Delta_k(\alpha, \beta)}, & y &\in [0, \beta], \\ M_k(y) &= \frac{(-y)^{\frac{1-a}{2}} B_k(\alpha, -y)}{\Delta_k(\alpha, \beta)}, & L_k(y) &= \frac{(-y)^{\frac{1-a}{2}} \Delta_k(-y, \beta)}{\Delta_k(\alpha, \beta)}, & y &\in [-\alpha, 0]. \end{aligned} \tag{55}$$

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* (12) *при всех* $k > k_0$. *Тогда для таких* k *справедливы следующие оценки*:

$$|R_k(y)| \leqslant C_2,\ y \in [0, \beta]; \quad |R'_k(y)| \leqslant C_3 k,\ |R''_k(y)| \leqslant C_4 k^{\frac{5}{2}-\nu},\ y \in [\varepsilon, \beta];$$

$$|T_k(y)| \leqslant C_5 k^{\frac{1}{2}-\nu},\ y \in [0, \beta]; \quad |T'_k(y)| \leqslant C_6 k,\ |T''_k(y)| \leqslant C_7 k^{\frac{5}{2}-\nu},\ y \in [\varepsilon, \beta];$$

$$|M_k(y)| \leqslant C_8,\ y \in [-\alpha, 0]; \quad |M'_k(y)| \leqslant C_9 k,\ |M''_k(y)| \leqslant C_{10} k^{\frac{5}{2}-\nu},\ y \in [-\alpha, -\varepsilon];$$

$$|L_k(y)| \leqslant C_{11} k^{\frac{1}{2}-\nu},\ y \in [-\alpha, 0]; \ |L'_k(y)| \leqslant C_{12} k,\ |L''_k(y)| \leqslant C_{13} k^{\frac{5}{2}-\nu},\ y \in [-\alpha, -\varepsilon].$$

Здесь и далее C_i — *положительные постоянные.*

Доказательство. Рассмотрим функции $R_k(y)$. На основании асимптотических формул поведения функций Бесселя в окрестности бесконечно удаленной точки [29, с. 227] и в окрестности нуля [25, с. 98–99] из (55) при $0 \leqslant y \leqslant \beta$ и больших k имеем

$$|R_k(y)| \leqslant \frac{\sqrt{k}}{I_\nu(p_k\beta^q)C_0}\Big[|J_\nu(p_k\alpha^q)|y^{\frac{1-a}{2}}K_\nu(p_k y^q) + y^{\frac{1-a}{2}}I_\nu(p_k y^q)|\overline{Y}_\nu(p_k\alpha^q)|\Big] \leqslant$$
$$\leqslant \widetilde{C}_6 + \frac{\sqrt{k}y^{\frac{1-a}{2}}I_\nu(p_k y^q)}{C_0 I_\nu(p_k\beta^{\frac{1}{2}})}|\overline{Y}_\nu(p_k\alpha^{\frac{1}{2}})| \leqslant C_2,$$

Используя формулы [25, с. 90], вычислим производную

$$R_k'(y) = \frac{p_k q y^{q-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}}}{\Delta_k(\alpha,\beta)}\Big[I_{\nu-1}(p_k y^q)\overline{Y}_\nu(p_k\alpha^q) - J_\nu(p_k\alpha^q)K_{\nu-1}(p_k y^q)\Big].$$

Отсюда на основании оценки (12) и асимптотических формул функций Бесселя в окрестности бесконечно удаленной точки при $y \in [\varepsilon, \beta]$ получим

$$|R_k'(y)| \leqslant \frac{p_k\sqrt{k}}{I_\nu(p_k\beta^q)C_0}\Big[|J_\nu(p_k\alpha^q)|y^{q-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}}K_{\nu-1}(p_k y^q) +$$
$$+ y^{q-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}}I_{\nu-1}(p_k y^q)|\overline{Y}_\nu(p_k\alpha^q)|\Big] \leqslant$$
$$\leqslant \widetilde{C}_7 k + \frac{\sqrt{k}p_k y^{q-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}}I_{\nu-1}(p_k y^q)}{C_0 I_\nu(p_k\beta^q)}|\overline{Y}_\nu(p_k\alpha^q)| \leqslant C_3 k. \quad (56)$$

