



УДК 539.37

## Анализ влияния объемной ползучести на кривые нагружения с постоянной скоростью и эволюцию коэффициента поперечной деформации в рамках линейной теории вязкоупругости





*А. В. Хохлов*

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,  
Научно-исследовательский институт механики,  
Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1.

### Аннотация

Аналитически исследуется способность линейного интегрального определяющего соотношения вязкоупругости Больдмана–Вольтерры с двумя произвольными материальными функциями (сдвиговой и объемной ползучести) для изотропных реономных материалов описывать разнообразные эффекты, связанные с возможными (наблюдаемыми в испытаниях) типами поведения осевой и поперечной деформаций, в частности, эффекты немонотонности, знакопеременности и отрицательности коэффициента поперечной деформации («коэффициента Пуассона»). Изучены общие качественные свойства и характерные особенности семейств кривых объемного, осевого и поперечного деформирования и зависимости коэффициента Пуассона от времени, порождаемых этим соотношением при одноосном растяжении/сжатии с постоянной скоростью и влияние на них характеристик обеих функций ползучести (они предполагаются возрастающими и выпуклыми вверх). Доказано, что линейная теория вязкоупругости способна моделировать немонотонное изменение и знакопеременность поперечной деформации и коэффициента Пуассона во времени, найдены критерии их монотонности, критерии наличия у них точек экстремума и точек перегиба, критерий отрицательности коэффициента Пуассона на некотором интервале времени (в зависимости от качественных свойств функций объемной и сдвиговой ползучести). Показано, что учет объемной ползучести может оказывать сильное влияние на качественное поведение поперечной деформации и коэффициента Пуассона. Обнаружены несколько характерных общих свойств семейств кривых осевого и поперечного деформирования и коэффициента Пуассона, которые удобно контролировать в испытаниях материалов при растяжении/сжатии с постоянной скоростью и использовать как маркеры границы области линейного поведения и как индикаторы

### Научная статья

    Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

### Образец для цитирования

Хохлов А. В. Анализ влияния объемной ползучести на кривые нагружения с постоянной скоростью и эволюцию коэффициента поперечной деформации в рамках линейной теории вязкоупругости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 4. С. 671–704. doi: [10.14498/vsgtu1710](https://doi.org/10.14498/vsgtu1710).

### Сведения об авторе

*Андрей Владимирович Хохлов*  <https://orcid.org/0000-0002-9212-2579>

кандидат технических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. упругости и пластичности;  
e-mail: [andrey-khokhlov@ya.ru](mailto:andrey-khokhlov@ya.ru)

неприменимости линейной теории вязкоупругости для моделирования в случае их нарушения в испытаниях (в интересующем диапазоне времен, деформаций и скоростей нагружения).

Исследованы специфические свойства кривых нагружения, порождаемых линейной теорией вязкоупругости в сочетании с постулатами о линейно-упругом изменении объема или о постоянстве коэффициента Пуассона, найдены дополнительные индикаторы неприменимости подобных моделей (с одной материальной функцией). В частности доказано, что пренебрежение объемной ползучестью хотя и не сужает диапазон возможных значений коэффициента Пуассона и не лишает линейное определяющее соотношение способности описывать смену знака коэффициента Пуассона и поперечной деформации и ее немонотонность, но все же заметно ограничивает эту способность и существенно обедняет спектр возможных типов изменения поперечной деформации и коэффициента Пуассона (сужает область применимости модели). У модели с объемной упругостью (в отличие от общего случая) зависимость от времени поперечной деформации не может иметь точки минимума и точки перегиба (она всегда выпукла вверх) и менять знак с положительного на отрицательный, а зависимость коэффициента Пуассона не может иметь точки экстремума и перегиба, участки убывания или выпуклости вниз и не может менять знак с «плюса» на «минус».

**Ключевые слова:** вязкоупругость, объемная ползучесть, нагружение с постоянной скоростью, немонотонность и знакопеременность поперечной деформации, коэффициент поперечной деформации, немонотонность и отрицательность коэффициента Пуассона, вязкоупругие ауксетики, индикаторы области (не)линейности, идентификация.

Получение: 7 июня 2019 г. / Исправление: 17 октября 2019 г. /

Принятие: 11 ноября 2019 г. / Публикация онлайн: 28 ноября 2019 г.

**Введение.** Подавляющее большинство (пожалуй, более 90%) аналитических и частично аналитических представлений решений краевых задач линейной теории вязкоупругости (например, сведенных к задаче восстановления оригиналов по изображениям или к интегральным уравнениям, требующим численного решения) и методов их приближенного решения опираются на одно из трех дополнительных предположений:

- 1) о несжимаемости материала,
- 2) о линейно-упругой зависимости объемной деформации от среднего напряжения (т. е. об отсутствии объемной ползучести),
- 3) о независимости от времени коэффициента (коэффициентов) Пуассона.

Каждый из этих трех упрощающих постулатов, ставших уже классическими (и порой воспринимаемых как само собой разумеющиеся), порождает некоторую связь между материальными функциями определяющего соотношения (ОС), уменьшает количество независимых функций (для изотропной линейно-вязкоупругой среды с двух до одной) и тем самым сужает многообразие качественных свойств теоретических кривых деформирования, релаксации и ползучести, порождаемых данным ОС при нагружениях по разным типовым программам, сужает круг эффектов (наблюдаемых в испытаниях реономных материалов), которые ОС способно адекватно описывать, сужает область применимости ОС и, как правило, снижает точность моделирова-

ния (хотя и облегчает идентификацию ОС по данным испытаний). Важный вопрос о том, как именно сужает, в чем и насколько, остается открытым и системному аналитическому исследованию в общем виде не подвергался.

Между тем анализ данных механических испытаний, микроскопии и рентгенографии разнообразных (даже изначально изотропных) материалов показывает, что изменение объема при нагружении, объемная ползучесть и релаксация, вид напряженно-деформированного состояния и его эволюция, влияние среднего напряжения и его истории (в частности, внешнего гидростатического давления и его скачков) на осевые и сдвиговые деформации и связанные с ними механические эффекты весьма существенны при описании деформирования и прочности многих реономных материалов [1–61]. На макроуровне они заметно влияют на проявление свойств материалов в одноосных испытаниях, на кривые релаксации и ползучести при растяжении–сжатии и сдвиге, кривые длительной прочности, кривые нагружения с постоянной скоростью и циклического нагружения. Регистрация и адекватный учет подобных эффектов (или пренебрежение ими) влияют на результаты обработки и интерпретации данных испытаний, достоверность определения механических свойств материалов, оценку прочности и долговечности элементов конструкций. К материалам, у которых эти эффекты влияния среднего напряжения и объемной ползучести ярко выражены (даже при малых деформациях), относятся, прежде всего, многие полимеры (полиэтилены, полипропилены, фторопласты и т. п.), дисперсно наполненные полимеры (твердые топлива, асфальтобетоны, ударопрочный полистирол, АБС-пластики), прессованные порошковые композиты, сплавы, металлические и полимерные пены, льды, грунты, горные породы и т. п. [2, 5–7, 14–20, 23–52]. Для них стандартные гипотезы о несжимаемости или упругой связи объемной деформации со средним напряжением, о независимости этой связи от второго и третьего инварианта тензора напряжения и вида напряженного состояния, о постоянстве коэффициента Пуассона оказываются непригодными [2, 5–7, 14, 15, 18, 26, 29–34, 37, 38, 41, 61], для таких материалов особенно сложно найти (маркировать) границу области линейного поведения.

Коэффициент поперечной деформации (КПД)  $\nu = -\varepsilon_{\perp}/\varepsilon_{\parallel}$  изотропных упруго-вязкопластичных материалов при одноосном нагружении не постоянен, а зависит от времени (от продольной деформации  $\varepsilon_{\parallel}(t)$ ) и программы нагружения. Зависимости поперечной и объемной деформаций ( $\varepsilon_{\perp}$  и  $\theta$ ) от времени и осевой деформации  $\varepsilon_{\parallel}$ , характер изменения и диапазоны значений КПД для упомянутых классов реономных материалов весьма разнообразны даже при малых деформациях, даже в стандартных испытаниях на ползучесть, релаксацию или нагружение с постоянной скоростью [1–61]. У большинства металлов, многих стекол, полимеров (например полиэтиленов высокой плотности, полипропиленов, ПММА, эпоксидных смол) и порошковых композитов наблюдается монотонное возрастание  $\nu$  с ростом  $\varepsilon_{\parallel}(t)$  [12, 13, 16, 22, 27, 28, 30, 33, 36, 51]. У многих реономных материалов, как достаточно хрупких, так и высокоэластичных (твердые топлива, асфальтобетоны, АБС-пластики, полипропилены, чугун и т. п.) наблюдается убывание  $\nu(t)$ , свидетельствующее, как правило, о необратимом изменении объема при растяжении или сжатии [2, 6, 7, 15, 18, 26, 29, 31, 37, 47, 48]. У некоторых материалов объемная деформация и КПД меняются немонотонно и меня-

ют знак [6, 7, 14, 30, 32, 34, 56]. Объемные и поперечные деформации, поведение кривых ползучести, диаграмм нагружения и КПД изотропных композитных материалов зависят от объемной доли дисперсного наполнителя (в частности пузырьков газа в пенах), от форм и размеров его частиц (ячеек в пенах), свойств адгезионных связей с матрицей, степени кристалличности матрицы, текущего уровня поврежденности, предыстории нагружения и термообработки и многих иных факторов (включая, к сожалению, сложности реализации экспериментов, достаточно точных измерений и качественной обработки результатов, приводящих порой к противоречащим друг другу выводам разных исследователей о характере поведения КПД одного и того же материала в аналогичных условиях испытаний). В последние три десятилетия обнаружены, активно конструируются, исследуются и синтезируются новые материалы (и конструкции, метаматериалы) с отрицательными КПД (“auxetics”) [39–53]; в большинстве статей изучаются упругие (вообще говоря, анизотропные) огзетики («ауксетики»), особенности эффекта смены знака и эволюции отрицательного КПД во времени системному анализу не подвергались. В ряде работ исследуется (экспериментально и теоретически) влияние на КПД вязкоупругих материалов программы одноосного нагружения [20–23, 25, 27, 32, 33, 35, 38, 54–58], в частности зависимость КПД от скорости нагружения, а также влияние на кривые деформирования и ползучести и на эволюцию КПД наложения всестороннего давления на одноосное растяжение или сдвиг [2, 5–7, 18, 29, 59–62] (подробнее см. обзоры в [2, 5–7, 62]).

Объемную ползучесть, изменение КПД, вида деформированного состояния и типичные механические эффекты, связанные с ними, следует учитывать при обработке и интерпретации кривых испытаний наследственных материалов (в частности методами индентирования) и при выборе и идентификации определяющего соотношения (ОС) для моделирования их поведения. Для выбора того или иного ОС для описания поведения некоторого материала (и дальнейшего совершенствования и обобщения ОС) важно знать, какие механические эффекты оно способно моделировать и при каких требованиях к материальным функциям, в частности, какие из упомянутых эффектов, связанных с объемной и поперечной деформациями. Для этого необходимо системное *аналитическое* исследование общих свойств кривых релаксации, ползучести и деформирования, которые порождает применяемое ОС с произвольными материальными функциями при разных типовых программах нагружения, и их зависимости от параметров программ нагружения и характеристик материальных функций. В частности, требуется системное исследование арсенала возможностей линейного ОС Больцмана–Вольтерры

$$\varepsilon_{ij}(t) = e_{ij} + \varepsilon_0 \delta_{ij}, \quad e_{ij}(t) = \frac{3}{2} \Pi s_{ij}(t), \quad \theta = \Pi_0 \sigma_0, \quad (1)$$

$$\sigma_0(t) = \sigma_{ii}(t)/3, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}, \quad \theta(t) = 3\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}(t),$$

$$\Pi y = \int_0^t \Pi(t - \tau) dy(\tau), \quad \Pi_0 y = \int_0^t \Pi_0(t - \tau) dy(\tau), \quad t > 0, \quad (2)$$

с двумя произвольными материальными функциями  $\Pi(t)$  и  $\Pi_0(t)$  (функциями сдвиговой и объемной ползучести) [1–3], изучение общих свойств порождаемых им базовых теоретических кривых, вытекающих из постулатов о наследственности, линейности и инвариантности относительно сдвигов по

времени операторов (2), связывающих истории изменения компонент девиаторов  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_0 \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_0 \mathbf{I}$  и шаровых частей тензоров напряжений  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  и малых деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  в произвольной точке тела, и постулата об отсутствии перекрестного влияния шаровых и девиаторных частей тензоров  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  друг на друга. Это полезно для выбора или построения более сложных и точных нелинейных моделей поведения реономных материалов, использующих линейную теорию наследственности и обобщающих ее в определенных аспектах, для их идентификации, аттестации и сопоставления, а также для контроля данных испытаний материалов и адекватной интерпретации наблюдаемых эффектов. Ведь линейное ОС (1) играет роль своеобразного «окуляра» для наблюдения и отсчетной базы для сопоставления (и идентификации), по отношению к которой естественно изучать эффекты нелинейного поведения материалов (отклонения от предсказаний линейной теории как начального приближения), наблюдаемые в испытаниях и описываемые различными нелинейными ОС (но не описываемые линейным). Нередко случается, что нелинейности поведения материала приписывают эффекты, адекватно описываемые в рамках линейной теории, вытекающие лишь из наличия наследственности и присущие *всем* (почти всем) линейно-вязкоупругим материалам (при достаточно малых деформациях и скоростях).

Данная статья продолжает цикл работ [62–71] (и др.) по системному исследованию комплекса моделируемых реологических эффектов, сфер влияния материальных функций, границ области применимости и удобных для проверки по данным испытаний материалов индикаторов (на) применимости линейного ОС (1) и физически нелинейного ОС

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t) &= \frac{3}{2} \Phi(L(t)) \sigma(t)^{-1} [\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}] + \frac{1}{3} \Phi_0(L_0(t)) \delta_{ij}, \\ L(t) &= \mathbf{\Pi} \boldsymbol{\sigma}, \quad L_0(t) = \mathbf{\Pi}_0 \sigma_0, \end{aligned} \quad (3)$$

с четырьмя произвольными материальными функциями  $\mathbf{\Pi}(t)$ ,  $\Phi(x)$ ,  $\mathbf{\Pi}_0(t)$ ,  $\Phi_0(x)$ . Здесь  $\sigma_0(t)$  — среднее напряжение,  $\sigma(t)$  — интенсивность напряжений. ОС (3) — один из вариантов распространения на трехосный случай нелинейного уравнения

$$\phi(\varepsilon_{11}(t)) = \int_0^t \mathbf{\Pi}(t - \tau) d\sigma_{11}(\tau), \quad \text{или} \quad \varepsilon_{11}(t) = \Phi(L(t)), \quad \Phi := \phi^{-1},$$

предложенного Ю. Н. Работновым [72, 73] в качестве обобщения одноосного линейного ОС (1) путем введения второй материальной функции  $\phi(u)$  (подробную библиографию по этим темам см. в работах [62, 64–66, 69, 71]). ОС (1) и (3) описывают процессы изотермического деформирования нестареющих изотропных вязкоупругих сред. Они связывают истории изменения тензоров (малых) деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  и напряжений  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  в произвольной точке тела в предположении отсутствия взаимного влияния шаровых и девиаторных частей тензоров  $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_0 \mathbf{I}$  и  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_0 \mathbf{I}$  (т. е. независимости объемной деформации  $\theta(t)$  от касательных напряжений, а сдвиговых деформаций от среднего напряжения  $\sigma_0(t)$ ) и отсутствия влияния третьих инвариантов тензоров [1–3, 62]. Множитель 3/2 вынесен из функции ползучести (ФП)  $\mathbf{\Pi}(t)$  в (1) для удобства сравнения с результатами анализа нелинейного ОС (3) с  $\Phi(x) = x$ .

Конкретные задачи данной статьи — изучение общих качественных свойств семейств кривых объемного, осевого и поперечного деформирования и зависимости КПД от времени, которые порождает ОС (1) с произвольными ФП  $\Pi(t)$ ,  $\Pi_0(t)$  при одноосном нагружении

$$\sigma_{11}(t) = bth(t), \quad \sigma_{ij}(t) \equiv 0 \text{ при } i + j > 2, \quad (4)$$

с постоянной скоростью  $b \neq 0$  (здесь  $h(t)$  — функция Хевисайда), анализ влияния на них свойств объемной функции ползучести, в частности, пренебрежения объемной ползучестью, а также их сопоставление с типичными свойствами кривых испытаний реономных материалов и поиск индикаторов неприменимости ОС (1) (индикаторов границы области линейности).

**1. Минимальные ограничения на функции ползучести линейного ОС (1).** Обращение ОС (1), как известно [1–4], имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \mathbf{R}_0 \theta, \quad s_{ij}(t) = \frac{2}{3} \mathbf{R} e_{ij}, \\ \mathbf{R} y &:= \int_0^t R(t - \tau) dy(\tau), \quad \mathbf{R}_0 y := \int_0^t R_0(t - \tau) dy(\tau), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где функции релаксации  $R(t)$  и  $R_0(t)$  связаны с ФП  $\Pi$  и  $\Pi_0$  интегральными уравнениями

$$\int_0^t R(t - \tau) \Pi(\tau) d\tau = t, \quad \int_0^t R_0(t - \tau) \Pi_0(\tau) d\tau = t, \quad t > 0,$$

выражающими условия взаимной обратности операторов  $\mathbf{P}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{\Pi} = \mathbf{I}$  и  $\mathbf{\Pi}_0 \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_0 \mathbf{\Pi}_0 = \mathbf{I}$ . Функции ползучести и релаксации  $\Pi(t)$ ,  $\Pi_0(t)$ ,  $R(t)$ ,  $R_0(t)$  в ОС (1), (5) предполагаются положительными и дифференцируемыми на  $(0; \infty)$ , функции  $\Pi$  и  $\Pi_0$  — возрастающими и выпуклыми вверх [63–67], а  $R$  и  $R_0$  — убывающими и выпуклыми вниз на  $(0; \infty)$ ,  $R$  и  $R_0$  могут иметь интегрируемую особенность или  $\delta$ -сингулярность в т.  $t = 0$  (слагаемое  $\eta\delta(t)$ ,  $\eta > 0$ ,  $\delta(t)$  — дельта-функция). Из этих условий следует, в частности, существование пределов  $R(+\infty) = \inf R(t) \geq 0$ ,  $R(0) = \sup R(t) > 0$  ( $y(0) := y(0+)$  — обозначение для предела функции  $y(t)$  справа в точке  $t = 0$ ;  $R(0) = +\infty$ , если  $R(t)$  не ограничена) и  $\Pi(0) = \inf \Pi(t) \geq 0$ .