Для производной второго порядка функции $R_k(y)$ имеет место представление

$$R_k''(y) = p_k^2 q^2 y^{2q-2}R_k(y) - \frac{a}{y}R_k'(y), \quad 0 < y \leqslant \beta.$$

Из данного равенства в силу оценки (56) следует, что

$$|R_k''(y)| \leqslant C_4 k^2, \quad \varepsilon \leqslant y \leqslant \beta.$$

□

Аналогично получаем оценки для функций $T_k(y)$, $K_k(y)$ и $L_k(y)$ и их производных первого и второго порядков.

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* (12) *при всех* $k > k_0$. *Тогда для таких* k *справедливы следующие оценки*:

$$|u_k(y)| \leqslant C_{14}(|f_k| + k^{\frac{1}{2}-\nu}|g_k|), \quad y \in [-\alpha, \beta];$$

$$|u_k'(y)| \leqslant C_{15}k(|f_k| + |g_k|), \quad |u_k''(y)| \leqslant C_{16}k^2(|f_k| + |g_k|), \quad y \in [-\alpha, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \beta].$$

Доказательство. На основании формулы (39) с учетом функций (34), (35) получим представление для функции

$$u_k(y) = \begin{cases} f_k\beta^{\frac{a-1}{2}}R_k(y) + g_k\alpha^{\frac{a-1}{2}}T_k(y), & y \geqslant 0, \\ f_k\beta^{\frac{a-1}{2}}M_k(y) + g_k\alpha^{\frac{a-1}{2}}L_k(y), & y \leqslant 0. \end{cases}$$

Отсюда, используя лемму 1, нетрудно получить указанные оценки для функции $u_k(y)$ и ее производных первого и второго порядка. □

Лемма 3. *Пусть* $f(x),\ g(x) \in C^3[0,l],\ f(0) = g(0) = 0,\ f(l) = g(l) = 0,$ $f''(0) = g''(0) = 0,\ f''(l) = g''(l) = 0.$ *Тогда справедливы представления*

$$f_k = \frac{f_k^{(3)}}{\mu_k^3}, \quad g_k = \frac{g_k^{(3)}}{\mu_k^3}, \tag{57}$$

где

$$f_k^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f'''(x) \cos \mu_k x dx, \quad g_k^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l g'''(x) \cos \mu_k x dx,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k^{(3)}|^2 \leqslant \|f'''(x)\|^2_{L_2[0,l]}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |g_k^{(3)}|^2 \leqslant \|g'''(x)\|^2_{L_2[0,l]}. \tag{58}$$

Доказательство. Интегрируя по частям три раза интегралы в (34) с учетом условий леммы, получим представления (57). Оценки (58) являются неравенствами Бесселя для системы косинусов $\left\{\frac{1}{\sqrt{l}}, \frac{2}{\sqrt{l}} \cos \mu_k x\right\}$. $\square$

Таким образом, в силу лемм 2, 3, ряд (54) при любом (x, y) из $\overline{D}$ мажорируется сходящимся рядом

$$C_{17} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \left(|f_k^{(3)}| + |g_k^{(3)}| \right),$$

поэтому ряд (54) сходится равномерно в замкнутой области $\overline{D}$. Ряды из производных первого и второго порядка мажорируются соответственно на замкнутых областях $\overline{D}_{+\varepsilon}$ и $\overline{D}_{-\varepsilon}$ сходящимся числовым рядом

$$C_{18} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(|f_k^{(3)}| + |g_k^{(3)}| \right),$$

поэтому сумма $u(x, y)$ ряда (54) принадлежит классу (2) и удовлетворяет уравнению (1) на множестве $D_+ \cup D_-$.