Если  $\Pi(0) \neq 0$  и  $\Pi_0(0) \neq 0$  (такие модели будем называть регулярными), то  $R(0) = 1/\Pi(0) < \infty$  и  $R_0(0) = 1/\Pi_0(0) < \infty$  (т. е. мгновенный модуль сдвига  $2G = \frac{2}{3}R(0)$  и объемный модуль  $K = R_0(0)$  конечны) и на линейном пространстве непрерывных кусочно гладких при  $t \geq 0$  функций операторы ОС (2) и (5) представимы в виде операторов Вольтерры второго рода

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi} y &= \Pi(0)y(t) + \int_0^t \dot{\Pi}(t - \tau)y(\tau) d\tau, \\ \mathbf{R} y &= R(0)y(t) + \int_0^t \dot{R}(t - \tau)y(\tau) d\tau, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Все структурные реологические модели, полученные последовательными и параллельными соединениями линейных пружин и демпферов, описываются ОС (1). Например, ФП

$$\Pi(t) = \alpha t + \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \gamma \in [0, \beta], \quad (6)$$

удовлетворяет всем требованиям к ФП и в случае  $\gamma \in (0; \beta)$ ,  $\alpha, \beta > 0$ , порождает все четыре структурно различные (но эквивалентные [64]) четырехзвенные модели из двух пружин и двух демпферов (они регулярны,  $R = E_1 e^{-\mu_1 t} + E_2 e^{-\mu_2 t}$  и  $R(+\infty) = 0$ ), а при  $\alpha = 0$  — трехзвенные модели Кельвина и Пойнтинга—Томпсона с одним демпфером (они регулярны и эквивалентны,  $R = E e^{-\mu t} + r$  и  $R(+\infty) = r > 0$ ). Так как  $\Pi(0) = \beta - \gamma$ , семейство (6) порождает нерегулярные модели лишь в случае  $\gamma = \beta$ :

- при  $\lambda\beta = 0$  ньютоновскую жидкость ( $R = \eta\delta(t)$ ),
- при  $\alpha = 0$  модель Фойгта ( $R = \eta\delta(t) + r$ ),
- при  $\alpha > 0$  обе трехзвенные модели с одной пружиной и двумя демпферами ( $R = \eta\delta(t) + E e^{-\mu t}$ ,  $R(+\infty) = 0$ ).

При  $\gamma = 0$  (6) дает модель Максвелла ( $R = E e^{-\mu t}$ ).

**2. Свойства кривых деформирования ОС (1) при растяжении с постоянной скоростью.** Для одноосного нагружения вида (4) среднее напряжение  $\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{11} = \frac{1}{3}bt h(t)$ , а девиатор напряжений — диагональный тензор  $\mathbf{s}(t) = \frac{1}{3}bt \mathbf{diag}(2, -1, -1)$ .<sup>1</sup> Из (1) следует, что девиатор деформаций  $\mathbf{e} = \frac{1}{2}bQ(t) \mathbf{diag}(2, -1, -1)$  диагонален, а объемная деформация

$$\theta(t; b) = \mathbf{\Pi}_0 \sigma_0 = \frac{1}{3}bQ_0(t), \quad t > 0, \quad (7)$$

$$Q(t) := \int_0^t \Pi(\tau) d\tau, \quad Q_0(t) := \int_0^t \Pi_0(\tau) d\tau. \quad (8)$$

У тензора деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} + \frac{1}{3}\theta \mathbf{I}$  тоже отличны от нуля только диагональные элементы:

$$\varepsilon_{11}(t; b) = bQ(t) + \frac{1}{9}bQ_0(t), \quad (9)$$

$$\varepsilon_{22}(t; b) = \varepsilon_{33}(t; b) = -\frac{1}{2}bQ(t) + \frac{1}{9}bQ_0(t). \quad (10)$$

Интенсивности напряжений и деформаций:  $\sigma(t) = (\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij})^{1/2} = |b|t = 3|\sigma_0|$ ,  $\varepsilon = (\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij})^{1/2} = |b|Q(t)$ .

Для любой скорости  $b > 0$  объемная и осевая деформации (7), (9) и интенсивность деформаций — положительные, возрастающие и выпуклые вниз функции времени, поскольку

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= \frac{1}{3}b\Pi_0(t) > 0, & \ddot{\theta}(t) &= \frac{1}{3}b\dot{\Pi}_0(t) > 0, \\ \dot{\varepsilon}_{11}(t) &= b\Pi(t) + \frac{1}{9}b\Pi_0(t) > 0, & \ddot{\varepsilon}_{11}(t) &= b\dot{\Pi}(t) + \frac{1}{9}b\dot{\Pi}_0(t) > 0 \end{aligned}$$

(в силу положительности и возрастания ФП).

Отметим, что (материальная) функция  $Q$  задает семейство диаграмм деформирования (ДД)  $\sigma - \varepsilon$  в интенсивностях (в параметрической форме:

<sup>1</sup>Функцию Хевисайда  $h(t)$  будем опускать, полагая, что  $t > 0$ , время и компоненты напряжений считаем безразмерными.

$\sigma(t) = |b|t$ ,  $\varepsilon = |b|Q(t)$ ) и сдвиговых диаграмм  $\sigma_{12} - \varepsilon_{12}$  с постоянными скоростями нагружения (если задана программа нагружения  $\sigma_{12}(t) = bth(t)$ ), а функция  $Q_0$  (и формула (7)) – объемных диаграмм  $\sigma_0 - \theta$ . Свойства объемных и сдвиговых ДД (11), зависящих только от одной ФП, фактически изучены в работах [63, 73].

Чтобы получить явное уравнение (в форме  $\varepsilon = \varepsilon(\sigma; b)$ ), следует исключить параметр  $t = \sigma/b$  или  $t = \sigma_{11}/b = 3\sigma_0/b$ :

$$\varepsilon(\sigma, b) = |b|Q(\sigma/|b|), \quad \sigma > 0, \quad \theta(\sigma_0, b) = \frac{1}{3}bQ_0(3\sigma_0/b) \quad (11)$$

(в дальнейшем будем для определенности рассматривать случай  $b > 0$ ).

Уравнение семейства ДД можно записать в форме  $\varepsilon(\sigma, b) = \sigma\Theta(\sigma/b)$ , где  $\Theta(t) := t^{-1}Q(t)$  осреднение ФП. Свойства  $\Theta(t)$  аналогичны свойствам ФП [63]:  $\Theta(t)$  возрастающая гладкая функция при  $t > 0$ ,  $\frac{1}{2}\Pi(t) < \Theta(t) < \Pi(\frac{1}{2}t) < \Pi(t)$  (ибо  $\Pi(t)$  возрастает и выпукла вверх),  $\Theta(0+) = \Pi(0)$ ,  $\Theta(\infty) = \Pi(\infty)$ , а  $Q$  обладает следующими свойствами:  $Q(0) = 0$ ,  $Q(\infty) = \infty$ ,  $\dot{Q}(t) = \Pi(t) > 0$ ,  $\ddot{Q}(t) = \dot{\Pi}(t) > 0$ ,  $\ddot{Q}(t) = \ddot{\Pi}(t) \leq 0$  и  $\frac{1}{2}(\Pi(t) + \Pi(0)) < t^{-1}Q(t) < \Pi(\frac{1}{2}t) < \Pi(t)$  при  $t > 0$ .

Аналогично, уравнения (9) и (10) совместно с  $\sigma_{11} = bt$  задают семейства ДД  $\varepsilon_{11}(\sigma_{11}, b)$  и  $\varepsilon_{\perp}(\sigma_{11}, b)$  при растяжении, где  $\varepsilon_{\perp} := \varepsilon_{22}$  поперечная деформация:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(\sigma_{11}, b) &= bQ(\sigma_{11}/b) + \frac{1}{9}bQ_0(\sigma_{11}/b), \\ \varepsilon_{\perp}(\sigma_{11}, b) &= -\frac{1}{2}bQ(\sigma_{11}/b) + \frac{1}{9}bQ_0(\sigma_{11}/b). \end{aligned} \quad (12)$$

Чтобы получить уравнения ДД (11) в форме  $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ , следует ввести в рассмотрение функции  $F(x)$  и  $F_0(x)$ ,  $x > 0$ , обратные к возрастающим функциям (8):

$$\sigma(\varepsilon, b) = |b|F(\varepsilon/|b|), \quad \sigma_0(\theta, b) = \frac{1}{3}bF_0(3\theta/b). \quad (13)$$

Свойства функций  $F$  и  $F_0$  изучены в [71] (в частности доказано, что из положительности и возрастания ФП следует, что  $F$  (и  $F_0$ ) возрастающая выпуклая вверх функция,  $F(0) = 0$ ,  $F(\infty) = \infty$ ,  $F'(0+) = 1/\Pi(0)$  (в частности  $F'(0+) = \infty$ , если  $\Pi(0) = 0$ ),  $F'(\infty) = 1/\Pi(\infty)$ , функция  $F(x)/x$  убывает и  $F(x)/x > F'(x)$  при  $x > 0$ . Из ограничений  $\dot{\Pi} > 0$ ,  $\dot{\Pi}_0 > 0$ ,  $\ddot{\Pi} \leq 0$ ,  $\ddot{\Pi}_0 \leq 0$  на ФП и свойств функций  $Q$ ,  $Q_0$ ,  $F$ ,  $F_0$  вытекают следующие общие свойства ДД (13).

Секущий и касательный модули ДД (13):  $\sigma/\varepsilon = 1/\Theta(\sigma/b)$  и  $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, b) = 1/\varepsilon'_\sigma(\sigma, b) = 1/\Pi(\sigma/b)$ . Так как  $\varepsilon'_\sigma(\sigma, b) > 0$  и  $\sigma'_\varepsilon > 0$ , любая ДД (11) возрастает по  $\sigma$ , а ДД  $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$  возрастает по  $\varepsilon$  при любом  $b$ . Так как ФП возрастает, то  $\varepsilon'_\sigma(\sigma, b)$  возрастает по  $\sigma$  и убывает по  $b$ , а  $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, b)$  убывает по  $\varepsilon$  и возрастает по  $b$ . Поэтому для любого  $b > 0$  ДД (11) выпуклы вниз, а ДД в форме (13) выпуклы вверх на луче  $\varepsilon > 0$ . Семейство ДД (11) убывает по  $b$ , поскольку  $\dot{\Theta}(t) > 0$  и  $\Theta(\sigma/b)$  убывает по  $b$ , а семейство ДД в форме (13) возрастает по  $b$  (чем больше скорость, тем выше лежит ДД  $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ ), т. е. ОС (1) моделирует только положительную скоростную чувствительность. ДД (11) зависит от  $b$ , но мгновенный модуль (сдвига  $G$  или



объемный  $K$ ) не зависит от скорости нагружения:  $G := \sigma'_\varepsilon(0, b) = 1/\Pi(0)$  (для моделей с  $\Pi(0) = 0$  будет  $G = \infty$ ). При  $\varepsilon \rightarrow \infty$  касательный и секущий модули стремятся к общему пределу  $G_\infty = R(\infty) = 1/\Pi(\infty) \geq 0$  (если ФП ограничена, то  $G_\infty > 0$ ; если же ФП не ограничена, то  $G_\infty = 0$ ); длительный модуль  $G_\infty$  тоже не зависит от скорости нагружения.

Любая ДД (7) лежит «выше» (по оси  $\varepsilon$ ) прямой  $\varepsilon = \Pi(0)\sigma$ , так как  $\Theta(t) > \Theta(0+) = \Pi(0)$ , а все ДД в форме  $\sigma(\varepsilon, b)$  лежат ниже (по оси  $\sigma$ ) этой прямой. Точнее, в случае  $\Pi(0) \neq 0$  (для регулярных моделей) справедливы двусторонние оценки для всех ДД (11) и (13):

$$\begin{aligned} \Pi(0)\sigma < \varepsilon(\sigma; b) < \Pi(\infty)\sigma, \quad G_\infty\varepsilon < \sigma(\varepsilon, b) < G\varepsilon; \\ \Pi_0(0)\sigma_0 < \theta(\sigma_0, b) < \Pi_0(\infty)\sigma_0, \quad K_\infty\theta < \sigma_0(\theta, b) < K\theta. \end{aligned} \tag{14}$$

При  $b \rightarrow +\infty$  семейство ДД  $\varepsilon(\sigma; b)$  любой регулярной модели сходится сверху (а семейство  $\sigma(\varepsilon, b)$  снизу) к прямой  $\varepsilon = \sigma/G$  равномерно на любом отрезке оси  $\sigma$  [63]. Поэтому прямая  $\sigma = G\varepsilon$  — мгновенная ДД ОС (1) в случае  $\Pi(0) \neq 0$ . К ней же сходится и семейство ДД при постоянной скорости деформирования [63]. Если  $\Pi(0) = 0$ , то  $G = \infty$ , касательная к любой ДД (11) в нуле, горизонтальна, а к ДД в форме (13) — вертикальна, и семейство ДД  $\varepsilon(\sigma, b)$  равномерно сходится при  $b \rightarrow +\infty$  к прямой  $\varepsilon = 0$ . При  $b \rightarrow 0$  семейство ДД (11) всегда сходится (сверху) к прямой  $\sigma = G_\infty\varepsilon$  (равновесной ДД) равномерно на любом отрезке полуоси  $\varepsilon > 0$ . Это верно и в случае неограниченных или сингулярных функций релаксации. Для семейства объемных ДД  $\sigma_0(\theta, b)$  все свойства сохраняются с заменой  $G$  на  $K$ .

ДД  $\varepsilon(\sigma; b)$  имеет асимптоту при  $\sigma \rightarrow \infty$  лишь тогда, когда ФП ограничена и сходится интеграл

$$Y := \int_0^{+\infty} [\Pi(\infty) - \Pi(\tau)]d\tau$$

(очевидно,  $Y > 0$ ) [63], ее уравнение:  $\varepsilon = \Pi(\infty)\sigma - bY$ , или  $\sigma = G_\infty(\varepsilon + Yb)$ . Все ДД (11) стремятся к асимптоте снизу. Угловой коэффициент асимптоты равен длительному модулю  $G_\infty$  и не зависит от  $b$ . Вопрос о существовании асимптот у ДД не чисто абстрактный, поскольку выход на асимптоту (спрямление ДД, режим «линейного упрочнения») может происходить быстро в рабочем диапазоне деформаций и напряжений.

Например, у моделей с ФП (6)  $Q = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \beta t - \gamma\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda t})$  и семейство ДД (11) задается уравнением  $\varepsilon(\sigma, b) = \frac{1}{2}\alpha b^{-1}\sigma^2 + \beta\sigma - \gamma\lambda^{-1}b(1 - e^{-\lambda\sigma/b})$ ,  $\sigma > 0$ . Мгновенный модуль  $G = (\beta - \gamma)^{-1}$ ; у моделей с  $\gamma = \beta$  (сингулярных)  $G = \infty$ . Если  $\alpha = 0$ , т. е. у моделей Фойгта (с  $\gamma = \beta$ ) и Кельвина ( $\gamma \in (0; \beta)$ ), то  $\Pi(\infty) = \beta < \infty$ ,  $Y = \gamma/\lambda$ ,  $G_\infty = \beta^{-1}$ , и ДД имеет асимптоту  $\sigma = \beta^{-1}(\varepsilon + \gamma\lambda^{-1}b)$ .

На рис. 1 приведены ДД модели Кельвина (ФП (6) с  $\alpha = 0$ ) при  $\lambda = 0.1$ ,  $\beta = 0.01$ ,  $\gamma = 0.009$  (тогда  $G = (\beta - \gamma)^{-1} = 1000$ ,  $G_\infty = \beta^{-1} = 100$ , время ретардации  $\tau = \lambda^{-1} = 10$ ) для скоростей  $b = 0.01; 0.1; 1; 10$  (кривые 1–4). Штрих-пунктирные прямые — мгновенная и равновесная ДД  $\sigma = G\varepsilon$  и  $\sigma = G_\infty\varepsilon$ , фигурирующие в оценке (14), к ним сходится при  $b \rightarrow \infty$  и  $b \rightarrow 0$  семейство ДД с любым  $\lambda$ . Для сравнения приведены ДД модели с  $\lambda = 0.05$  (штриховые кривые 1'–4').

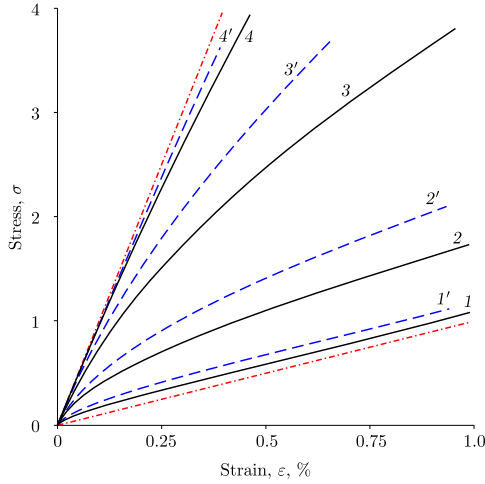


Рис. 1. Диаграммы деформирования двух моделей Кельвина с  $\lambda = 0.1$  (кривые 1–4) и  $\lambda = 0.05$  (кривые 1'–4')

[Figure 1. Stress-strain curves generated by the standard linear solid models (models (6) with  $\alpha = 0$ ) with  $\lambda = 0.1$  (curves 1–4) or  $\lambda = 0.05$  (curves 1'–4') at stress rates  $b = 0.01; 0.1; 1; 10$ ]

Осевые деформации (9) и ДД (12) при растяжении  $\varepsilon_{11}(\sigma_{11}, b)$  зависят от обеих ФП, но все качественные свойства у них такие же, как у сдвиговых и объемных ДД, поскольку обозначением  $\Pi_1(t) := \Pi + \frac{1}{9}\Pi_0$  (тогда  $Q_1 = Q + \frac{1}{9}Q_0$ ) они приводятся к виду

$$\varepsilon_{11}(t; b) = bQ_1(t), \quad \varepsilon_{11}(\sigma_{11}, b) = bQ_1(\sigma_{11}/b),$$

совпадающему по форме с (7) и (11), где функция  $\Pi_1(t)$  обладает теми же свойствами, что и ФП  $\Pi$  и  $\Pi_0$ :  $\Pi_1(t) > 0$ ,  $\dot{\Pi}_1(t) > 0$ ,  $\ddot{\Pi}_1(t) \leq 0$  при  $t > 0$ . В частности, для любого  $b > 0$  функции  $\varepsilon_{11}(t, b)$  и  $\varepsilon_{11}(\sigma_{11}, b)$  *положительны, возрастают и выпуклы вниз, любая ДД в форме  $\sigma_{11}(\varepsilon_{11}, b)$  возрастает и выпукла вверх по  $\varepsilon_{11}$  и удовлетворяет оценке*

$$\Pi_1(0)\sigma_{11} < \varepsilon_{11}(\sigma_{11}, b) < \Pi_1(\infty)\sigma_{11}, \quad E_\infty\varepsilon_{11} < \sigma_{11}(\varepsilon_{11}, b) < E\varepsilon_{11}, \quad (15)$$

где  $E := 1/\Pi_1(0)$ ,  $E_\infty := 1/\Pi_1(\infty) \geq 0$ , а семейство ДД  $\sigma_{11}(\varepsilon_{11}, b)$  возрастает по  $b$  и сходится при  $b \rightarrow 0$  к прямой  $\sigma_{11} = E_\infty\varepsilon_{11}$ , а при  $b \rightarrow \infty$  — к прямой  $\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}$  (при условии  $E < \infty$ , т. е. когда  $\Pi(0) \neq 0$  или  $\Pi_0(0) \neq 0$ ). Кроме того, семейство ДД  $\sigma_{11}(\varepsilon_{11}, b)$ , как и семейства сдвиговых, объемных и поперечных ДД (11), (12), обладает свойством самоподобия (инвариантности относительно однопараметрической группы растяжений плоскости  $\sigma - \varepsilon$ ): любая ДД  $\sigma(\varepsilon, b)$  получается из одной ДД  $\sigma(\varepsilon, b_0)$  растяжением вдоль осей  $\sigma$  и  $\varepsilon$  с коэффициентом  $b/b_0$ . Нарушение любого из этих свойств ДД в испытаниях материала (см., например, выпуклые вниз ДД в [40, 41, 45–48]) — явный признак нелинейности его поведения.

Поперечная деформация (10) не обязана быть ни монотонной, ни выпуклой вверх функцией, поскольку функция  $\Pi_\perp := -\frac{1}{2}\Pi + \frac{1}{9}\Pi_0$  не подчиняется ограничениям на ФП:  $\varepsilon_\perp := \varepsilon_{22}(t, b)$  может убывать или возрастать на

всем интервале  $t > 0$ , может иметь точки экстремума и перегиба и менять знак. Так как

$$\dot{\varepsilon}_{\perp} = -\frac{1}{2}b\dot{Q}(t) + \frac{1}{9}b\dot{Q}_0(t) = -\frac{1}{2}b\Pi(t) + \frac{1}{9}b\Pi_0(t), \quad \ddot{\varepsilon}_{\perp} = -\frac{1}{2}b\dot{\Pi}(t) + \frac{1}{9}b\dot{\Pi}_0(t), \quad (16)$$

при  $b > 0$  критерии (нестрогого) возрастания и выпуклости вниз  $\varepsilon_{\perp}(t)$  на некотором интервале времени имеют вид  $\Pi_0(t) \geq \frac{9}{2}\Pi(t)$  или  $\dot{\Pi}_0(t) \geq \frac{9}{2}\dot{\Pi}(t)$ , а уравнения для точек экстремума и перегиба —  $\Pi_0(t) = \frac{9}{2}\Pi(t)$  или  $\dot{\Pi}_0(t) = \frac{9}{2}\dot{\Pi}(t)$ . Поскольку они не зависят от скорости  $b$ , точки экстремума или перегиба всех кривых  $\varepsilon_{\perp}(t, b)$  синхронны (если они есть).

ПРИМЕР 1. Рассмотрим модель (1) с ФП модели Кельвина

$$\Pi = \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \Pi_0 = \beta_0 - \gamma_0 e^{-\lambda_0 t}, \quad \lambda, \beta, \lambda_0, \beta_0 > 0, \quad \gamma \in (0; \beta), \quad \gamma_0 \in (0; \beta_0). \quad (17)$$

Здесь  $\tau = \lambda^{-1}$  и  $\tau_0 = \lambda_0^{-1}$  — времена ретардации при сдвиге и изменении объема;  $G = 1/\Pi(0) = (\beta - \gamma)^{-1}$ ,  $G_{\infty} = 1/\Pi(\infty) = \beta^{-1}$ ,  $K = 1/\Pi_0(0) = (\beta_0 - \gamma_0)^{-1}$ ,  $K_{\infty} = 1/\Pi_0(\infty) = \beta_0^{-1}$  — мгновенный и длительный модули сдвига и объемные модули. Для модели (17)

$$\begin{aligned} Q &= \beta t - \gamma \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda t}), \quad Q_0 = \beta_0 t - \gamma_0 \lambda_0^{-1}(1 - e^{-\lambda_0 t}), \\ \varepsilon_{11} &= \frac{1}{9}b[(9\beta + \beta_0)t - 9\gamma \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda t}) + \gamma_0 \lambda_0^{-1}(1 - e^{-\lambda_0 t})], \\ \varepsilon_{\perp} &= \frac{1}{18}b[(2\beta_0 - 9\beta)t + 9\gamma \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda t}) - 2\gamma_0 \lambda_0^{-1}(1 - e^{-\lambda_0 t})]. \end{aligned}$$

Согласно (16), условие экстремума для  $\varepsilon_{\perp}(t)$  имеет вид  $2(\beta_0 - \gamma_0 e^{-\lambda_0 t}) = 9(\beta - \gamma e^{-\lambda t})$ . В общем случае это уравнение имеет не более двух корней.

При  $\lambda = \lambda_0$   $\dot{\varepsilon}_{\perp} = \frac{1}{18}b[(9\gamma - 2\gamma_0)e^{-\lambda t} + 2\beta_0 - 9\beta]$  и условие экстремума имеет вид  $e^{-\lambda t} = C$ ,  $C := (9\beta - 2\beta_0)/(9\gamma - 2\gamma_0)$ . Если  $C \in (0; 1)$ , то на полуоси  $t > 0$  существует единственная точка экстремума  $t_m = -\lambda^{-1} \ln C$  (точка максимума, если  $9\gamma > 2\gamma_0$ , и минимума, если  $9\gamma < 2\gamma_0$ ), в противном случае  $\varepsilon_{\perp}(t)$  монотонна при всех  $b$ . Отметим, что в условиях ползучести деформация  $\varepsilon_{\perp}(t)$  модели с  $\lambda = \lambda_0$  не может иметь точки экстремума [67].

При  $\lambda \neq \lambda_0$  и  $\gamma_0 \neq 0$   $\varepsilon_{\perp}(t)$  модели (17) может иметь и две точки экстремума, поскольку  $\dot{\varepsilon}_{\perp}(t)$  может быть немонотонной:  $\ddot{\varepsilon}_{\perp} = \frac{1}{18}b[2\gamma_0 \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} - 9\gamma \lambda e^{-\lambda t}]$ ,  $\ddot{\varepsilon}_{\perp} = 0$  при  $e^{(\lambda - \lambda_0)t} = 9\gamma \lambda / (2\gamma_0 \lambda_0)$ , и  $\dot{\varepsilon}_{\perp}(t)$  имеет (единственную) точку экстремума на полуоси  $t > 0$  в двух случаях:  $\lambda > \lambda_0$  и  $9\gamma \lambda > 2\gamma_0 \lambda_0$  или  $\lambda < \lambda_0$  и  $9\gamma \lambda < 2\gamma_0 \lambda_0$ . В случае  $\gamma_0 = 0$ , когда  $\Pi_0(t) = \text{const}$  (нет объемной ползучести), имеем  $\theta = \beta_0 \sigma_0(t)$ ,  $\varepsilon_{\perp} = \frac{1}{18}b[(2\beta_0 - 9\beta)t + 9\gamma \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda t})]$ ,  $\dot{\varepsilon}_{\perp} = \frac{1}{18}b[(9\gamma e^{-\lambda t} + 2\beta_0 - 9\beta)]$ , и (единственная) точка экстремума  $\varepsilon_{\perp}(t)$  существует при условии  $H := (9\beta - 2\beta_0)/(9\gamma) \in (0; 1)$ , а в противном случае  $\varepsilon_{\perp}(t)$  монотонна при всех  $b$ .

На рис. 2, а приведены графики деформаций  $\varepsilon_{11}(t)$  (кривые 1–3),  $\theta(t)/3$  (кривые 4–6) и  $\varepsilon_{\perp}(t) = \varepsilon_{22}$  (кривые 7–9) для скорости нагружения  $b = 0.01$ , порожденные (см. (7), (9), (10)) тремя моделями вида (17) с одинаковыми сдвиговыми ФП  $\Pi(t)$  ( $\lambda = 0.1$ ,  $\beta = 0.010$ ,  $\gamma = 0.008$  и  $\tau = \lambda^{-1} = 10$ ) и разными объемными ФП  $\Pi_0(t)$ , отличающимися временами ретардации  $\tau_0 = \lambda_0^{-1}$ :

- 1) с  $\lambda_0 = 0.01 < \lambda$  – кривые 1, 4, 7;
- 2) с  $\lambda_0 = \lambda = 0.1$  – кривые 2, 5, 8;
- 3) с  $\lambda_0 = 1 > \lambda$  – кривые 3, 6, 9.

Значения  $\beta_0 = 0.035$  и  $\gamma_0 = 0.015$  одинаковы у всех моделей. Примечательны немонотонность (наличие точки максимума) и смена знака поперечной деформации  $\varepsilon_{\perp}(t)$  (кривые 7–9, 13). Штрих-пунктирные линии 11, 12, 13 – деформации для модели с  $\lambda = 0$ , т. е. модели с упругим объемным деформированием и тем же мгновенным объемным модулем  $K = (\beta_0 - \gamma_0)^{-1} = 50$ , а линии 11', 12', 13' – для модели с  $\gamma_0 = 0$ , т. е. объемно-упругой модели с тем же длительным модулем  $K_{\infty} = \beta_0^{-1} \approx 29$ . Кривые деформирования этих двух моделей дают нижнюю и верхнюю оценки снизу для деформаций всех моделей с  $\lambda > 0$ , а также минимальный и максимальный интервалы положительности  $\varepsilon_{\perp}(t)$  в окрестности нуля.

**ПРИМЕР 2.** Рассмотрим фрактальную модель Максвелла со степенными ФП и непрерывными спектрами ретардации и релаксации:

$$\Pi = B + At^u, \quad \Pi_0 = B_0 + A_0t^w, \quad u, w \in (0; 1), \quad B, B_0 \geq 0, \quad A, A_0 > 0, \quad (18)$$

Здесь  $G = 1/\Pi(0) = B^{-1}$ ,  $G_{\infty} = 1/\Pi(\infty) = 0$ ,  $K = 1/\Pi_0(0) = B_0^{-1}$ ,  $K_{\infty} = 1/\Pi_0(\infty) = 0$ . Так как  $Q = Bt + A(u+1)^{-1}t^{u+1}$  и  $Q_0 = B_0t + A_0(w+1)^{-1}t^{w+1}$ , согласно (10) имеем

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{1}{18}b(2B_0t - 9Bt + 2A_0(w+1)^{-1}t^{w+1} - 9A(u+1)^{-1}t^{u+1}),$$

$$\dot{\varepsilon}_{\perp} = \frac{1}{18}b(2B_0 - 9B + 2A_0t^w - 9At^u).$$

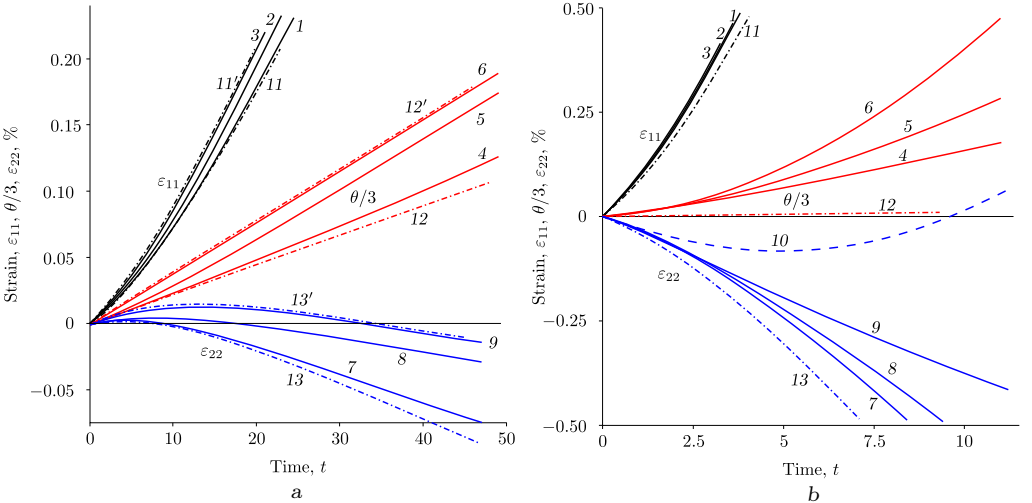


Рис. 2. Графики деформаций, вычисленные по формулам (7), (9), (10): а) для моделей вида (17); б) для моделей вида (18)

[Figure 2. Strains (7), (9), (10) as functions of time at stress rate  $b = 0.01$ : (a) curves  $\varepsilon_{11}(t)$  (1–3),  $\theta(t)/3$  (4–6), and  $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{22}$  (7–9) generated by the models (17) with different bulk compliances (with various retardation times); (b) curves generated by the model (18) with different bulk compliances which differ in the exponent value: curves 1, 4, 7 ( $w = 0.2 < u$ ), curves 2, 5, 8 and 3, 6, 9 ( $w = u = 0.5$ ), curves 11, 12, 13 ( $w = 0.8 > u$ ) are strains  $\varepsilon_{11}$ ,  $\theta(t)/3$  and  $\varepsilon_{\perp}$  generated by the model with  $A_0 = 0$  neglecting bulk creep (i.e. simulating elastic bulk deformation)]

Очевидно, если  $w > u$ , то при  $t \rightarrow \infty$  поперечная деформация  $\varepsilon_{\perp}(t) \rightarrow +\infty$  и  $\varepsilon_{\perp}(t)$  возрастает при достаточно больших  $t$ , а если  $w < u$ , то  $\varepsilon_{\perp}(t) \rightarrow -\infty$  и убывает. Если  $w = u$ , то  $\varepsilon_{\perp} = \frac{1}{18}bt[2B_0 - 9B + (2A_0 - 9A)(u + 1)^{-1}t^u]$ , уравнение для точек экстремума  $(2A_0 - 9A)t^u = 9B - 2B_0$  имеет единственное решение  $\hat{t} = C^{1/u}$ ,  $C := (9B - 2B_0)/(2A_0 - 9A)$  при условии  $C > 0$  ( $\hat{t}$  точка максимума  $\varepsilon_{\perp}(t)$ , если  $9B - 2B_0 < 0$  и  $2A_0 - 9A < 0$ , и точка минимума, если  $9B - 2B_0 > 0$  и  $2A_0 - 9A > 0$ ), а при  $C \leq 0$  деформация  $\varepsilon_{\perp}(t)$  — монотонная функция на полуоси  $t > 0$ : убывающая при  $2A_0 - 9A < 0$  и возрастающая при  $2A_0 - 9A > 0$ . При  $w \neq u$   $\varepsilon_{\perp}(t)$  может иметь и две точки экстремума, поскольку  $\ddot{\varepsilon}_{\perp} = \frac{1}{18}b(2A_0wt^{w-1} - 9Aut^{u-1})$  и  $\dot{\varepsilon}_{\perp}(t)$  имеет ровно одну точку экстремума  $t = (9Au/2A_0w)^{1/(w-u)}$ .

На рис. 2, b приведены графики деформаций  $\varepsilon_{11}(t)$  (кривые 1–3),  $\theta(t)/3$  (кривые 4–6) и  $\varepsilon_{\perp}(t) = \varepsilon_{22}$  (кривые 7–9), для  $b = 0.01$ , порожденных тремя моделями вида (18) с одинаковыми сдвиговыми ФП  $\Pi(t)$  ( $c u = 0.5$ ,  $A = 0.05$ ,  $B = 0.05$ ) и разными объемными ФП  $\Pi_0(t)$ :

- 1) с  $w = 0.2 < u$  — кривые 1, 4, 7;
- 2) с  $w = u = 0.5$  — кривые 2, 5, 8;
- 3) с  $w = 0.8 > u$  — кривые 3, 6, 9.

Параметры  $A_0 = 0.1$ ,  $B_0 = 0.01$  фиксированы. В случае  $w = 0.8 > u$  деформация  $\varepsilon_{\perp}(t)$  имеет точку минимума (кривая 9 — при  $t \approx 25$ , т.е. за пределами рисунка), далее возрастает и становится положительной. Чтобы проиллюстрировать этот эффект, приведена деформация  $\varepsilon_{\perp}(t)$  модели с  $A_0 = 0.2$  (вместо  $A_0 = 0.1$ ),  $B_0 = 0.01$  и  $w = 0.8$  (штриховая кривая 10). Отметим, что  $\varepsilon_{\perp}(t)$  меняет знак с плюса на минус, в отличие от  $\varepsilon_{\perp}(t)$  модели (17), меняющей знак с минуса на плюс (рис. 2, а). Штрих-пунктирные линии 11, 12, 13 — деформации  $\varepsilon_{11}$ ,  $\theta/3$  и  $\varepsilon_{\perp}$  для модели с  $A_0 = 0$  (и  $B_0 = 0.01$ ), т.е. модели с линейно-упругим объемным деформированием.

На рис. 3, а приведены диаграммы объемного, осевого и поперечного деформирования (11), (12) для тех же моделей (18) (и с той же нумерацией кривых 1–13), что и на рис. 2, b, но в форме зависимостей осевого напряжения  $\sigma_{11} = bt$  (при  $b = 0.01$ ) от деформаций  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{\perp}$  и  $\theta$ . Точкам экстремума кривых  $\varepsilon_{\perp}(t)$  с рис. 2, b соответствуют точки с вертикальной касательной на кривых на 9, 10, 20 рис. 3, а. Дополнительная штриховая кривая 20 — диаграмма  $\sigma_{11}(\varepsilon_{\perp}, b)$  модели с  $A_0 = 0.2$ ,  $B_0 = 0.01$  и  $w = 0.8$  (как и 10), но для скорости нагружения  $b = 0.02$ .