Если для указанных в утверждении 2 значений α_{ql} из случаев 1), 2) выполняется равенство $\Delta_s(\alpha, \beta) = 0$, где $s = s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_m$ и m — заданные натуральные числа $(1 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_m \leqslant k_0)$, то для разрешимости задачи (2)–(6) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$f_s \alpha^{\frac{1-a}{2}} J_\nu(p_s \alpha^q) + g_s \beta^{\frac{1-a}{2}} I_\nu(p_s \beta^q) = 0, \tag{59}$$

где f_s, g_s определены ниже формулами (34). Тогда решение этой задачи определяется в виде суммы ряда

$$u(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{s_1-1} + \sum_{s_1+1}^{s_2-1} + \cdots + \sum_{s_m+1}^{+\infty} \right) u_k(y) \sin \mu_k x + \sum_q u_q(x, y), \tag{60}$$

где в последней сумме q принимает значения $s_1, s_2, \ldots, s_m$ и функции $u_s(x, y)$ определяются по формуле

$$u_s(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{f_s y^{\frac{1-a}{2}} I_\nu(p_s y^q)}{\beta^{\frac{1-a}{2}} I_\nu(p_s \beta^q)} + C_s \dfrac{y^{\frac{1-a}{2}} A_s(y,\beta)}{I_\nu(p_s\beta^q)} \right) \sin\mu_s x, & y \geqslant 0, \\ \left(\dfrac{g_s(-y)^{\frac{1-a}{2}} J_\nu(p_s(-y)^q)}{\alpha^q J_\nu(p_s\alpha^q)} + \dfrac{(-y)^{\frac{1-a}{2}} \Delta_s(-y,\beta)}{I_\nu(p_s\beta^q)} \right) \sin\mu_s x, & y \leqslant 0. \end{cases}$$

Здесь C_s — произвольная постоянная; конечные суммы в (60) следует считать нулями при условии, когда верхний предел меньше нижнего.

Таким образом, доказана теорема 2.

Если α_{ql} является алгебраическим числом степени 2, тогда будут справедливы следующие леммы.

Лемма 4. *Пусть выполнено условие* (13) *при всех* $k > k_0$. *Тогда для таких* k *справедливы следующие оценки:*

$$|u_k(y)| \leqslant C_{19}(k|f_k| + k^{\frac{3}{2}-\nu}|g_k|), \quad y \in [-\alpha, \beta];$$

$$|u_k'(y)| \leqslant C_{20}k^2(|f_k| + |g_k|), \ \ |u_k''(y)| \leqslant C_{21}k^3(|f_k| + |g_k|), \quad y \in [-\alpha, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \beta].$$

Доказательство леммы 4 проводится аналогично доказательству леммы 1.

Лемма 5. *Пусть* $f(x),\ g(x) \in C^4[0,l],\ f(0) = g(0) = 0,\ f(l) = g(l) = 0,$ $f''(0) = g''(0) = 0,\ f''(l) = g''(l) = 0.$ *Тогда справедливы оценки*

$$f_k = \frac{f_k^{(4)}}{\mu_k^4}, \quad g_k = \frac{g_k^{(4)}}{\mu_k^4},$$

где

$$f_k^{(4)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f^{(4)}(x) \sin\mu_k x dx, \quad g_k^{(4)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l g^{(4)}(x) \sin\mu_k x dx,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k^{(4)}|^2 \leqslant \|f^{(4)}(x)\|^2_{L_2[0,l]}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |g_k^{(4)}|^2 \leqslant \|g^{(4)}(x)\|^2_{L_2[0,l]}.$$

Доказательство леммы 5 проводится аналогично доказательству леммы 3.

На основании лемм 4, 5 по аналогии с доказательством теоремы 2 доказывается теорема 3.

5. Устойчивость решения задачи. Рассмотрим следующие нормы:

$$\|u(x,y)\|_{L_2[0,l]} = \|u(x,y)\|_{L_2} = \left(\int_0^l |u(x,y)|^2 dx \right)^{1/2}, \ \ -\alpha \leqslant y \leqslant \beta,$$

$$\|u(x,y)\|_{C(\overline{D})} = \max_{\overline{D}} |u(x,y)|.$$

Доказательство теоремы 4. Поскольку система собственных функций (18) является ортонормированной, из формулы (54) и леммы 2 имеем

$$\|u(x,y)\|^2_{L_2} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2(y) \leqslant 2\tilde{C}_{14}^2 \sum_{k=1}^{\infty} (|f_k|^2 + |k^{\frac{1}{2}-\nu} g_k|^2). \tag{61}$$

Если $\nu < 1/2$, то из неравенства (61) имеет место оценка

$$\|u(x,y)\|^2_{L_2} \leqslant 2\tilde{C}_{14}^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (|f_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |k^{\frac{1}{2}} g_k|^2 \right). \tag{62}$$

Учитывая, что при $g(0) = g(l) = 0$ коэффициент g_k можно представить в виде

$$g_k = \frac{l}{\pi} \frac{g_k^{(1)}}{k}, \quad \text{где} \quad g_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l g'(x) \cos \mu_k x dx, \tag{63}$$

из неравенства (62) получим

$$\|u(x,y)\|^2_{L_2} \leqslant \tilde{C}_8^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (|f_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |g_k^{(1)}|^2 \right) \leqslant M_1(\|f\|^2_{L_2} + \|g'\|^2_{L_2}). \tag{64}$$

Если $\nu \geqslant 1/2$, то из оценки (61) имеем

$$\|u(x,y)\|^2_{L_2} \leqslant 2\tilde{C}_{14}^2 \sum_{k=1}^{\infty} (|f_k|^2 + |g_k|^2) = M_2(\|f\|^2_{L_2} + \|g\|^2_{L_2}). \tag{65}$$

Тогда из неравенств (64) и (65) следует справедливость оценки (14).

Пусть (x,t) — любая точка из $\overline{D}$. Тогда из ряда (54) в силу леммы 2 имеем

$$|u(x,y)| \leqslant \tilde{C}_9 \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k| + \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{1}{2}-\nu} |g_k| \right). \tag{66}$$

При $f(0) = f(l) = 0$, $g(0) = g(l) = 0$ коэффициенты f_k и g_k можно представить в виде

$$f_k = \frac{l}{\pi} \frac{f_k^{(1)}}{k}, \quad f_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f'(x) \cos \mu_k x dx, \tag{67}$$

$$g_k = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \frac{g_k^{(2)}}{k^2}, \quad g_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l g''(x) \sin \mu_k x dx. \tag{68}$$

Тогда из оценки (66) при $\nu < 1/2$ с учетом (67) и (68) на основании неравенства Коши—Буняковского будем иметь

$$|u(x,y)| \leqslant \tilde{C}_{10} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} |f_k^{(1)}| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} |g_k^{(2)}| \right] \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{C}_{11}\frac{l}{\pi}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(|f_k^{(1)}|)^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(|g_k^{(2)}|\right)^{1/2}\right].$$

Отсюда с учетом равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

получим

$$|u(x,y)|\leqslant \tilde{C}_{12}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}(|f_k^{(1)}|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}(|g_k^{(2)}|^2\right)^{1/2}\right]\leqslant$$
$$\leqslant \tilde{C}_{12}\big(\|f'\|_{L_2[0,l]}+\|g''\|_{L_2[0,l]}\big)\leqslant M_3\big(\|f'\|_{C[0,l]}+\|g''\|_{C[0,l]}\big).$$

Если $\nu\geqslant 1/2$, то из неравенства (66) с учетом (68) и (67) получим

$$|u(x,y)|\leqslant \tilde{C}_{13}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(|f_k^{(1)}|+|g_k^{(1)}|)\leqslant$$
$$\leqslant \tilde{C}_{14}\big(\|f'\|_{L_2[0,l]}+\|g'\|_{L_2[0,l]}\big)\leqslant M_4\big(\|f'\|_{C[0,l]}+\|g''\|_{C[0,l]}\big).$$

Из полученных неравенств следует справедливость оценки (15). □

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 18–31–00111).