На рис. 3, b приведены диаграммы осевого и поперечного деформирования (12) модели (18) с  $w = 0.8$ ,  $A_0 = 0.1$ ,  $B_0 = 0.01$  (кривые 1–5 и 6–10) и модели с  $A_0 = 0$ , т.е. без объемной ползучести (штрих-пунктирные линии 1'–5' и 6'–10') для разных скоростей нагружения: кривые 1–5 и 1'–5' — ДД  $\sigma_{11}(\varepsilon_{11}, b)$  для  $b = 0.001; 0.01; 0.1; 1; 10$ , а кривые 6–10 и 6'–10' — поперечные ДД  $\sigma_{11}(\varepsilon_{\perp}, b)$  для  $b = 0.001; 0.005; 0.010; 0.015; 0.020$ . Для осевых ДД скорости пробегают четыре порядка, а не один, поскольку скоростная чувствительность поперечных ДД 6–10 значительно выше. Осевые ДД двух моделей схожи по форме, а их отклонение друг от друга уменьшается с ростом  $b$ . Поперечные ДД 6'–10' модели без объемной ползучести качественно совершенно иные — все они однозначны, монотонны и выпуклы вверх ( $\varepsilon_{\perp}(t)$  не меняет знак и не имеет точки минимума), в отличие от ДД 6–10 модели с объемной ползучестью.

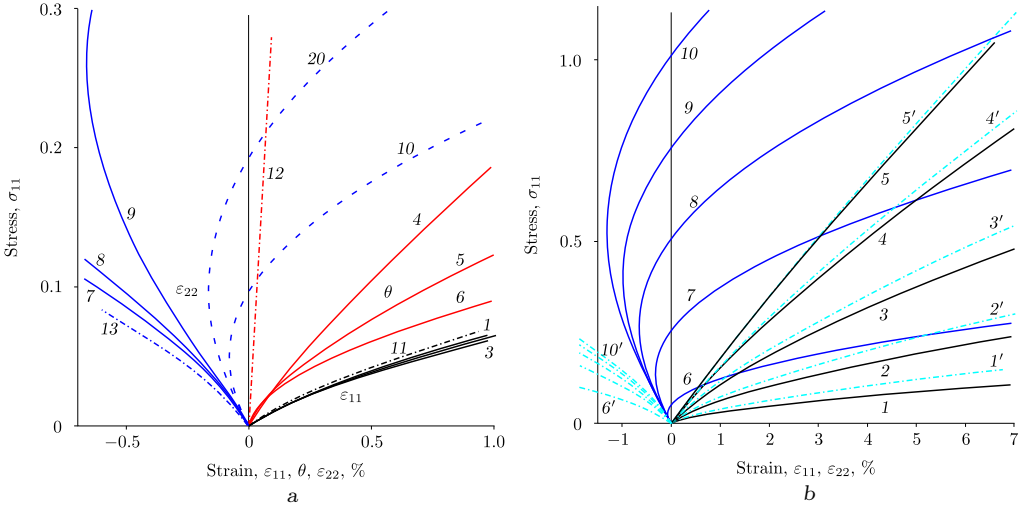


Рис. 3. Диаграммы осевого и поперечного деформирования: а) для четырех моделей (18) при  $b = 0.01$ ; б) для модели (18) с  $w = 0.8$  и модели без объемной ползучести при разных скоростях нагружения

[Figure 3. Stress-strain curves for axial and lateral strains: (a) dependences of strains  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{\perp}$  and  $\theta$  on stress  $\sigma_{11} = bt$  generated by four models (17) at stress rate  $b = 0.01$ ; numeration of curves coincides with the numeration on Fig. 2, b; (b) stress-strain curves  $\sigma_{11}(\varepsilon_{11}, b)$  and  $\sigma_{11}(\varepsilon_{\perp}, b)$  generated by the model (18) with  $w = 0.8$  (curves 1–5 and 6–10) or by the model neglecting bulk creep (dot-dashed curves 1'–5' and 6'–10') at different stress rates ( $b = 0.001; 0.01; 0.1; 1; 10$  for axial strains and  $b = 0.001; 0.005; 0.01; 0.015; 0.02$  for lateral strains)]

**3. Коэффициент поперечной деформации при растяжении с постоянной скоростью.** Поделив (10) на (9), найдем КПД при нагружении (4):

$$\nu(t) = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{11}} = \frac{1}{2} \frac{9bQ(t) - 2bQ_0(t)}{9bQ(t) + bQ_0(t)} = \frac{1}{2} - \frac{3Q_0(t)}{18Q(t) + 2Q_0(t)}, \quad (19)$$

или

$$\nu(t) = f(z\xi), \quad f(x) := \frac{1}{2} - \frac{3x}{6 + 2x} = -1 + \frac{9}{6 + 2x}, \quad (20)$$

$$\xi(t) := \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon} = \frac{\theta}{\varepsilon} = \frac{z}{3} \frac{Q_0(t)}{Q(t)}. \quad (21)$$

Здесь  $\xi(t)$  – параметр вида деформированного состояния,  $z = \text{sgn } b = \pm 1$ ,  $\varepsilon = (\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij})^{1/2} = |b|Q(t)$  – интенсивность деформаций. Аналогичный параметр вида напряженного состояния  $\xi_{\sigma} := 3\sigma_0(t)/\sigma(t) = bt/(|b|t) = z$  не зависит от времени. Независимость КПД (и параметра (21)) от скорости нагружения и ее знака – существенное отличие линейного ОС (1) от нелинейных ОС вязкоупругости. Это свойство, если оно не выполняется в испытаниях некоторого материала на нагружение с разными скоростями, можно использовать как индикатор нелинейности его поведения и неприменимости линейного ОС (1). Если же оно выполняется (см., например, [20]), то это аргумент в пользу гипотезы о линейно-вязкоупругом поведении материала.

Так как  $Q(t) > 0$  и  $Q_0(t) > 0$  при  $t > 0$ , то  $\theta \geq 0$ ,  $\xi \geq 0$  и  $\nu(t) \leq 0.5$ . Из  $Q(t) > 0$  (т. е. из  $\Pi(t) > 0$ ) следует оценка снизу:  $\nu(t) > -1$ . Таким образом,

для любых ФП в ОС (1) верна оценка

$$-1 < \nu(t) < 0.5, \quad t > 0. \quad (22)$$

Покажем, что она точна. Так как  $\dot{Q} = \Pi$  и  $\dot{Q}_0 = \Pi_0$ , по правилу Лопиталя пределы  $\xi(0+)$  и  $\xi(\infty)$  при  $t \rightarrow 0+$  и  $t \rightarrow +\infty$  совпадают с пределами отношения  $P := \frac{1}{3}z\Pi_0(t)/\Pi(t)$ :

$$\xi(0+) = P(0), \quad \xi(\infty) = P(\infty), \quad \nu(0+) = f(P(0)), \quad \nu(\infty) = f(P(\infty)). \quad (23)$$

Поэтому для моделей с  $\Pi_0(0) = 0$  (объемно нерегулярных) и  $\Pi(0) \neq 0$  формула (21) дает в пределе при  $t \rightarrow 0+$  величину  $\xi(0+) = 0$  и по (20)  $\nu(0+) = 0.5$  для любого  $b > 0$ , а для моделей с  $\Pi(0) = 0$  и  $\Pi_0(0) \neq 0$   $\xi(0+) = \infty$  и по (20)  $\nu(0+) = -1$ .

Из (23) следует, что функция  $\nu(t)$  всегда имеет горизонтальную асимптоту при  $t \rightarrow +\infty$ , поскольку предел  $\nu(\infty)$  (равновесное значение КПД) всегда конечен:  $\nu(\infty) = -1$ , если  $P(\infty) = \infty$ , и  $\nu(\infty) \in (-1; 0.5]$ , если  $P(\infty) < \infty$ . Кроме того, начальное и равновесное значения КПД при нагружении (4) такие же, как в условиях ползучести при постоянном напряжении [67].

КПД (19) при нагружении (4) может быть отрицательным, поскольку возможно  $\varepsilon_{\perp}(t) > 0$ . Критерий отрицательности  $\nu(t)$  на некотором интервале времени при растяжении имеет вид

$$Q_0(t) > \frac{9}{2}Q(t). \quad (24)$$

В зависимости от конкретных свойств ФП (от структуры множества нулей  $Z := \{t \mid t > 0, Q_0(t) = 4.5Q(t)\}$  функции  $\varepsilon_{\perp}(t)$ ) эта область (24) может быть пустой, может совпадать с полуосью  $t > 0$ , а может состоять из нескольких компонент связности (интервалов). Если  $\Pi(\infty) < \infty$  и  $\Pi_0(\infty) > 4.5\Pi(\infty)$ , то область (24) содержит луч  $t > t_*$ , где  $t_* = \sup Z < \infty$ . Если  $\Pi_0(0) > 4.5\Pi(0)$ , то область (24) содержит правую окрестность нуля  $(0; t_0)$ , где  $t_0 = \inf Z > 0$ .

Из (19) следует, что КПД  $\nu(t)$ , вообще говоря, не постоянен. Критерий независимости КПД от времени при растяжении с постоянной скоростью (т. е. критерий постоянства  $\xi(t) = k$ ,  $k > 0$ , в силу (20) налагает связь на сдвиговую и объемную ФП ОС (1):  $Q_0(t) = 3kQ(t)$  при  $t > 0$ , т. е.

$$\Pi_0(t) = 3k\Pi(t), \quad t > 0. \quad (25)$$

В силу (20)  $k = 3(0.5 - \nu)/(1 + \nu)$ . Очевидно, тождество (25) обеспечивает (в силу ОС (1)) постоянство КПД при одноосном нагружении по любой программе  $\sigma_{11}(t)$ . В частности, тождество (25) выполняется для несжимаемого материала (с  $\Pi_0(t) \equiv 0$ ), когда  $\nu(t) \equiv 0.5$  по (19).

КПД (19) при нагружении (4) не обязан быть монотонной функцией. Поскольку из (20) имеем

$$\dot{\nu}(t) = -3 \frac{\dot{\xi}(t)(6 + 2\xi(t)) - 2\dot{\xi}(t)\xi(t)}{(6 + 2\xi(t))^2} = -\frac{18\dot{\xi}(t)}{(6 + 2\xi(t))^2},$$

то знаки  $\dot{\nu}(t)$  и  $-\dot{\xi}(t)$  одинаковы, и поэтому совпадают интервалы монотонности  $\nu(t)$  и  $-\xi(t)$ :

$$\dot{\xi}(t) = \frac{1}{3}Q(t)^{-2}y(t), \quad y(t) := \Pi_0(t)Q(t) - Q_0(t)\Pi(t). \quad (26)$$

Критерий возрастания КПД (убывания  $\xi(t)$ ) на некотором интервале времени имеет вид  $y(t) \leq 0$ , т. е.  $Q_0(t)/\Pi_0(t) \geq Q(t)/\Pi(t)$ , а необходимое условие экстремума  $-y(t) = 0$ , т. е.

$$Q_0(t)/\Pi_0(t) = Q(t)/\Pi(t). \quad (27)$$

Если равенство (27) выполняется на некотором интервале времени (не обязательно совпадающем с полуосью  $t > 0$ ), то  $\dot{\nu} = 0$  и  $\nu(t) = \text{const}$  на этом интервале.

**ПРИМЕР 3.** Для модели (18) по формуле (23) имеем  $\xi(0) = B_0/(3B)$ ,  $\nu(0) = -1 + 27[18 + 2B_0/B]^{-1}$ , а при  $t \rightarrow \infty$  графики  $\nu(t)$  обладают горизонтальными асимптотами:

- $\xi(\infty) = 0$ ,  $\nu(\infty) = 0.5$  при  $u > w$ ;
- $\xi(\infty) = +\infty$ ,  $\nu(\infty) = -1$  при  $u < w$ ;
- $\xi(\infty) = A_0/(3A)$ ,  $\nu(\infty) = -1 + 27[18 + 2A_0/A]^{-1}$  при  $u = w$

(в первых двух случаях асимптоты не зависят от параметров модели, и при больших временах моделируемый материал ведет себя как несжимаемый или как не меняющий форму). Функцию

$$y(t) = (B_0 + A_0t^w)[Bt + A(u + 1)^{-1}t^{u+1}] - [B_0t + A_0(w + 1)^{-1}t^{w+1}](B + At^u)$$

из (26) можно привести к виду

$$y = AB_0[(u + 1)^{-1} - 1]t^{u+1} - A_0B[(w + 1)^{-1} - 1]t^{w+1} + A_0A[(u + 1)^{-1} - (w + 1)^{-1}]t^{u+w+1}.$$

Если  $w = u$ , то  $y = (A_0B - AB_0)u(u + 1)^{-1}t^{u+1}$ , и потому КПД — монотонная функция:

- при  $A_0B > AB_0$   $y(t) > 0$  и КПД убывает на всем луче  $t > 0$ ;
- при  $A_0B < AB_0$   $y(t) < 0$  и КПД возрастает на луче  $t > 0$ ;
- при  $A_0B = AB_0$   $\nu(t) = \text{const}$ .

В частности, если  $A_0 = 0$  и  $\Pi_0(t) = B_0 = \text{const}$  (такая ФП моделирует упругое изменение объема), то функция  $\xi(t) = ct/[3Q(t)]$  убывает, а КПД

$$\nu(t) = 0.5 - 3B_0[18(B + A(u + 1)^{-1}t^u) + 2B_0]^{-1}$$

возрастает на полуоси  $t > 0$ ,  $\nu(\infty) = 0.5$ ,  $\nu(0+) = -1 + \frac{27}{2}(9 + B_0/B)^{-1}$  и  $\nu(0+) < 0$  при  $B_0/B > 4.5$ . Если  $w \neq u$  и  $A_0 \neq 0$ , то  $y(t)$  и  $\dot{\nu}(t)$  могут менять знак и КПД может быть немонотонным.

На рис. 4 приведены графики КПД  $\nu(t)$  при нагружении (4) трех моделей семейства (18) с одинаковыми сдвиговыми ФП  $\Pi$  ( $u = 0.5$ ,  $A = 0.5$ ,  $B = 1$ ) и разными объемными ФП  $\Pi_0$ : с  $w = u = 0.5$  (штриховые кривые 0, 1, 2, 3, 5, 7), с  $w = 0.2 < u$  (кривые 0', 1', 2', 3', 5', 7') и с  $w = 0.8 > u$  (кривые 0'', 1'',



2'', 3'', 5'', 7''). Параметр  $A_0 = 1$  фиксирован, а номера кривых соответствуют разным значениям  $B_0 = 0; 1; 2; 3; 5; 7$  для каждой из трех моделей (с ростом  $B_0$ , т. е. с уменьшением мгновенного объемного модуля  $K = B_0^{-1}$ , график  $\nu(t)$  смещается вниз). При каждом  $B_0$  начальные значения  $\nu(0)$  одинаковы у всех трех моделей (и убывают с ростом  $B_0$ ), а горизонтальные асимптоты при  $t \rightarrow \infty$  различны (и не зависят от  $B_0$ ):  $\nu(\infty) = 0.5$  у всех моделей с  $w < u$ ,  $\nu(\infty) = -1$  у всех моделей с  $w > u$  и  $\nu(\infty) = -1 + 27[18 + 2A_0/A]^{-1} = 5/22$  при  $w = u$ . Асимптота штриховых кривых 0–7  $\nu = 5/22$  совпадает с кривой (прямой) 2, поскольку при  $w = u$  и  $B_0 = 2$  будет  $A_0B = AB_0$  и  $\nu(t) = \text{const}$ . Примечательны перемены знака и немонотонность  $\nu(t)$  (кривая 5'' меняет знак даже дважды). Для сравнения приведены два графика  $\nu(t)$  модели с линейно-упругим изменением объема, т. е. с  $A_0 = 0$  (штрих-пунктирные кривые 11 и 17): они монотонно возрастают и  $\nu(\infty) = 0.5$ . На рис. 4, b приведены те же графики КПД, что и на рис. 4, a, но на большем интервале времени.

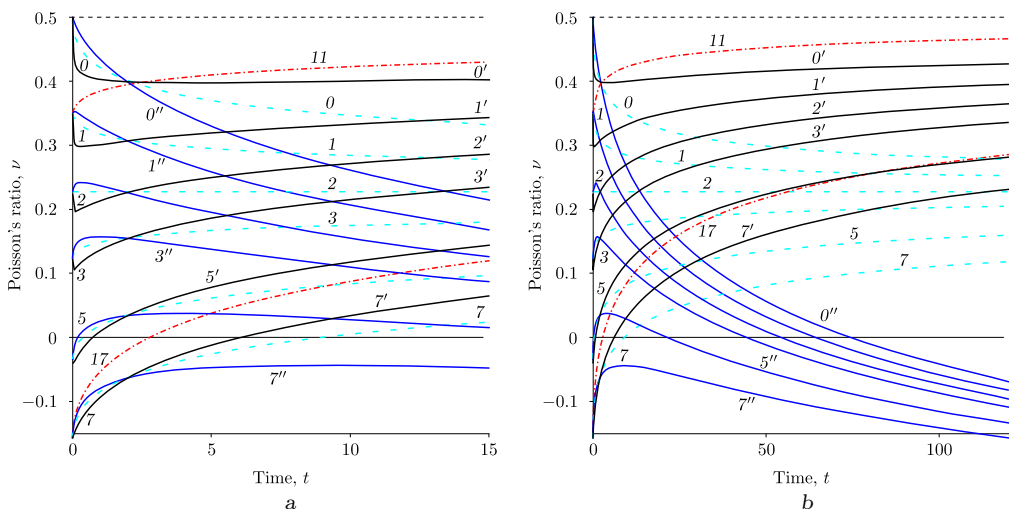


Рис. 4. Графики коэффициента Пуассона моделей семейства (18) с одинаковыми сдвиговыми функциями ползучести  $\Pi(t)$  и разными значениями параметров  $w$  и  $B_0$

[Figure 4. Dependence of the Poisson's ratio on time generated by the models (18) with the same shear compliance  $\Pi(t)$  (with  $u = 0.5$ ,  $A = 0.5$ ,  $B = 1$ ) and different bulk compliances varying in values of parameters  $B_0$  and  $w$ :  $w = u = 0.5$  (dashed curves 0, 1, 2, 3, 5, 7 for  $B_0 = 0; 1; 2; 3; 5; 7$ ),  $w = 0.2 < u$  (curves 0', 1', 2', 3', 5', 7') and  $w = 0.8 > u$  (curves 0'', 1'', 2'', 3'', 5'', 7''); red dot-dashed curves 11 and 17 depict the Poisson's ratio generated by the model with  $A_0 = 0$  neglecting bulk creep (i.e. simulating elastic bulk deformation) for  $B_0 = 1$  and  $B_0 = 7$ ; Fig. b shows the same curves on a larger interval of time than Fig. a]