Библиографический список

1. Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // *Докл. АН СССР*, 1951. Т. 77, № 2. С. 181–183.
2. Кароль И. Л. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа второго рода // *Докл. АН СССР*, 1953. Т. 88, № 2. С. 197–200.
3. Исамухамедов С. С. Краевая задача Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода // *Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук*, 1970. № 4. С. 9–12.
4. Крикунов Ю. М. *Краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа*. Казань: Казан. гос. ун-т, 1986. 150 с.
5. Хайруллин Р. С. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода в случае нормальной области // *Диффер. уравн.*, 1990. Т. 26, № 8. С. 1396–1407.
6. Сохадзе Р. С. О первой краевой задаче для уравнения смешанного типа в прямоугольнике // *Диффер. уравн.*, 1983. Т. 19, № 1. С. 127–134.
7. Сохадзе Р. С. Первая краевая задача для уравнения смешанного типа с весовыми условиями склеивания вдоль линии параболического вырождения // *Диффер. уравн.*, 1981. Т. 17, № 1. С. 150–156.
8. Сабитов К. Б., Сулейманова А. Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области // *Изв. вузов. Матем.*, 2007. № 4. С. 45–53.

9. Хайруллин Р. С. К задаче Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода с сильным вырождением // *Диффер. уравн.*, 2013. Т. 49, № 4. С. 528–534. doi: 10.1134/S0374064113040122.
10. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // *Докл. РАН*, 2007. Т. 413, № 1. С. 23–26.
11. Хайруллин Р. С. О существовании решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода // *Диффер. уравн.*, 2017. Т. 53, № 5. С. 684–692. doi: 10.1134/S0374064117050119.
12. Кожанов А. И. Краевые задачи для ультрапараболических и квазиультрапараболических уравнений с меняющимся направлением эволюции / *Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики» Кабардино-Балкария, Нальчик, 17–21 мая 2017 г.* / Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., Т. 149. М.: ВИНИТИ РАН, 2018. С. 56–63.
13. Кожанов А. И., Потапова С. В. Краевые задачи для двумерных по временным переменным дифференциальных уравнений нечетного порядка с меняющимся направлением эволюции // *Сиб. матем. журн.*, 2018. Т. 59, № 5. С. 1098–1115. doi: 10.17377/smzh.2018.59.511.
14. Егоров И. Е. Применение модифицированного метода Галеркина к первой краевой задаче для уравнения смешанного типа // *Матем. заметки СВФУ*, 2015. Т. 22, № 3. С. 3–10.
15. Егоров И. Е., Ефимова Е. С., Тихонова И. М. Фредгольмова разрешимость первой краевой задачи для уравнения смешанного типа второго порядка со спектральным параметром // *Матем. заметки СВФУ*, 2018. Т. 25, № 1. С. 15–24. doi: 10.25587/SVFU.2018.1.12765.
16. Сабитова Ю. К. Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии // *Матем. заметки*, 2015. Т. 98, № 3. С. 393–406. doi: 10.4213/mzm9135.
17. Сабитова Ю. К. Нелокальные начально-граничные задачи для вырождающегося гиперболического уравнения // *Изв. вузов. Матем.*, 2009. № 12. С. 49–58.
18. Сабитова Ю. К. Критерий единственности решения нелокальной задачи для вырождающегося уравнения смешанного типа в прямоугольной области // *Диффер. уравн.*, 2010. Т. 46, № 8. С. 1205–1208.
19. Смирнов М. М. *Уравнения смешанного типа.* М.: Наука, 1970. 296 с.
20. Бицадзе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* М.: Наука, 1981. 448 с.
21. Сабитов К. Б. *К теории уравнений смешанного типа.* М.: Физматлит, 2014. 304 с.
22. Арнольд В. И. Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1961. Т. 25, № 1. С. 21–86.
23. В. И. Арнольд Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics // *УМН*, 1963. Т. 18, № 6(114). С. 91–192.
24. Келдыш М.В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // *Докл. АН СССР*, 1951. Т. 77, № 5. С. 11–14.
25. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т. 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966. 296 с.
26. Сабитов К. Б., Сафин Э. М. Обратная задача для уравнения смешанного парабологиперболического типа в прямоугольной области // *Изв. вузов. Матем.*, 2010. № 4. С. 55–62.
27. Хинчин А. Я. *Цепные дроби.* М.: Наука, 1978. 112 с.
28. Бухштаб А. А. *Теория чисел.* Спб.: Лань, 2008. 384 с.
29. Сабитов К. Б. *Уравнения математической физики.* М.: Физматлит, 2013. 312 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 622–645
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1721

MSC: 35M10

Dirichlet problem for a mixed type equation with characteristic degeneration

Yu. K. Sabitova

Sterlitamak Branch of Bashkir State University,
37, Lenina prosp., Sterlitamak, 453103, Russian Federation.

Abstract

For a mixed elliptic-hyperbolic type equation with characteristic degeneration, the first boundary value problem in a rectangular region is investigated. The criterion for the uniqueness of the solution of the problem is established. Earlier, in proving the uniqueness of solutions of boundary value problems for equations of mixed type, the extremum principle or the method of integral identities was used. The uniqueness of the solution to this problem is established on the basis of the completeness of the system of eigenfunctions of the corresponding one-dimensional spectral problem. The solution of the problem is constructed as a sum of a series in the system of eigenfunctions. When we proved the convergence of the obtained series, the problem of small denominators of a more complicated structure than in other known works arose. These denominators contain a parameter depending on the lengths of the sides of the rectangle in the hyperbolic part of the domain and the exponent of the degree of degeneration. In this connection, estimates are established about separation from zero with the corresponding asymptotics, in cases where this parameter is a natural, rational and algebraic irrational number of degree two. If this parameter is not an algebraic irrational number of degree two, then the solution of the problem as a sum of a series does not exist. Using the obtained estimates, the uniform convergence of the constructed series in the class of regular solutions is justified under certain sufficient conditions with respect to the boundary functions. The stability of the solution of the problem with respect to the boundary functions in the norms of the space of summable functions and in the space of continuous functions is also proved.

Keywords: equation of mixed type with characteristic degeneration, Dirichlet problem, criterion of uniqueness, existence, small denominator.

Received: 14th July, 2019 / Revised: 23rd October, 2019 /
Accepted: 11th November, 2019 / First online: 12th December, 2019

Research Article

Please cite this article in press as:
Sabitova Yu. K. Dirichlet problem for a mixed type equation with characteristic degeneration, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 622–645. doi: 10.14498/vsgtu1721 (In Russian).

Author's Details:
Yulia K. Sabitova https://orcid.org/0000-0002-7969-007X
Cand Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mathematical Analysis;
e-mail: sabitovauk@rambler.ru

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18–31–00111).