**4. Об индикаторах (не)применимости и способах идентификации ОС (1) по испытаниям на нагружение с постоянной скоростью.** Выше найдены несколько характерных качественных свойств кривых деформирования и коэффициента Пуассона, которые удобно контролировать в испытаниях материалов и использовать как индикаторы границы области линейного поведения материала (индикаторы неприменимости линейного ОС (1)) по данным серии нагружений с постоянной скоростью. К ним, конечно, следует добавить количественные индикаторы. Один из них — независимость КПД (19) от скорости нагружения. Из (9), (10) также следует, что

отношения  $\varepsilon_{11}(t, b_2)/\varepsilon_{11}(t, b_1)$  и  $\varepsilon_{\perp}(t, b_2)/\varepsilon_{\perp}(t, b_1)$  в испытаниях с разными скоростями нагружения  $b_i$  не зависят от времени:

$$\varepsilon_{11}(t, b_2)/\varepsilon_{11}(t, b_1) = b_2/b_1, \quad \varepsilon_{\perp}(t, b_2)/\varepsilon_{\perp}(t, b_1) = b_2/b_1. \quad (28)$$

Если анализ данных испытаний материала показывает, что все необходимые индикаторы применимости линейного ОС (1) выполняются с удовлетворительной точностью и потому нет «противопоказаний» к его использованию для моделирования, то можно идентифицировать ОС (1) по данным всего одного испытания по программе (4) с некоторой (малой) скоростью  $b$ , в котором регистрируются как продольная, так поперечная деформации  $\varepsilon_{11}(t, b)$  и  $\varepsilon_{\perp}(t, b)$ . В самом деле, можно найти обе ФП  $\Pi(t)$  и  $\Pi_0(t)$  (на интервале времени, равном времени испытаний), определив сначала их первообразные  $Q$  и  $Q_0$  из системы уравнений (9), (10):

$$\varepsilon_{11}(t, b) - \varepsilon_{\perp}(t, b) = \frac{3}{2}bQ(t), \quad \varepsilon_{11}(t; b) + 2\varepsilon_{\perp}(t; b) = bQ_0(t). \quad (29)$$

Повысить точность определения  $\Pi(t)$  и  $\Pi_0(t)$  можно стандартным способом: осреднив результаты, полученные по испытаниям при нескольких значениях  $b = b_i$  в интересующем диапазоне скоростей нагружения. Можно также исключить процедуру численного дифференцирования функции  $Q$  и  $Q_0$  и расширить интервал времени, на котором определяются ФП, если напрямую определить  $\Pi(t)$  и  $\Pi_0(t)$  из одного испытания на ползучесть при некотором уровне напряжения  $\bar{\sigma}$  по измеренным деформациям [67]:

$$\Pi(t) = \frac{2}{3}(\varepsilon_{11}(t, \bar{\sigma}) - \varepsilon_{\perp}(t, \bar{\sigma}))/\bar{\sigma}, \quad \Pi_0(t) = 3(\varepsilon_{11}(t, \bar{\sigma}) + 2\varepsilon_{\perp}(t, \bar{\sigma}))/\bar{\sigma}. \quad (30)$$

Целесообразно сочетание испытаний этих двух типов (например, в одном испытании на ползучесть с начальной стадией нагружения с постоянной скоростью до заданного уровня напряжения), поскольку испытания на ползучесть позволяют найти ФП на достаточно длительных интервалах времени (но не позволяют найти их в окрестности нуля), а испытания на нагружение с постоянными скоростями позволяют найти мгновенные сдвиговые и объемный модули и уточнить значения ФП при малых (не слишком) временах, тех, которые приходится отсекаать в данных испытаний на ползучесть и релаксацию по правилу “ten times rule”.

**5. Свойства модели с условием постоянства коэффициента Пуассона.** Постулат о независимости КПД от времени очень часто применяется для существенного упрощения решения краевых задач вязкоупругости. Критерий независимости КПД от времени (25) налагает связь  $\Pi_0(t) = 3k\Pi(t)$  на ФП ОС (1), управляющие сдвиговыми и объемными деформациями, и превращает ОС (1) в модель с одной материальной функцией  $\Pi(t)$  и одним параметром  $\nu \in (-1; 0.5)$  (или параметром  $k = 3(0.5 - \nu)/(1 + \nu)$ , его физический смысл — отношение сдвигового и объемного модулей:  $k = G/K = \frac{1}{3}\Pi_0(\infty)/\Pi(\infty)$ ). В этом случае выражения (9) и (10) для деформаций при нагружении (4) принимают вид

$$\varepsilon_{11}(t; b) = b\left(1 + \frac{k}{3}\right)Q(t), \quad \varepsilon_{\perp}(t; b) = b\left(-\frac{1}{2} + \frac{k}{3}\right)Q(t), \quad (31)$$

т. е. осевые и поперечные кривые деформирования оказываются подобными (отношение любых двух из них не зависит от времени и скорости нагружения), а  $\varepsilon_{\perp}(t)$  не имеет ни точек экстремума, ни точек перегиба (в отличие от общего случая ОС (1) с двумя ФП): если  $k < 3/2$  (т. е.  $\nu > 0$ ), то  $\varepsilon_{\perp}$  отрицательна, убывает и выпукла вверх при  $t > 0$ , а если  $k > 3/2$  (т. е.  $\nu < 0$ ),  $\varepsilon_{\perp}$  положительна, возрастает и выпукла вниз при  $t > 0$  (как и осевая деформация  $\varepsilon_{11}$ ).

Таким образом, постулат о постоянстве КПД не только игнорирует всю специфику эволюции КПД реономных материалов во времени (которую, как доказано выше, способно качественно описывать ОС (1) с двумя ФП), но и радикально обрезает спектр возможных форм кривых поперечного деформирования  $\varepsilon_{\perp}(t)$  (и кривых релаксации и ползучести [67]): они не могут иметь ни точек экстремума, ни точек перегиба, ни перемен знака.

Указанные специфические свойства семейств кривых деформирования (31) удобно проверять в испытаниях материалов по программам (4) с разными скоростями нагружения  $b$ , в которых регистрируются продольная и поперечная деформации, и использовать как индикаторы (не)применимости постулата о постоянстве коэффициента Пуассона в сочетании с ОС (1) (перед этим, конечно, следует еще проверить выполнение базовых индикаторов применимости линейного ОС (1) с двумя ФП, например, независимость КПД от скорости  $b$  и независимость отношений (28) от времени). Их нарушение в интересующем диапазоне времен и скоростей нагружения свидетельствует о неприемлемости этого постулата. Отметим, что при  $t \rightarrow +\infty$  КПД  $\nu(t)$ , как было доказано для ОС (1) в общем случае, стремится к горизонтальной асимптоте, и потому при достаточно больших временах за пределами некоторого начального интервала времени модель с постоянным КПД может оказаться удовлетворительной (и важный вопрос, требующий исследования и четких формулировок в конкретных задачах — надежная оценка длительности этого «интервала неадекватности» постулата о постоянстве КПД).

**6. Свойства модели, пренебрегающей объемной ползучестью, индикаторы ее неприменимости.** Исследуем характерные особенности ОС (1) с  $P_0(t) = c = \text{const}$  и произвольной сдвиговой ФП  $\Pi(t)$ , т. е. модели с линейно-упругой зависимостью объемной деформации (УОД) от среднего напряжения:  $\theta = c\sigma_0$  (параметр  $c > 0$  задает объемный модуль  $K = c^{-1}$ ). В этом случае для нагружения (4) имеем  $Q_0 = ct$ ,

$$\theta = \frac{1}{3}bct, \quad \varepsilon_{11}(t; b) = bQ(t) + \frac{1}{9}bct, \quad \varepsilon_{\perp}(t, b) = -\frac{1}{2}bQ(t) + \frac{1}{9}bct, \quad (32)$$

$$\xi(t) = \frac{1}{3} \frac{zct}{Q(t)}, \quad \nu(t) = -1 + \frac{27}{2} \left[ 9 + \frac{ct}{Q(t)} \right]^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}c \left[ 9 \frac{Q(t)}{t} + c \right]^{-1}. \quad (33)$$

При  $c = 0$  получим модель несжимаемого материала:  $\nu(t) \equiv 0.5$ ,  $\varepsilon_{11} = bQ(t)$ ,  $\varepsilon_{\perp} = -0.5bQ(t)$  и поперечная деформация всегда отрицательна, убывает и выпукла вверх на всей полуоси  $t > 0$ .

При  $c > 0$  из (32) следует, что для любого  $b > 0$  осевая деформация  $\varepsilon_{11}(t)$  возрастает и выпукла вниз при  $t > 0$  (как и в общем случае), а поперечная деформация  $\varepsilon_{\perp}(t)$  выпукла вверх (в отличие от общего случая, когда она может иметь точки перегиба), но не обязана быть монотонной и может

менять знак. Действительно,

$$\dot{\varepsilon}_{\perp}(t) = -\frac{1}{2}b\Pi(t) + \frac{1}{9}bc, \quad \ddot{\varepsilon}_{\perp}(t) = -\frac{1}{2}b\dot{\Pi}(t) < 0,$$

уравнение для точек экстремума  $\varepsilon_{\perp}(t)$  имеет вид  $\Pi(t) = 4.5c$ , и в силу возрастания  $\Pi(t)$  возможны только три случая:

- 1) если  $\Pi(0) < \frac{2}{9}c < \Pi(\infty)$ , то  $\varepsilon_{\perp}(t)$  имеет (единственную) точку максимума  $t_m$  на полуоси  $t > 0$  и положительна в некоторой правой окрестности нуля (а  $\nu(t) < 0$  в этой окрестности);
- 2) если  $\frac{2}{9}c \geq \Pi(\infty)$ , то  $\varepsilon_{\perp}(t)$  возрастает и  $\varepsilon_{\perp}(t) > 0$  (а  $\nu(t) < 0$ ) при  $t > 0$ ;
- 3) если  $\frac{2}{9}c \leq \Pi(0)$ , то  $\varepsilon_{\perp}(t)$  убывает на полуоси  $t > 0$  и  $\varepsilon_{\perp}(t) < 0$ .

Второй случай реализуем только для моделей с ограниченной ФП (и нереализуем, например, для ФП вида (18) или вида (6) с  $\alpha > 0$  и для параллельных соединений любого числа моделей Максвелла). Третий случай невозможен для моделей с  $\Pi(0) = 0$  (например, с ФП  $\Pi = At^u$  или для последовательных соединений моделей Фойгта); у таких моделей всегда  $\varepsilon_{\perp}(t) > 0$  и  $\nu(t) < 0$  в интервале  $(0; t_0)$ , где  $t_0 = \infty$ , если  $\frac{2}{9}c \geq \Pi(\infty)$ , и  $t_0$  корень уравнения  $Q(t)t^{-1} = \frac{2}{9}c$ , если  $\frac{2}{9}c < \Pi(\infty)$  (очевидно, существует единственный корень, поскольку функция  $\Theta = Qt^{-1}$  возрастает и  $\Theta(\infty) = \Pi(\infty)$ ,  $t_0 > t_m$ ). Отметим, что в условиях ползучести модель с УОД (и произвольной ФП  $\Pi$ ) порождает монотонную поперечную деформацию [67], а в случае нагружения (4)  $\varepsilon_{\perp}(t)$  может иметь точку максимума.

В общем случае ОС (1) с  $\Pi_0(t) \neq \text{const}$  поперечная деформация (10), как было доказано выше, может иметь не только точки максимума, но и точки минимума, может менять знак не только с «плюса» на «минус», но и с «минуса» на «плюс» (рис. 2) и не обязана быть выпуклой вверх функцией: она может иметь точки перегиба. Таким образом, *главные качественные отличия модели с УОД — отсутствие точек перегиба и точек минимума у  $\varepsilon_{\perp}(t)$ , неспособность описывать материалы, у экспериментальных кривых  $\varepsilon_{\perp}(t)$  которых такие точки есть.*

Докажем, что для любой допустимой ФП  $\Pi(t)$  (подчиняющейся ограничениям  $\Pi(t) > 0$ ,  $\dot{\Pi}(t) > 0$ ,  $\ddot{\Pi}(t) \leq 0$ , наложенным на ФП) и любого  $c > 0$  КПД (33) модели с УОД возрастающая выпуклая вверх функция на полуоси  $t > 0$  (а  $\xi(t)$  — убывающая выпуклая вниз функция), т. е.  $\nu(t)$  не может иметь точек экстремума и перегиба (в отличие от ОС (1) общего вида). По (26)  $\dot{\xi}(t) = \frac{1}{3}Q(t)^{-2}y(t)$ ,  $y(t) = cQ - ct\Pi$  и  $\dot{y} = -ct\dot{\Pi} < 0$ , поскольку  $\Pi(t)$  возрастает. Т. к.  $y(0) = 0$ , то  $y(t) < 0$  при всех  $t > 0$ ,  $\dot{\xi}(t) < 0$ ,  $\xi(t)$  убывает, а  $\nu(t)$  возрастает. Согласно (33)

$$\dot{\nu}(t) = 54c \frac{t\Pi - Q}{(18Q + 2ct)^2}, \quad \ddot{\nu}(t) = 108c \frac{t(9Q + ct)\dot{\Pi} - 2(9\Pi + c)(t\Pi - Q)}{(18Q + 2ct)^3}.$$

Докажем, что числитель второй дроби  $g(t) := t(9Q + ct)\dot{\Pi} - 2(9\Pi + c)(t\Pi - Q)$  отрицателен при  $t > 0$ , т. е.  $\ddot{\nu}(t) < 0$ . Поскольку  $g(0) = 0$ , достаточно доказать, что  $g(t)$  убывает, т. е.  $\dot{g}(t) < 0$ . Выражение для  $\dot{g}(t)$  приводится к виду  $\dot{g} = t(9Q + ct)\ddot{\Pi} - 27(t\Pi - Q)\dot{\Pi}$ . Так как  $Q(t) < t\Pi(t)$  при  $t > 0$ , то в силу

ограничений  $\Pi(t) > 0$ ,  $\dot{\Pi}(t) > 0$ ,  $\ddot{\Pi}(t) \leq 0$  и  $Q(t) > 0$  оба слагаемых формулы для  $\dot{g}(t)$  отрицательны, и потому  $\ddot{v}(t) < 0$ . Аналогично доказывается, что  $\ddot{\xi}(t) > 0$ .

Пределы функций  $\xi(t)$  и  $\nu(t)$  при  $t \rightarrow 0+$  и  $t \rightarrow +\infty$  (т. е. их верхние и нижние грани на интервале  $t > 0$  в силу монотонности) вычисляются по (23) или непосредственно из (33) с учетом того, что  $Qt^{-1} \rightarrow \Pi(0)$  при  $t \rightarrow 0+$  и  $Qt^{-1} \rightarrow \Pi(\infty)$  при  $t \rightarrow +\infty$ :

$$\xi(0) = \frac{1}{3} \frac{c}{\Pi(0)}, \quad \xi(\infty) = \frac{1}{3} \frac{c}{\Pi(\infty)},$$

$$\nu(0) = -1 + \frac{27}{2} \left(9 + \frac{c}{\Pi(0)}\right)^{-1}, \quad \nu(\infty) = -1 + \frac{27}{2} \left(9 + \frac{c}{\Pi(\infty)}\right)^{-1}.$$

В зависимости от величин отношений  $c/\Pi(0)$  и  $c/\Pi(\infty)$  (мгновенного и длительного модулей сдвига к объемному модулю упругости) оба предельных значения  $\nu(0+)$  и  $\nu(\infty)$  КПД (33) могут пробегать весь интервал значений КПД  $(-1; 0.5)$  (см. (22)), в частности, если  $\Pi(0) = 0$ , то  $\nu(0) = -1$ . Таким образом, пренебрежение объемной ползучестью не сужает диапазон возможных значений КПД и, в частности, диапазон его равновесных значений  $\nu(\infty)$ . Очевидно,  $\nu(\infty) = 0.5$  тогда и только тогда, когда  $\Pi(\infty) = \infty$ , т. е. ФП не ограничена, а в случае  $\Pi(\infty) < \infty$   $\nu(\infty) < 0.5$  и  $\nu(\infty) \rightarrow -1$  при  $c/\Pi(\infty) \rightarrow \infty$ . Например, для модели (18) с  $A_0 = 0$ ,  $B_0 = c$  и любыми параметрами сдвиговой ФП имеем  $\nu(\infty) = 0.5$ ,  $\nu(0+) = -1 + \frac{27}{9}(9 + c/B)^{-1}$  и  $\nu(0+) < 0$  при  $B_0/B > \frac{9}{2}$  (см. штрих-пунктирные кривые 11 и 17 на рис. 4).

Критерий (24) отрицательности  $\nu(t)$  на некотором интервале времени принимает вид  $c > \frac{9}{2}Q(t)t^{-1}$ . В отличие от общего случая, область отрицательности КПД модели с УОД не может состоять из нескольких компонент связности: поскольку функция  $Q(t)t^{-1}$  возрастает и уравнение  $\frac{9}{2}Qt^{-1} = c$  имеет не более одного решения  $t_0$  при  $t > 0$ , то эта область либо пуста (в случае  $c \leq \frac{9}{2}\Pi(0)$ ), либо совпадает с интервалом  $(0; t_0)$  ( $t_0 = \infty$ , если  $c \geq \frac{9}{2}\Pi(\infty)$ ).

Таким образом, пренебрежение объемной ползучестью хотя и не сужает диапазон возможных значений КПД (и диапазон его мгновенных и равновесных значений) и не лишает ОС (1) способности описывать смену знака КПД и поперечной деформации и немонотонность  $\varepsilon_{\perp}(t)$  (в случае  $\Pi(0) < \frac{2}{9}c < \Pi(\infty)$ ), но все же заметно ограничивает эту способность и сильно обедняет спектр возможных типов изменения  $\varepsilon_{\perp}(t)$  и КПД (и ограничивает сферу применимости модели):

- 1)  $\varepsilon_{\perp}(t)$  не может иметь точки перегиба (всегда выпукла вверх);
- 2)  $\varepsilon_{\perp}(t)$  может иметь не более одной точки экстремума и она может быть лишь точкой максимума;
- 3)  $\varepsilon_{\perp}(t)$  не может менять знак с «минуса» на «плюс» (см. рис. 2), а КПД (33) с «плюса» на «минус»;
- 4) КПД не может иметь точки экстремума и перегиба и участки убывания или выпуклости вниз (см. штрих-пунктирные кривые 11 и 17 на рис. 4).

Их наличие у экспериментальной кривой  $\nu(t)$  — индикаторы неприменимости модели с УОД.