References

1. Keldysh M. V. On some cases of degeneration of an equation of elliptic type on the domain boundary, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1951, vol. 77, no. 2, pp. 181–183 (In Russian).
2. Karol I. L. On a boundary value problem for an equation of mixed elliptic-hyperbolic type, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1953, vol. 88, no. 2, pp. 197–200 (In Russian).
3. Isamukhamedov S. S. The Tricomi boundary value problem for a mixed type equation of the second kind, *Izv. Akad. Nauk UzSSR, Ser. Fiz.-Mat. Nauk*, 1970, no. 4, pp. 9–12 (In Russian).
4. Krikunov Yu. M. *Kraevye zadachi dlia model'nykh uravnenii smeshannogo tipa* [Boundary Value Problems for Model Mixed-Type Equations]. Kazan', Kazan' State Univ., 1986, 150 pp. (In Russian)
5. Khairullin R. S. The Tricomi problem for an equation of mixed type of the second kind in the case of a normal domain, *Differ. Equ.*, 1990, vol. 26, no. 8, pp. 1031–1039.
6. Sokhadze R. I. The first boundary value problem for an equation of mixed type in a rectangle, *Differ. Uravn.*, 1983, vol. 19, no. 1, pp. 127–134 (In Russian).
7. Sokhadze R. I. The first boundary value problem for an equation of mixed type with weighted glueing conditions along a line of parabolic degeneration, *Differ. Uravn.*, 1981, vol. 17, no. 1, pp. 150–156 (In Russian).
8. Sabitov K. B., Suleimanova A. Kh. The Dirichlet problem for a mixed-type equation of the second kind in a rectangular domain, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2007, vol. 51, no. 4, pp. 42–50. doi: 10.3103/S1066369X07040068.
9. Khairullin R. S. On the Dirichlet problem for a mixed-type equation of the second kind with strong degeneration, *Differ. Equ.*, 2013, vol. 49, no. 4, pp. 510–516. doi: 10.1134/S0012266113040113.
10. Sabitov K. B. The Dirichlet problem for equations of mixed type in a rectangular domain, *Dokl. Math.*, 2007, vol. 75, no. 2, pp. 193–196. doi: 10.1134/S1064562407020056.
11. Khairullin R. S. Solvability of the Dirichlet problem for a mixed-type equation of the second kind, *Diff Equ.*, 2017, vol. 53, no. 5, pp. 677–685. doi: 10.1134/S0012266117050111.
12. Kozhanov A. I. Boundary value problems for ultraparabolic and quasi-ultraparabolic equations with a varying direction of evolution, In: *Proceedings of the International Conference "Actual Problems of Applied Mathematics and Physics", Kabardino-Balkaria, Nalchik, May 17–21, 2017*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., 149. Moscow, VINITI, 2018, pp. 56–63 (In Russian).
13. Kozhanov A. I., Potapova S. V. Boundary value problems for odd order forward-backward-type differential equations with two time variables, *Siberian Math. J.*, 2018, vol. 59, no. 5, pp. 870–884. doi: 10.1134/S0037446618050117.
14. Egorov I. E. Application of the modified Galerkin method for the first boundary problem for mixed type equation, *Math. Notes NEFU*, 2015, vol. 22, no. 3, pp. 3–10 (In Russian).
15. Egorov I. E., Efimova E. S., Tikhonova I. M. On Fredholm solvability of first boundary value problem for mixed-type second-order equation with spectral parameter, *Math. Notes NEFU*, 2018, vol. 25, no. 1, pp. 15–24 (In Russian).
16. Sabitova Yu. K. Boundary-value problem with nonlocal integral condition for mixed-type equations with degeneracy on the transition line, *Math. Notes*, 2015, vol. 98, no. 3, pp. 454–465. doi: 10.1134/S0001434615090114.
17. Sabitova Yu. K. Nonlocal initial-boundary-value problems for a degenerate hyperbolic equation, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2009, vol. 53, no. 12, pp. 41–49. doi: 10.3103/S1066369X09120068.

18. Sabitova Yu. K. Criterion for the uniqueness of a solution of a nonlocal problem for a degenerate equation of the mixed type in a rectangular domain, *Differ. Equ.*, 2010, vol. 46, no. 8, pp. 1215–1218. doi: 10.1134/S001226611008015X.
19. Smirnov M. M. *Uravneniia smeshannogo tipa* [Mixed Type Equations]. Moscow, Nauka, 1970, 296 pp. (In Russian)
20. Bitsadze A. V. *Nekotorye klassy uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Some Classes of Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1981, 448 pp. (In Russian)
21. Sabitov K. B. *K teorii uravnenii smeshannogo tipa* [On the Theory of Equations of Mixed Type]. Moscow, Fizmatlit, 2014, 304 pp. (In Russian)
22. Arnol'd V. I. Small denominators. I. Mapping the circle onto itself, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1961, vol. 25, no. 1, pp. 21–86 (In Russian).
23. Arnol'd V. I. Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics, *Russian Math. Surveys*, 1963, vol. 18, no. 6, pp. 85–191. doi: 10.1070/RM1963v018n06ABEH001143.
24. Keldysh M. V. On the characteristic values and characteristic functions of certain classes of non-self-adjoint equations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1951, vol. 77, no. 5, pp. 11–14 (In Russian).
25. Bateman H., Erdélyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii* [Higher Transcendental Functions], vol. 2, Bessel functions, parabolic cylinder functions, orthogonal polynomials. Moscow, Nauka, 1966, 296 pp. (In Russian)
26. Sabitov K. B., Safin E. M. The inverse problem for a mixed-type parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2010, vol. 54, no. 4, pp. 48–54. doi: 10.3103/S1066369X10040067.
27. Khinchin A. Ya. *Tsepnye drobi* [Continued Fraction]. Moscow, Nauka, 1978, 112 pp. (In Russian)
28. Bukhshtab A. A. *Teoriia chisel* [Number Theory]. St. Petersburg, Lan', 2008, 384 pp. (In Russian)
29. Sabitov K. B. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Fizmatlit, 2013, 312 pp. (In Russian)