В силу (32) модель с УОД обладает еще одним весьма специфичным свойством: при нагружениях вида (4) (в точке рабочей части образца) функция

$V(t; b) := \varepsilon_{11}(t; b) + 2\varepsilon_{\perp}(t; b)$  линейно зависит не только от скорости нагружения  $b$ , но и от времени:

$$\varepsilon_{11}(t; b) + 2\varepsilon_{\perp}(t; b) = \frac{1}{3}bct. \quad (34)$$

Поскольку функцию  $V(t; b)$  (в случае малых деформаций она, очевидно, совпадает с объемной деформацией  $\theta$ ) удобно измерять в испытаниях материалов, это простое свойство можно (и удобно) использовать как один из основных индикаторов применимости гипотезы об отсутствии объемной ползучести в сочетании с ОС (1) по результатам нескольких испытаний материала по программам (4) с разными скоростями нагружения  $b$ , в которых регистрируются продольная и поперечная деформации. Его нарушение свидетельствует о неприемлемости постулата о линейно-упругой связи между объемной деформацией и средним напряжением. Перед этим, конечно, следует еще проверить выполнение базовых индикаторов применимости линейного ОС (1) в общем виде (с двумя ФП), например, независимость КПД от скорости  $b$  и независимость отношений (28) от времени.

Если эти необходимые признаки линейности и отсутствия объемной ползучести выполняются в испытаниях с удовлетворительной точностью, можно идентифицировать модель без объемной ползучести по данным всего одного испытания по программе (4) с некоторым  $b$ : найти параметр  $c$  (т. е. объемный модуль  $K$ ) по (34), а сдвиговую ФП  $\Pi(t)$  можно найти, определив сначала  $Q(t)$  из уравнения (32) для  $\varepsilon_{11}(t, b)$  или из тождества (29). Конечно, определить ФП можно и по формуле (30), используя данные одного испытания на ползучесть.

**Заключение.** В работе изучены возможности линейного ОС вязкоупругости (1) с двумя произвольными материальными функциями для изотропных материалов по описанию комплекса реологических эффектов, связанных с поведением поперечной деформации при одноосных нагружениях с постоянной скоростью. При минимальных ограничениях на функции объемной и сдвиговой ползучести аналитически исследованы общие свойства кривых объемного, осевого и поперечного деформирования (7), (9), (10) (и в форме диаграмм  $\sigma - \varepsilon$  (13), (12)), порождаемых ОС (1) при нагружениях (4), и зависимости коэффициента поперечной деформации (КПД) (19) от времени, изучено влияние на них характеристик обеих функций ползучести. В частности доказано, что ОС (1) способно моделировать немонотонность и знакопеременность поперечной деформации  $\varepsilon_{\perp}(t)$  и КПД, получены критерии отрицательности КПД при нагружении (4), критерий его постоянства и критерий его возрастания, убывания и немонотонности. Основные доказанные утверждения собраны в теореме.

**ТЕОРЕМА.** Пусть функции ползучести  $\Pi(t)$  и  $\Pi_0(t)$  в ОС (1) положительны, непрерывно дифференцируемы, возрастают и (нестрого) выпуклы вверх при  $t > 0$ . Тогда семейства кривых объемного, осевого и поперечного деформирования (7), (9), (10) и (11)–(13), порождаемые ОС (1) при нагружениях вида (4), и коэффициент Пуассона (19) обладают следующими свойствами.

1. Для любой скорости нагружения  $b > 0$  объемная и осевая деформации (7), (9) и интенсивность деформаций  $\varepsilon = |b|Q(t)$  положительные, возрастающие и выпуклые вниз функции времени на полуоси  $t > 0$ .

2. При любом  $b > 0$  диаграммы объемного и осевого деформирования (ДД)  $\sigma_0(\theta, b)$  и  $\sigma_{11}(\varepsilon_{11}, b)$  возрастают и выпуклы вверх при  $\theta > 0$  и  $\varepsilon_{11} > 0$ , и удовлетворяют двусторонним оценкам (14), (15), где  $K = 1/\Pi_0(0)$ ,  $K_\infty = 1/\Pi_0(\infty)$ ,  $E = [\Pi(0) + \frac{1}{9}\Pi_0(0)]^{-1}$ ,  $E_\infty = [\Pi(\infty) + \frac{1}{9}\Pi_0(\infty)]^{-1}$ .
3. Семейства ДД  $\sigma_{11}(\varepsilon_{11}, b)$  и  $\sigma_0(\theta, b)$  возрастают по  $b$  (положительная скоростная чувствительность) и сходятся при  $b \rightarrow 0$  к прямым  $\sigma_{11} = E_\infty \varepsilon_{11}$  или  $\sigma_0 = K_\infty \theta$  (равновесным ДД), а при  $b \rightarrow \infty$  (и условии  $\Pi_0(0) \neq 0$ ) к прямым  $\sigma_{11} = E \varepsilon_{11}$  или  $\sigma_0 = K \theta$  (мгновенным ДД).
4. Поперечная деформация (10) (и ДД  $\varepsilon_\perp(\sigma_{11}, b)$ ) не обязана быть ни монотонной, ни выпуклой вверх функцией:  $\varepsilon_\perp(t, b)$  может убывать или возрасти на всем интервале  $t > 0$ , может иметь точки экстремума и перегиба и менять знак; уравнения для точек экстремума и перегиба имеют вид  $\Pi_0(t) = \frac{9}{2}\Pi(t)$  или  $\dot{\Pi}_0(t) = \frac{9}{2}\dot{\Pi}(t)$  и не зависят от  $b$ .
5. Отношения  $\varepsilon_{11}(t, b_2)/\varepsilon_{11}(t, b_1)$ ,  $\varepsilon_\perp(t, b_2)/\varepsilon_\perp(t, b_1)$  и  $\theta(t, b_2)/\theta(t, b_1)$  деформаций (9), (10) и (7) для разных скоростей нагружения  $b_i$  не зависят от времени и равны друг другу (см. (28)).
6. Семейства осевых, поперечных и объемных ДД  $\sigma_{11}(\varepsilon_{11}, b)$ ,  $\sigma_{11}(\varepsilon_\perp, b)$  и  $\sigma_0(\theta, b)$  (см. (12), (13)) — инвариантны относительно однопараметрической группы растяжений плоскости  $\sigma - \varepsilon$ : любая ДД  $\sigma(\varepsilon, b)$  получается из ДД  $\sigma(\varepsilon, b_0)$  растяжением вдоль осей  $\sigma$  и  $\varepsilon$  с коэффициентом  $b/b_0$ .
7. Коэффициент поперечной деформации (КПД) выражается формулами (19) и (20), зависит лишь от отношения  $Q_0(t)/Q(t)$  материальных функций (8) и не зависит от скорости нагружения.
8. КПД меняется в диапазоне  $-1 < \nu(t) < 0.5$  и может менять знак; критерий отрицательности  $\nu(t)$  на некотором интервале времени — неравенство (24):  $Q_0(t) > 4.5Q(t)$ .
9. КПД не обязан быть монотонной функцией времени: он может убывать или возрастать при  $t > 0$  и может иметь точки максимума и минимума; точки экстремума являются корнями уравнения (27).
10. Существуют пределы  $\nu(t)$  при  $t \rightarrow 0+$  и  $t \rightarrow +\infty$  (начальное и равновесное значения КПД), они определяются по формуле (23) и могут принимать все значения из отрезка  $[-1; 0, 5]$ .
11. Критерий независимости КПД от времени при нагружениях (4) — тождество (25), связывающее ФП; для такой модели (с одной материальной функцией и параметром  $\nu \in (-1; 0.5)$ ) осевые и поперечные деформации выражаются формулами (31) и все осевые и поперечные кривые деформирования оказываются подобными (отношение любых двух из них не зависит от времени и скорости нагружения); поперечная деформация  $\varepsilon_\perp(t, b)$  (и ДД  $\varepsilon_\perp(\sigma_{11}, b)$ ) не может иметь ни точек экстремума, ни точек перегиба, ни перемен знака: если  $\nu > 0$  (и  $b > 0$ ), то  $\varepsilon_\perp(t, b)$  отрицательна, убывает и выпукла вверх при  $t > 0$ , а если  $\nu < 0$ , то  $\varepsilon_\perp(t, b)$  положительна, возрастает и выпукла вниз.
12. В случае модели с  $\Pi_0(t) = c = \text{const} > 0$ , т.е. в случае модели с упругой зависимостью объемной деформации от среднего напряжения, формулы для осевых и поперечных деформаций и КПД принимают вид (32)

и (33); поперечная деформация  $\varepsilon_{\perp}(t)$  не имеет точек перегиба и выпукла вверх при  $t > 0$  (для любой скорости  $b > 0$ ), но может менять знак и не обязана быть монотонной: если  $\Pi(0) < \frac{2}{9}c < \Pi(\infty)$ , то  $\varepsilon_{\perp}(t)$  имеет единственную точку максимума на полуоси  $t > 0$ , если  $\frac{2}{9}c \geq \Pi(\infty)$ , то  $\varepsilon_{\perp}(t)$  возрастает и  $\varepsilon_{\perp}(t) > 0$  при  $t > 0$ , а если  $\frac{2}{9}c \leq \Pi(0)$ , то  $\varepsilon_{\perp}(t)$  убывает на полуоси  $t > 0$  и  $\varepsilon_{\perp}(t) < 0$ . КПД такой модели (33) — возрастающая и выпуклая вверх на полуоси  $t > 0$  функция, т.е.  $\nu(t)$  не может иметь точек экстремума и перегиба, но пренебрежение объемной ползучестью не сужает диапазон возможных значений КПД и диапазон его начальных и равновесных значений  $\nu(0)$  и  $\nu(\infty)$ ; КПД может менять знак: критерий отрицательности  $\nu(t)$  на некотором интервале времени — неравенство  $c > \frac{9}{2}Q(t)t^{-1}$ . При любом  $t > 0$  КПД (33) меньше КПД этой модели при ползучести.

13. Если  $\Pi_0(t) \equiv 0$  (постулируется несжимаемость материала), то  $\varepsilon_{\perp}(t) = -0.5\varepsilon_{11}(t)$ , поперечная деформация  $\varepsilon_{\perp}(t)$  отрицательна, убывает и выпукла вверх (при  $b > 0$ ) на полуоси  $t > 0$ , а КПД  $\nu(t) \equiv 0.5$ .

Обнаруженные свойства кривых деформирования и КПД (прежде всего, пп. 1, 2, 5–7 теоремы) удобно проверять в испытаниях материалов и использовать как маркеры границы области линейного поведения материалов при анализе данных испытаний по программам нагружения (4): нарушение любого из этих свойств в испытаниях некоторого материала — признак нелинейности его поведения и индикатор неприменимости ОС (1) для моделирования (в этом диапазоне времен, деформаций и скоростей нагружения).

Указан простой способ идентификации определяющего соотношения (1), позволяющий определить обе функции ползучести по экспериментальным кривым продольной и поперечной деформаций при нагружении (4), если анализ данных испытаний показывает, что все указанные необходимые признаки применимости линейного ОС (1) выполняются, т. е. нет «противопоказаний» к его использованию для моделирования.

Исследованы специфические свойства кривых деформирования, порождаемых линейным ОС (1) в сочетании с постулатами о линейно-упругом изменении объема или о постоянстве коэффициента Пуассона (пп. 5, 6), найдены дополнительные индикаторы неприменимости подобных моделей с одной материальной функцией. Постулат о постоянстве КПД не только игнорирует всю специфику эволюции КПД реономных материалов с течением времени (которую, как доказано, способно качественно описывать ОС (1) с двумя ФП), но и радикально обрезает спектр возможного поведения кривых поперечного деформирования  $\varepsilon_{\perp}(t)$ : они не могут иметь ни точек экстремума, ни точек перегиба, ни перемен знака и должны быть пропорциональны кривым осевой деформации (возрастающим и выпуклым вверх). Пренебрежение объемной ползучестью хотя и не сужает диапазон возможных значений КПД (и диапазон его мгновенных и равновесных значений) и не лишает ОС (1) способности описывать смену знака КПД и поперечной деформации и немонотонность  $\varepsilon_{\perp}(t)$ , но все же заметно ограничивает эту способность, существенно обедняет спектр возможных типов изменения поперечной деформации и КПД и тем самым сужает область применимости модели: КПД (33) (в отличие от общего случая ОС (1) с учетом объемной ползучести) не может иметь точки экстремума и перегиба, участки убывания или выпуклости вниз и не может менять



знак с «плюса» на «минус», а поперечная деформация не может иметь точки минимума или точки перегиба (всегда выпукла вверх) и не может менять знак с «минуса» на «плюс». Для описания материалов, проявляющих подобные свойства (в интересующем диапазоне времен, деформаций и скоростей нагружения), вообще говоря, нельзя использовать предположения об упругом изменении объема, о несжимаемости или о постоянстве коэффициента Пуассона.

**Конкурирующие интересы.** Я заявляю об отсутствии явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Авторская ответственность.** Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-08-01146\_a).

### Библиографический список

1. Ильющин А. А., Победра Б. Е. *Основы математической теории термовязкоупругости*. М.: Наука, 1970. 280 с.
2. Москвитин В. В. *Сопротивление вязкоупругих материалов (применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе)*. М.: Наука, 1972. 328 с.
3. Cristensen R. M. *Theory of viscoelasticity. An introduction*. New York: Academic Press, 1971. xii+364 pp. doi: [10.1016/B978-0-12-174252-2.X5001-7](https://doi.org/10.1016/B978-0-12-174252-2.X5001-7).
4. Работнов Ю. Н. *Элементы наследственной механики твердых тел*. М.: Наука, 1977. 384 с.
5. Айнбиндер С. Б., Тюнина Э. Л., Цируле К. И. *Свойства полимеров в различных напряженных состояниях*. М.: Химия, 1981. 232 с.
6. Гольдман А. Я. *Объемная деформация пластмасс*. Л.: Машиностроение, 1984. 232 с.
7. Гольдман А. Я. *Прогнозирование деформационно-прочностных свойств полимерных и композиционных материалов*. Л.: Химия, 1988. 272 с.
8. Tschoegl N. W. *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior*. Berlin: Springer-Verlag, 1989. xxv+769 pp. doi: [10.1007/978-3-642-73602-5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-73602-5).
9. Lakes R. S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. xvi+461 pp. doi: [10.1017/CB09780511626722](https://doi.org/10.1017/CB09780511626722).
10. Christensen R. M. *Mechanics of Composite Materials*. New York: Dover Publ., 2012. 384 pp.
11. Bergström J. S. *Mechanics of Solid Polymers. Theory and Computational Modeling*. San Diego: William Andrew, 2015. xiv+509 pp. doi: [10.1016/C2013-0-15493-1](https://doi.org/10.1016/C2013-0-15493-1).
12. Брехова В. Д. Исследование коэффициента Пуассона при сжатии некоторых кристаллических полимеров постоянной нагрузкой // *Механика полимеров*, 1965. № 4. С. 43–46.
13. Дзене И. Я., Путанс А. В. Коэффициент Пуассона при одномерной ползучести полиэтилена // *Механика полимеров*, 1967. № 5. С. 947–949.
14. Дзене И. Я., Креггерс А. Ф., Вилкс У. К. Особенности процесса деформирования при ползучести и повторной ползучести полимеров в условиях одноосного растяжения. Часть 1 // *Механика полимеров*, 1974. № 3. С. 399–405.
15. Щербак В. В., Гольдман А. Я. Объемные изменения дисперсно наполненных композитов при испытании в условиях ползучести // *Механ. композит. матер.*, 1982. № 3. С. 549–552.
16. Калинин А. Е., Вахрушев А. В. О соотношении поперечной и продольной деформаций при одноосной ползучести разносопротивляющихся материалов // *Механ. композит. матер.*, 1985. № 2. С. 351–354.

17. Naqui S. I., Robinson I. M. Tensile dilatometric studies of deformation in polymeric materials and their composites // *J. Mater. Sci.*, 1993. vol. 28, no. 6. pp. 1421–1429. doi: [10.1007/BF00363333](https://doi.org/10.1007/BF00363333).
18. Özüpek S., Becker E. B. Constitutive equations for solid propellants // *J. Eng. Mater. Technol.*, 1997. vol. 119, no. 2. pp. 125–132. doi: [10.1115/1.2805983](https://doi.org/10.1115/1.2805983).
19. Tschoegl N. W. Time dependence in material properties: An overview // *Mech. Time-Depend. Mater.*, 1997. vol. 1, no. 1. pp. 3–31. doi: [10.1023/A:1009748023394](https://doi.org/10.1023/A:1009748023394).
20. Okoli O. I., Smith G. F. The effect of strain rate and fibre content on the Poisson's ratio of glass/epoxy composites // *Composite Structures*, 2000. vol. 48, no. 1–3. pp. 157–161. doi: [10.1016/S0263-8223\(99\)00089-6](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(99)00089-6).
21. Hilton H. H. Implications and constraints of time-independent Poisson's ratios in linear isotropic and anisotropic viscoelasticity // *J. Elasticity*, 2001. vol. 63, no. 3. pp. 221–251. doi: [10.1023/A:1014457613863](https://doi.org/10.1023/A:1014457613863).
22. Tschoegl N. W., Knauss W. G., Emri I. Poisson's ratio in linear viscoelasticity – A critical review // *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2002. vol. 6, no. 1. pp. 3–51. doi: [10.1023/A:1014411503170](https://doi.org/10.1023/A:1014411503170).
23. Arzoumanidis G. A., Liechti K. M. Linear viscoelastic property measurement and its significance for some nonlinear viscoelasticity models // *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2003. vol. 7, no. 3. pp. 209–250. doi: [10.1023/B:MTDM.0000007357.18801.13](https://doi.org/10.1023/B:MTDM.0000007357.18801.13).
24. Krempl E., Khan F. Rate (time)-dependent deformation behavior: an overview of some properties of metals and solid polymers // *Int. J. Plasticity*, 2003. vol. 19, no. 7. pp. 1069–1095. doi: [10.1016/S0749-6419\(03\)00002-0](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(03)00002-0).
25. Cangemi L., Elkoun S., G'Sell C., Meimon Y. Volume strain changes of plasticized Poly(vinylidene fluoride) during tensile and creep tests // *J. Appl. Polym. Sci.*, 2004. vol. 91, no. 3. pp. 1784–1791. doi: [10.1002/app.13313](https://doi.org/10.1002/app.13313).
26. Ломакин Е. В. Механика сред с зависящими от вида напряженного состояния свойствами // *Физ. мезомех.*, 2007. Т. 10, № 5. С. 41–52.
27. Pandini S., Pegoretti A. Time, temperature, and strain effects on viscoelastic Poisson's ratio of epoxy resins // *Polym. Eng. Sci.*, 2008. vol. 48, no. 7. pp. 1434–1441. doi: [10.1002/pen.21060](https://doi.org/10.1002/pen.21060).
28. O'Brien D. J., Sottos N. R., White S. R. Cure-dependent viscoelastic Poisson's ratio of epoxy // *Exp. Mech.*, 2007. vol. 47, no. 2. pp. 237–249. doi: [10.1007/s11340-006-9013-9](https://doi.org/10.1007/s11340-006-9013-9).
29. Быков Д. Л., Пелешко В. А. Определяющие соотношения деформирования и разрушения наполненных полимерных материалов в процессах преобладающего осевого растяжения в различных баротермических условиях // *Изв. РАН. МТТ*, 2008. № 6. С. 40–65.
30. Grassia L., D'Amore A., Simon S. L. On the viscoelastic Poisson's ratio in amorphous polymers // *J. Rheology*, 2010. vol. 54, no. 5. pp. 1009–1022. doi: [10.1122/1.3473811](https://doi.org/10.1122/1.3473811).
31. Shekhar H., Sahasrabudhe A. D. Longitudinal strain dependent variation of Poisson's ratio for HTPB based solid rocket propellants in uni-axial tensile testing // *Propellants Explosives Pyrotechnics*, 2011. vol. 36, no. 6. pp. 558–563. doi: [10.1002/prop.200900079](https://doi.org/10.1002/prop.200900079).
32. Tscharnuter D., Jerabek M., Major Z., Lang R. W. Time-dependent Poisson's ratio of polypropylene compounds for various strain histories // *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2011. vol. 15, no. 1. pp. 15–28. doi: [10.1007/s11043-010-9121-x](https://doi.org/10.1007/s11043-010-9121-x).
33. Emad K., Grasley Z. C., Masad E. Viscoelastic Poisson's ratio of asphalt mixtures // *Int. J. Geomechanics*, 2011. vol. 13, no. 2. pp. 162–169. doi: [10.1061/\(ASCE\)GM.1943-5622.0000199](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000199).
34. Guo J. X., Luigi G., Simon S. L. Bulk and shear rheology of a symmetric three-arm star polystyrene // *J. Polymer Science. Part B: Polymer Physics*, 2012. vol. 50, no. 17. pp. 1233–1244. doi: [10.1002/polb.23113](https://doi.org/10.1002/polb.23113).
35. Kästner M., Obst M., Brummund J., Thielsch K., Ulbricht V. Inelastic material behavior of polymers — Experimental characterization, formulation and implementation of a material model // *Mech. Mater.*, 2012. vol. 52. pp. 40–57. doi: [10.1016/j.mechmat.2012.04.011](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2012.04.011).

36. Кожевникова М. Е. Характер изменения границы зоны пластичности и коэффициента Пуассона в зависимости от пластического разрыхления // *Физ. мезомех.*, 2012. Т. 15, №6. С. 59–66.
37. Cui H. R., Tang G. J., Shen Z. B. Study on viscoelastic Poisson's ratio of solid propellants using digital image correlation method // *Propellants Explosives Pyrotechnics*, 2016. vol. 41, no. 5. pp. 835–843. doi: [10.1002/prop.201500313](https://doi.org/10.1002/prop.201500313).
38. Aurangzeb Q., Ozer H., Al-Qadi I. L., Hilton H. H. Viscoelastic and Poisson's ratio characterization of asphalt materials: Critical review and numerical simulations // *Mater. Struct.*, 2017. vol. 50, no. 1, 49. doi: [10.1617/s11527-016-0881-x](https://doi.org/10.1617/s11527-016-0881-x).
39. Lakes R. Foam structure with a negative Poisson's ratio // *Science*, 1987. vol. 235, no. 4792. pp. 1038–1040. doi: [10.1126/science.235.4792.1038](https://doi.org/10.1126/science.235.4792.1038).
40. Friis E. A., Lakes R. S., Park J. B. Negative Poisson's ratio polymeric and metallic materials // *J. Mater. Sci.*, 1988. vol. 23, no. 12. pp. 4406–4414. doi: [10.1007/BF00551939](https://doi.org/10.1007/BF00551939).
41. Caddock B. D., Evans K. E. Microporous materials with negative Poisson's ratios. I: Microstructure and mechanical properties // *J. Physics D: Applied Physics*, 1989. vol. 22, no. 12. pp. 1877–1882. doi: [10.1088/0022-3727/22/12/012](https://doi.org/10.1088/0022-3727/22/12/012).
42. Берлин Ал. Ал., Ротенбург Л., Басэрт Р. Особенности деформации неупорядоченных полимерных и неполимерных тел // *Высокомолек. соед. А*, 1992. Т. 34, № 7. С. 6–32.
43. Milton G. W. Composite materials with Poisson's ratios close to  $-1$  // *J. Mech. Phys. Solids*, 1992. vol. 40, no. 5. pp. 1105–1137. doi: [10.1016/0022-5096\(92\)90063-8](https://doi.org/10.1016/0022-5096(92)90063-8).
44. Alderson K. L., Evans K. E. The fabrication of microporous polyethylene having negative Poisson's ratio // *Polymer*, 1992. vol. 33, no. 20. pp. 4435–4438. doi: [10.1016/0032-3861\(92\)90294-7](https://doi.org/10.1016/0032-3861(92)90294-7).
45. Lakes R. S., Elms K. Indentability of conventional and negative Poisson's ratio foams // *J. Compos. Mater.*, 1993. vol. 27, no. 12. pp. 1193–1202. doi: [10.1177/002199839302701203](https://doi.org/10.1177/002199839302701203).
46. Chan N., Evans K. E. Indentation resilience of conventional and auxetic foams // *J. Cell. Plastics*, 1998. vol. 34, no. 3. pp. 231–260. doi: [10.1177/0021955X9803400304](https://doi.org/10.1177/0021955X9803400304).
47. Chan N., Evans K. E. The mechanical properties of conventional and auxetic foams. Part 1: Compression and tension // *J. Cell. Plastics*, 1999. vol. 35, no. 2. pp. 130–165. doi: [10.1177/0021955X9903500204](https://doi.org/10.1177/0021955X9903500204).
48. Alderson K. L., Fitzgerald A., Evans K. E. The strain dependent indentation resilience of auxetic microporous polyethylene // *J. Mater. Sci.*, 2000. vol. 35, no. 16. pp. 4039–4047. doi: [10.1023/A:1004830103411](https://doi.org/10.1023/A:1004830103411).
49. Конек Д. А., Войцеховский К. В., Плескачевский Ю. М., Шилько С. В. Материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона (Обзор) // *Мех. композ. матер. констр.*, 2004. Т. 10, № 1. С. 35–69.
50. Liu Y., Hu H. A review on auxetic structures and polymeric materials // *Sci. Res. Essays*, 2010. vol. 5, no. 10. pp. 1052–1063, <http://hdl.handle.net/10397/27029>.
51. Greaves G. N., Greer A. L., Lakes R. S., Rouxel T. Poisson's ratio and modern materials // *Nature Materials*, 2011. vol. 10, no. 11. pp. 823–837. doi: [10.1038/nmat3134](https://doi.org/10.1038/nmat3134).
52. Huang C., Chen L. Negative Poisson's ratio in modern functional materials // *Advanced Materials*, 2016. vol. 28, no. 37. pp. 8079–8096. doi: [10.1002/adma.201601363](https://doi.org/10.1002/adma.201601363).
53. Volokh K. Yu. On arterial fiber dispersion and auxetic effect // *J. Biomech.*, 2017. vol. 61. pp. 123–130. doi: [10.1016/j.jbiomech.2017.07.010](https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2017.07.010).
54. van der Varst P. G. Th., Kortsmits W. G. Notes on the lateral contraction of linear isotropic viscoelastic materials // *Arch. Appl. Mech.*, 1992. vol. 62, no. 5. pp. 338–346. doi: [10.1007/BF00788641](https://doi.org/10.1007/BF00788641).
55. Hilton H. H., Sung Y. The significance of (an)isotropic viscoelastic Poisson ratio stress and time dependencies // *Int. J. Solids Structures*, 1998. vol. 35, no. 23. pp. 3081–3095. doi: [10.1016/S0020-7683\(97\)00357-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00357-0).
56. Lakes R. S., Wineman A. S. On Poisson's ratio in linearly viscoelastic solids // *J. Elasticity*, 2006. vol. 85, no. 1. pp. 45–63. doi: [10.1007/s10659-006-9070-4](https://doi.org/10.1007/s10659-006-9070-4).

57. Abudushalamu A., Vandamme M., Torrenti J. M., Benoit M. Theoretical and practical differences between creep and relaxation Poisson's ratios in linear Viscoelasticity // *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2015. vol. 19, no. 4. pp. 537–555. doi: [10.1007/s11043-015-9277-5](https://doi.org/10.1007/s11043-015-9277-5).
58. Hilton H. H. Elastic and viscoelastic Poisson's ratios: The theoretical mechanics perspective // *Mater. Sci. Appl.*, 2017. vol. 8, no. 4. pp. 291–332. doi: [10.4236/msa.2017.84021](https://doi.org/10.4236/msa.2017.84021).
59. Айнбиндер С. Б., Алксне К. И., Тюнина Э. Л., Лака М. Г. *Свойства полимеров при высоких давлениях*. М.: Химия, 1973. 192 с.
60. Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Изменчивость коэффициента Пуассона для гексагональных кристаллов под давлением // *Труды МАИ*, 2016. № 87. С. 1–22.
61. Векилов Ю. Х., Красильников О. М., Луговской А. В. Упругие свойства твердых тел при высоких давлениях // *УФН*, 2015. Т. 185, № 11. С. 1215–1224. doi: [10.3367/UFNr.0185.201511f.1215](https://doi.org/10.3367/UFNr.0185.201511f.1215).
62. Хохлов А. В. Моделирование зависимости кривых ползучести при растяжении и коэффициента Пуассона реономных материалов от гидростатического давления с помощью нелинейно-наследственного соотношения Работнова // *Мех. композ. матер. констр.*, 2018. Т. 24, № 3. С. 407–436. doi: [10.33113/mkmk.ras.2018.24.03.407\\_436.07](https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2018.24.03.407_436.07).
63. Хохлов А. В. Характерные особенности семейств кривых деформирования линейных моделей вязкоупругости // *Проблемы прочности и пластичности*, 2015. Т. 77, № 2. С. 139–154. doi: [10.32326/1814-9146-2015-77-2-139-154](https://doi.org/10.32326/1814-9146-2015-77-2-139-154).
64. Хохлов А. В. Анализ свойств кривых ползучести с произвольной начальной стадией нагружения, порождаемых линейной теорией наследственности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 1. С. 65–95. doi: [10.14498/vsgtu1543](https://doi.org/10.14498/vsgtu1543).
65. Хохлов А. В. Анализ общих свойств кривых ползучести при циклических ступенчатых нагружениях, порождаемых линейной теорией наследственности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 2. С. 326–361. doi: [10.14498/vsgtu1533](https://doi.org/10.14498/vsgtu1533).
66. Хохлов А. В. Двусторонние оценки для функции релаксации линейной теории наследственности через кривые релаксации при гамп-деформировании и методики ее идентификации // *Изв. РАН. МТТ*, 2018. № 3. С. 81–104. doi: [10.7868/S0572329918030108](https://doi.org/10.7868/S0572329918030108).
67. Хохлов А. В. Анализ возможностей описания влияния гидростатического давления на кривые ползучести при растяжении и коэффициент Пуассона реономных материалов в рамках линейной теории вязкоупругости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 2. С. 304–340. doi: [10.14498/vsgtu1654](https://doi.org/10.14498/vsgtu1654).
68. Хохлов А. В. Асимптотика кривых ползучести, порождённых нелинейной теорией наследственности Работнова при кусочно-постоянных нагружениях, и условия затухания памяти // *Вестник Московского университета. Математика. Механика*, 2017. № 5. С. 26–31.
69. Хохлов А. В. Анализ свойств кривых релаксации с начальной стадией гамп-деформирования, порождаемых нелинейной теорией наследственности Работнова // *Мех. композ. матер.*, 2018. Т. 54, № 4. С. 687–708.
70. Хохлов А. В. Индикаторы неприменимости линейной теории вязкоупругости по данным испытаний материала на ползучесть при растяжении с наложением гидростатического давления // *Мех. композ. матер. констр.*, 2019. Т. 25, № 2. С. 259–280. doi: [10.33113/mkmk.ras.2019.25.02.259\\_280.09](https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2019.25.02.259_280.09).
71. Хохлов А. В. Свойства семейства диаграмм деформирования, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов // *Изв. РАН. МТТ*, 2019. № 2. С. 29–47. doi: [10.1134/S0572329919020077](https://doi.org/10.1134/S0572329919020077).
72. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием // *ПММ*, 1948. Т. 12, № 1. С. 53–62.
73. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с.

MSC: 74D05

## Analysis of the bulk creep influence on stress-strain curves under tensile loadings at constant rates and on Poisson's ratio evolution based on the linear viscoelasticity theory

**A. V. Khokhlov**


Lomonosov Moscow State University,  
Institute of Mechanics,  
1, Michurinsky prospekt, Moscow, 119192, Russian Federation.

### Abstract

The Boltzmann–Volterra linear constitutive equation for isotropic non-aging viscoelastic materials is studied analytically in order to elucidate its abilities to provide a qualitative simulation of rheological effects related to different behavior types of lateral strain and the Poisson's ratio (i.e. lateral contraction ratio) observed in uni-axial tests under tension or compression at constant stress rate. The viscoelasticity equation is controlled by two material functions of a positive real argument (that is shear and bulk creep compliances); they are implied to be positive, differentiable, increasing and convex up functions. General properties of the volumetric, longitudinal and lateral strain-time curves, stress-strain curves and the Poisson's ratio evolution in time generated by the viscoelasticity relation (with an arbitrary shear and bulk creep functions) are examined, their dependence on stress rate and on qualitative characteristics of two creep functions are analyzed, conditions for their monotonicity and convexity or for existence of extrema, inflection points and sign changes are studied. Taking into account compressibility and volumetric creep (governed by a time-dependent bulk creep function) is proved to affect strongly the qualitative behavior of lateral strain and the Poisson's ratio. In particular, it is proved that the linear theory can reproduce increasing, decreasing or non-monotone and convex up or down dependencies of lateral strain and Poisson's ratio on time under tension or compression at constant stress rate, it can provide existence of minimum, maximum or inflection points and sign changes from minus to plus and vice versa. It is shown, that the Poisson's ratio at any moment of time is confined in the interval from  $-1$  to  $0.5$  and the restriction on creep compliances providing negative values of the Poisson's ratio is derived. Criteria for the Poisson's ratio increase or decrease and for extrema existence are obtained. The analysis revealed the set of characteristic features of the theoretic volumetric, axial and lateral strain-time curves, stress-strain curves families

---

### Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this article in press as:

Khokhlov A. V. Analysis of the bulk creep influence on stress-strain curves under tensile loadings at constant rates and on Poisson's ratio evolution based on the linear viscoelasticity theory, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 671–704. doi: [10.14498/vsgtu1710](https://doi.org/10.14498/vsgtu1710) (In Russian).

#### Author's Details:

[Andrew V. Khokhlov](https://orcid.org/0000-0002-9212-2579)  <https://orcid.org/0000-0002-9212-2579>

Cand. Techn. Sci.; Leading Researcher; Lab. of Elasticity and Plasticity;

e-mail: [andrey-khokhlov@ya.ru](mailto:andrey-khokhlov@ya.ru)

and the Poisson's ratio dependence on time which are convenient to check in tensile tests at constant stress rates and should be employed as indicators of the linear viscoelasticity theory applicability (or non-applicability) for simulation of a material behavior before identification.

The specific properties of the two models are considered based on the assumption that the Poisson's ratio is time-independent or the assumption that bulk creep function is constant which neglects bulk creep and simulates purely elastic volumetric strain dependence on a mean stress. These assumptions reduce the number of material functions to the single one and one scalar parameter and are commonly (and very often) used for simplification of viscoelasticity problems solutions. A number of restrictions and additional applicability indicators are found for these models. In particular, it is proved that elastic volumetric deformation assumption does not cut the overall range of the Poisson's ratio values and does not demolish the Boltzmann–Volterra relation ability to describe non-monotonicity and sign changes of lateral strain and to produce negative values of the Poisson's ratio, but neglecting bulk creep restricts this ability significantly and reduces drastically the variety of possible behavior modes of lateral strain-time curves and the Poisson's ratio evolution and so contracts applicability field of the model. The model with constant bulk compliance generates only convex-up lateral strain-time curves which can not have minima or inflection points and can change sign from minus to plus only and the Poisson's ratio is increasing convex-up function of time (without any extrema or inflection points which are possible in general case) and can not change sign from positive to negative.

**Keywords:** viscoelasticity, volumetric creep, tensile tests at constant stress rates, non-monotone lateral strain-time curves, sign changes of lateral strain, lateral contraction ratio, non-monotone Poisson's ratio, negative Poisson's ratio, viscoelastic auxetics, evolution of auxetic behavior, indicators of linear range limits, identification.

Received: 7<sup>th</sup> June, 2019 / Revised: 17<sup>th</sup> October, 2019 /

Accepted: 11<sup>th</sup> November, 2019 / First online: 28<sup>th</sup> November, 2019

**Competing interests.** I declare that I have no apparent or potential conflicts of interest related to the publication of this article.

**Author's Responsibilities.** I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

**Funding.** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17-08-01146\_a).

## References

1. Il'yushin A. A., Pobedrya B. E. *Osnovy matematicheskoi teorii termoviazkoupругostii* [Fundamentals of the Mathematical Theory of Thermoviscoelasticity]. Moscow, Nauka, 1970, 280 pp. (In Russian)
2. Moskvitin V. V. *Soprotivlenie viazkoupругikh materialov* [Strength of Viscoelastic Materials]. Moscow, Nauka, 1972, 328 pp. (In Russian)
3. Cristensen R. M. *Theory of viscoelasticity. An introduction*. New York, Academic Press, 1971, xii+364 pp. doi: [10.1016/B978-0-12-174252-2.X5001-7](https://doi.org/10.1016/B978-0-12-174252-2.X5001-7).
4. Rabotnov Yu. N. *Elements of Hereditary Solid Mechanics*. Moscow, Mir Publ., 1980, 388 pp.
5. Ainbinder S. B., Tiunina E. L., Tsirole K. I. *Svoistva polimerov v razlichnykh napriazhennykh sostoianiyakh* [Properties of Polymers in Different Stress State]. Moscow, Khimiya, 1981, 232 pp. (In Russian)

6. Gol'dman A. Ya. *Ob"emmaia deformatsiia plastmass* [Volumetric Deformation of Plastics]. Leningrad, Mashinostroenie, 1984, 232 pp. (In Russian)
7. Gol'dman A. Ya. *Prediction of the deformation properties of polymeric and composite materials*. Washington, DC, American Chemical Society, 1994, xiii+349 pp.
8. Tschoegl N. W. *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior*. Berlin, Springer-Verlag, 1989, xxv+769 pp. doi: [10.1007/978-3-642-73602-5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-73602-5).
9. Lakes R. S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2009, xvi+461 pp. doi: [10.1017/CB09780511626722](https://doi.org/10.1017/CB09780511626722).
10. Christensen R. M. *Mechanics of Composite Materials*. New York, Dover Publ., 2012, 384 pp.
11. Bergström J. S. *Mechanics of Solid Polymers. Theory and Computational Modeling*. San Diego, William Andrew, 2015, xiv+509 pp. doi: [10.1016/C2013-0-15493-1](https://doi.org/10.1016/C2013-0-15493-1).
12. Brekhova V. D. Investigation of the Poisson's ratio of certain crystalline polymers under a constant compressive load, *Polymer Mechanics*, 1965, no. 4, pp. 23–24. doi: [10.1007/BF00858886](https://doi.org/10.1007/BF00858886).
13. Dzene I. Ya., Putans A. V. Poisson's ratio of polyethylene in one-dimensional creep, *Polymer Mechanics*, 1967, no. 5, pp. 626–627. doi: [10.1007/BF00859258](https://doi.org/10.1007/BF00859258).
14. Dzene I. Ya., Kregers A. F., Vilks U. K. Characteristic features of the deformation process on creep and secondary creep of polymers under conditions of uni-axial tension. Part I, *Polymer Mechanics*, 1974, vol. 10, no. 3, pp. 337–342. doi: [10.1007/BF00865585](https://doi.org/10.1007/BF00865585).
15. Shcherbak V. V., Gol'dman A. Ya. Volume changes in dispersely filled composites under creep tests, *Mekh. Kompozit. Mater.*, 1982, no. 3, pp. 549–552 (In Russian).
16. Kalinnikov A. E., Vakhrushev A. V. On a ratio between lateral and longitudinal strains in heteroresistant materials under uniaxial creep conditions, *Mekh. Kompozit. Mater.*, 1985, no. 2, pp. 351–354 (In Russian).
17. Naqui S. I., Robinson I. M. Tensile dilatometric studies of deformation in polymeric materials and their composites, *J. Mater. Sci.*, 1993, vol. 28, no. 6, pp. 1421–1429. doi: [10.1007/BF00363333](https://doi.org/10.1007/BF00363333).
18. Özüpek S., Becker E. B. Constitutive equations for solid propellants, *J. Eng. Mater. Technol.*, 1997, vol. 119, no. 2, pp. 125–132. doi: [10.1115/1.2805983](https://doi.org/10.1115/1.2805983).
19. Tschoegl N. W. Time dependence in material properties: An overview, *Mech. Time-Depend. Mater.*, 1997, vol. 1, no. 1, pp. 3–31. doi: [10.1023/A:1009748023394](https://doi.org/10.1023/A:1009748023394).
20. Okoli O. I., Smith G. F. The effect of strain rate and fibre content on the Poisson's ratio of glass/epoxy composites, *Composite Structures*, 2000, vol. 48, no. 1–3, pp. 157–161. doi: [10.1016/S0263-8223\(99\)00089-6](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(99)00089-6).
21. Hilton H. H. Implications and constraints of time-independent Poisson's ratios in linear isotropic and anisotropic viscoelasticity, *J. Elasticity*, 2001, vol. 63, no. 3, pp. 221–251. doi: [10.1023/A:1014457613863](https://doi.org/10.1023/A:1014457613863).
22. Tschoegl N. W., Knauss W. G., Emri I. Poisson's ratio in linear viscoelasticity – A critical review, *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2002, vol. 6, no. 1, pp. 3–51. doi: [10.1023/A:1014411503170](https://doi.org/10.1023/A:1014411503170).
23. Arzoumanidis G. A., Liechti K. M. Linear viscoelastic property measurement and its significance for some nonlinear viscoelasticity models, *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2003, vol. 7, no. 3, pp. 209–250. doi: [10.1023/B:MTDM.0000007357.18801.13](https://doi.org/10.1023/B:MTDM.0000007357.18801.13).
24. Krempl E., Khan F. Rate (time)-dependent deformation behavior: an overview of some properties of metals and solid polymers, *Int. J. Plasticity*, 2003, vol. 19, no. 7, pp. 1069–1095. doi: [10.1016/S0749-6419\(03\)00002-0](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(03)00002-0).
25. Cangemi L., Elkoun S., G'Sell C., Meimon Y. Volume strain changes of plasticized Poly(vinylidene fluoride) during tensile and creep tests, *J. Appl. Polym. Sci.*, 2004, vol. 91, no. 3, pp. 1784–1791. doi: [10.1002/app.13313](https://doi.org/10.1002/app.13313).
26. Lomakin E. V. Mechanics of media with stress-state dependent properties, *Phys. Mesomech.*, 2007, vol. 10, no. 5–6, pp. 255–264. doi: [10.1016/j.physme.2007.11.004](https://doi.org/10.1016/j.physme.2007.11.004).

27. Pandini S, Pegoretti A. Time, temperature, and strain effects on viscoelastic Poisson's ratio of epoxy resins, *Polym. Eng. Sci.*, 2008, vol. 48, no. 7, pp. 1434–1441. doi: [10.1002/pen.21060](https://doi.org/10.1002/pen.21060).
28. O'Brien D. J., Sottos N. R., White S. R. Cure-dependent viscoelastic Poisson's ratio of epoxy, *Exp. Mech.*, 2007, vol. 47, no. 2, pp. 237–249. doi: [10.1007/s11340-006-9013-9](https://doi.org/10.1007/s11340-006-9013-9).
29. Bykov D. L., Peleshko V. A. Constitutive relations for strain and failure of filled polymer materials in dominant axial tension processes under various barothermal conditions, *Mech. Solids*, 2008, vol. 43, no. 6, pp. 870–891. doi: [10.3103/S0025654409050070](https://doi.org/10.3103/S0025654409050070).
30. Grassia L., D'Amore A., Simon S. L. On the viscoelastic Poisson's ratio in amorphous polymers, *J. Rheology*, 2010, vol. 54, no. 5, pp. 1009–1022. doi: [10.1122/1.3473811](https://doi.org/10.1122/1.3473811).
31. Shekhar H., Sahasrabudhe A. D. Longitudinal strain dependent variation of Poisson's ratio for HTPB based solid rocket propellants in uni-axial tensile testing, *Propellants Explosives Pyrotechnics*, 2011, vol. 36, no. 6, pp. 558–563. doi: [10.1002/prop.200900079](https://doi.org/10.1002/prop.200900079).
32. Tscharnuter D., Jerabek M., Major Z., Lang R. W. Time-dependent Poisson's ratio of polypropylene compounds for various strain histories, *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2011, vol. 15, no. 1, pp. 15–28. doi: [10.1007/s11043-010-9121-x](https://doi.org/10.1007/s11043-010-9121-x).
33. Emad K., Grasley Z. C., Masad E. Viscoelastic Poisson's ratio of asphalt mixtures, *Int. J. Geomechanics*, 2011, vol. 13, no. 2, pp. 162–169. doi: [10.1061/\(ASCE\)GM.1943-5622.0000199](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000199).
34. Guo J. X., Luigi G., Simon S. L. Bulk and shear rheology of a symmetric three-arm star polystyrene, *J. Polymer Science. Part B: Polymer Physics*, 2012, vol. 50, no. 17, pp. 1233–1244. doi: [10.1002/polb.23113](https://doi.org/10.1002/polb.23113).
35. Kästner M., Obst M., Brummund J., Thielsch K., Ulbricht V. Inelastic material behavior of polymers — Experimental characterization, formulation and implementation of a material model, *Mech. Mater.*, 2012, vol. 52, pp. 40–57. doi: [10.1016/j.mechmat.2012.04.011](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2012.04.011).
36. Kozhevnikova M. E. Plastic zone boundary and Poisson's ratio depending on plastic loosening, *Phys. Mesomech.*, 2013, vol. 16, no. 2, pp. 162–169. doi: [10.1134/S1029959913020070](https://doi.org/10.1134/S1029959913020070).
37. Cui H. R., Tang G. J., Shen Z. B. Study on viscoelastic Poisson's ratio of solid propellants using digital image correlation method, *Propellants Explosives Pyrotechnics*, 2016, vol. 41, no. 5, pp. 835–843. doi: [10.1002/prop.201500313](https://doi.org/10.1002/prop.201500313).
38. Aurangzeb Q., Ozer H., Al-Qadi I. L., Hilton H. H. Viscoelastic and Poisson's ratio characterization of asphalt materials: Critical review and numerical simulations, *Mater. Struct.*, 2017, vol. 50, no. 1, 49. doi: [10.1617/s11527-016-0881-x](https://doi.org/10.1617/s11527-016-0881-x).
39. Lakes R. Foam structure with a negative Poisson's ratio, *Science*, 1987, vol. 235, no. 4792, pp. 1038–1040. doi: [10.1126/science.235.4792.1038](https://doi.org/10.1126/science.235.4792.1038).
40. Friis E. A., Lakes R. S., Park J. B. Negative Poisson's ratio polymeric and metallic materials, *J. Mater. Sci.*, 1988, vol. 23, no. 12, pp. 4406–4414. doi: [10.1007/BF00551939](https://doi.org/10.1007/BF00551939).
41. Caddock B. D., Evans K. E. Microporous materials with negative Poisson's ratios. I: Microstructure and mechanical properties, *J. Physics D: Applied Physics*, 1989, vol. 22, no. 12, pp. 1877–1882. doi: [10.1088/0022-3727/22/12/012](https://doi.org/10.1088/0022-3727/22/12/012).
42. Berlin Al. Al., Rotenburg L., Basert R. Specific features of deformation of non-ordered polymeric and non-polymeric solids, *Vysokomolek. Soed. A*, 1992, vol. 34, no. 7, pp. 6–32 (In Russian).
43. Milton G. W. Composite materials with Poisson's ratios close to  $-1$ , *J. Mech. Phys. Solids*, 1992, vol. 40, no. 5, pp. 1105–1137. doi: [10.1016/0022-5096\(92\)90063-8](https://doi.org/10.1016/0022-5096(92)90063-8).
44. Alderson K. L., Evans K. E. The fabrication of microporous polyethylene having negative Poisson's ratio, *Polymer*, 1992, vol. 33, no. 20, pp. 4435–4438. doi: [10.1016/0032-3861\(92\)90294-7](https://doi.org/10.1016/0032-3861(92)90294-7).
45. Lakes R. S., Elms K. Indentability of conventional and negative Poisson's ratio foams, *J. Compos. Mater.*, 1993, vol. 27, no. 12, pp. 1193–1202. doi: [10.1177/002199839302701203](https://doi.org/10.1177/002199839302701203).
46. Chan N., Evans K. E. Indentation resilience of conventional and auxetic foams, *J. Cell. Plastics*, 1998, vol. 34, no. 3, pp. 231–260. doi: [10.1177/0021955X9803400304](https://doi.org/10.1177/0021955X9803400304).



47. Chan N., Evans K. E. The mechanical properties of conventional and auxetic foams. Part 1: Compression and tension, *J. Cell. Plastics*, 1999, vol. 35, no. 2, pp. 130–165. doi: [10.1177/0021955X9903500204](https://doi.org/10.1177/0021955X9903500204).
48. Alderson K. L., Fitzgerald A., Evans K. E. The strain dependent indentation resilience of auxetic microporous polyethylene, *J. Mater. Sci.*, 2000, vol. 35, no. 16, pp. 4039–4047. doi: [10.1023/A:1004830103411](https://doi.org/10.1023/A:1004830103411).
49. Konek D. A., Voitsekhovski K. V., Pleskachevsky Yu. M., Shil'ko S. V. Materials with negative Poisson's ratio. A review, *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.*, 2004, vol. 10, no. 1, pp. 35–69 (In Russian).
50. Liu Y., Hu H. A review on auxetic structures and polymeric materials, *Sci. Res. Essays*, 2010, vol. 5, no. 10, pp. 1052–1063, <http://hdl.handle.net/10397/27029>.
51. Greaves G. N., Greer A. L., Lakes R. S., Rouxel T. Poisson's ratio and modern materials, *Nature Materials*, 2011, vol. 10, no. 11, pp. 823–837. doi: [10.1038/nmat3134](https://doi.org/10.1038/nmat3134).
52. Huang C., Chen L. Negative Poisson's ratio in modern functional materials, *Advanced Materials*, 2016, vol. 28, no. 37, pp. 8079–8096. doi: [10.1002/adma.201601363](https://doi.org/10.1002/adma.201601363).
53. Volokh K. Yu. On arterial fiber dispersion and auxetic effect, *J. Biomech.*, 2017, vol. 61, pp. 123–130. doi: [10.1016/j.jbiomech.2017.07.010](https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2017.07.010).
54. van der Varst P. G. Th., Kortsmmit W. G. Notes on the lateral contraction of linear isotropic viscoelastic materials, *Arch. Appl. Mech.*, 1992, vol. 62, no. 5, pp. 338–346. doi: [10.1007/BF00788641](https://doi.org/10.1007/BF00788641).
55. Hilton H. H., Sung Y. The significance of (an)isotropic viscoelastic Poisson ratio stress and time dependencies, *Int. J. Solids Structures*, 1998, vol. 35, no. 23, pp. 3081–3095. doi: [10.1016/S0020-7683\(97\)00357-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00357-0).
56. Lakes R. S., Wineman A. S. On Poisson's ratio in linearly viscoelastic solids, *J. Elasticity*, 2006, vol. 85, no. 1, pp. 45–63. doi: [10.1007/s10659-006-9070-4](https://doi.org/10.1007/s10659-006-9070-4).
57. Abudushalamu A., Vandamme M., Torrenti J. M., Benoit M. Theoretical and practical differences between creep and relaxation Poisson's ratios in linear Viscoelasticity, *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2015, vol. 19, no. 4, pp. 537–555. doi: [10.1007/s11043-015-9277-5](https://doi.org/10.1007/s11043-015-9277-5).
58. Hilton H. H. Elastic and viscoelastic Poisson's ratios: The theoretical mechanics perspective, *Mater. Sci. Appl.*, 2017, vol. 8, no. 4, pp. 291–332. doi: [10.4236/msa.2017.84021](https://doi.org/10.4236/msa.2017.84021).
59. Ainbinder S. B., Alksne K. I., Tiunina E. L., Laka M. G. *Svoistva polimerov pri vysokikh davleniiakh [Properties of Polymers under High Pressure]*. Moscow, Khimiya, 1973, 192 pp. (In Russian)
60. Gol'dshtein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovento D. S. Variability of Poisson's ratio for hexagonal crystals under pressure, *Trudy MAI*, 2016, vol. 87, pp. 1–22 (In Russian).
61. Vekilov Yu. Kh., Krasilnikov O. M., Lugovskoy A. V. Elastic properties of solids at high pressure, *Phys. Usp.*, 2015, vol. 58, no. 11, pp. 1106–1114. doi: [10.3367/UFNe.0185.201511f.1215](https://doi.org/10.3367/UFNe.0185.201511f.1215).
62. Khokhlov A. V. Simulation of hydrostatic pressure influence on creep curves and Poisson's ratio of rheonomic materials under tension using the Rabotnov non-linear hereditary relation, *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 407–436 (In Russian). doi: [10.33113/mkmk.ras.2018.24.03.407\\_436.07](https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2018.24.03.407_436.07).
63. Khokhlov A. V. Specific features of stress-strain curves at constant stress rate or strain rate yielding from linear viscoelasticity, *Problems of Strength and Plasticity*, 2015, vol. 77, no. 2, pp. 139–154 (In Russian). doi: [10.32326/1814-9146-2015-77-2-139-154](https://doi.org/10.32326/1814-9146-2015-77-2-139-154).
64. Khokhlov A. V. Analysis of properties of creep curves generated by the linear viscoelasticity theory under arbitrary loading programs at initial stage, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 1, pp. 65–95 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1543](https://doi.org/10.14498/vsgtu1543).
65. Khokhlov A. V. Analysis of creep curves produced by the linear viscoelasticity theory under cyclic stepwise loadings, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 2, pp. 326–361 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1533](https://doi.org/10.14498/vsgtu1533).

66. Khokhlov A. V. Two-sided estimates for the relaxation function of the linear theory of heredity via the relaxation curves during the ramp-deformation and the methodology of identification, *Mech. Solids*, 2018, vol. 53, no. 3, pp. 307–328. doi: [10.3103/S0025654418070105](https://doi.org/10.3103/S0025654418070105).
67. Khokhlov A. V. Analysis of the linear viscoelasticity theory capabilities to simulate hydrostatic pressure influence on creep curves and lateral contraction ratio of rheonomous materials, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 2, pp. 304–340 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1654](https://doi.org/10.14498/vsgtu1654).
68. Khokhlov A. V. Asymptotic behavior of creep curves in the Rabotnov nonlinear heredity theory under piecewise constant loadings and memory decay conditions, *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2017, vol. 72, no. 5, pp. 103–107. doi: [10.3103/S0027133017050016](https://doi.org/10.3103/S0027133017050016).
69. Khokhlov A. V. Analysis of properties of ramp stress relaxation curves produced by the Rabotnov non-linear hereditary theory, *Mech. Compos. Mater.*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 473–486. doi: [10.1007/s11029-018-9757-1](https://doi.org/10.1007/s11029-018-9757-1).
70. Khokhlov A. V. Applicability indicators of the linear viscoelasticity theory using creep curves under tensile load combined with constant hydrostatic pressure, *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 259–280 (In Russian). doi: [10.33113/mkmk.ras.2019.25.02.259\\_280.09](https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2019.25.02.259_280.09).
71. Khokhlov A. V. Properties of stress-strain curves family generated by the Rabotnov non-linear relation for viscoelastic materials, *Mech. Solids*, 2019, no. 2, pp. 29–47 (In Russian). doi: [10.1134/S0572329919020077](https://doi.org/10.1134/S0572329919020077).
72. Rabotnov Yu. N. Equilibrium of an elastic medium with after-effect, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2014, vol. 17, no. 3, pp. 684–696 doi: [10.2478/s13540-014-0193-1](https://doi.org/10.2478/s13540-014-0193-1); original paper: Rabotnov Yu. N. Equilibrium of an elastic medium with after-effect, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1948, vol. 12, no. 1, pp. 53–62 (In Russian).
73. Rabotnov Yu. N. *Creep problems in structural members*. Amsterdam, London, North-Holland Publ. Co., 1969, xiv+822 pp.