Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23, № 4. С. 789–796
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1677

УДК 517.958

Задача Бицадзе–Самарского для одного характеристически нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа

К. У. Хубиев

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а.

Аннотация

Рассматривается характеристически нагруженное уравнение смешанного гиперболо-параболического типа. В гиперболической части области уравнение представляет собой нагруженное односкоростное уравнение переноса, известное в математической биологии как уравнение Мак-Кендрика, в параболической — нагруженное уравнение диффузии. Цель работы: исследование единственности и существования решения нелокальной внутренне-краевой задачи с условиями Бицадзе–Самарского в параболической части области и непрерывными условиями сопряжения, краевые условия в гиперболической части области не задаются.

Решение исследуемой задачи сводится к решению нелокальной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно следа искомой функции на линии изменения типа. Доказана теорема существования и единственности решения задачи, в гиперболической части области выписано решение в явном виде. В параболической части области исследуемая задача сведена к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, найдено представление решения.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, уравнение смешанного типа, гиперболо-параболическое уравнение, нелокальная задача, задача Бицадзе–Самарского, внутренне-краевая задача.

Получение: 13 сентября 2019 г. / Исправление: 28 октября 2019 г. / Принятие: 11 ноября 2019 г. / Публикация онлайн: 23 декабря 2019 г.

Краткое сообщение

Образец для цитирования

Khubiev K. U. The Bitsadze–Samarskii problem for some characteristically loaded hyperbolic-parabolic equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 789–796. doi: 10.14498/vsgtu1677.

Сведения об авторе

Казбек Узеирович Хубиев https://orcid.org/0000-0003-0081-0276
кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; отдел уравнений смешанного типа; e-mail: khubiev_math@mail.ru

Введение. Рассмотрим характеристически нагруженное уравнение смешанного гиперболо-параболического типа

$$\begin{cases} u_{xx} - u_y + \lambda_1 u(x,0) = f_1(x,y), & y > 0, \\ u_x + u_y + cu + \lambda_2 u(x-y,0) = f_2(x,y), & y < 0 \end{cases} \tag{1}$$

в области Ω, ограниченной отрезками прямых $x = 0$, $x = r$, $y = T > 0$ при $y > 0$, и характеристиками $x - y = 0$, $x - y = r$ уравнения (1) при $y < 0$; λ_i, c — заданные постоянные; $f_i(x,y)$ — заданные функции, $i = 1, 2$. Через Ω_1 и Ω_2 обозначим параболическую и гиперболическую части смешанной области Ω соответственно, а через J — интервал $0 < x < r$ прямой $y = 0$.

К краевым задачам для уравнений вида (1) при $y > 0$ сводятся многие задачи, связанные с прогнозированием и регулированием уровня грунтовых вод [1, с. 95], задачи описания процесса распространения тепла в одномерной ограниченной среде, в которой имеется источник тепла, мощность которого пропорциональна значению температуры [2], теории популяции [3, с. 128]. При $y < 0$ уравнение (1) является нагруженным односкоростным уравнением переноса, в математической биологии при $\lambda_2 = 0$ оно известно как уравнение Мак-Кендрика [3, с. 121, 179]. На основе уравнения Мак-Кендрика и его разновидностей строятся нелимитированные и лимитированные модели динамики возрастной структуры и численности популяции (см., например, [3, с. 244]).

1. Постановка задачи типа задачи Бицадзе–Самарского. *Регулярным решением* уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u(x,y)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2_x(\Omega_1)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача BS. *Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям*:

$$u(0,y) = \varphi_0(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant T, \tag{2}$$

$$u(x_0,y) = \alpha(y)u(r,y) + \beta(y), \quad 0 < x_0 < r, \quad 0 \leqslant y \leqslant T, \tag{3}$$

где $\varphi_0(y)$, $\alpha(y)$, $\beta(y)$ — заданные функции, $\alpha(y) \neq 0$.

Замечание 1. Если $x_0 = 0$ при $\alpha(y) \neq 0$ или $x_0 = r$ при $\alpha(y) \neq 1$ задача (2), (3) переходит в локальную краевую задачу, которая для нехарактеристически нагруженного уравнения с вырождением порядка в области его гиперболичности была исследована в [4]. Если же при этом не выполнены условия относительно $\alpha(y)$, то задача становится некорректной.

Для параболического уравнения задача с нелокальным условием (3) была исследована в работе [5]. Внутренне-краевая задача типа задачи Бицадзе—Самарского для модельного уравнения смешанного гиперболо-параболического типа второго порядка исследована в работе [6], а в [7] — для гиперболо-параболического уравнения с нехарактеристической нагрузкой на линии изменения типа.

Задача с условиями (2), (3) относится к задачам типа задачи Бицадзе—Самарского и является частным случаем задачи с нелокальным условием А. М. Нахушева [8]. В работе [9] исследуются различные локальные и нелокальные краевые задачи для нагруженных уравнений гиперболического типа, и в том числе рассмотрена задача для модельного параболического уравнения с условиями, обобщающими условия (3), и ее практические приложения. В [10] для уравнения эллиптического типа общего вида в прямоугольной области рассмотрена нелокальная задача с условиями А. М. Нахушева на обеих боковых сторонах прямоугольника. Для уравнения (1) задача с нелокальным условием А. М. Нахушева исследована в [11].

2. Теорема существования и единственности решения. Для задачи BS справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если* $f_1(x,y) \in C(\bar\Omega_1)$ *и удовлетворяет условию Гельдера по* x, $\varphi_0(y) \in C[0,T]$, $\alpha(y),\ \beta(y) \in C[0,T] \cap C^1]0,T[,\ f_2(x,y) \in C(\Omega_2 \cup \bar J)$,

$$\alpha(0) \neq \exp\big([r-x_0]/2\big)\frac{\operatorname{sh} px_0}{\operatorname{sh} pr},$$

$$p=\sqrt{1-4q}/2, \quad q \neq \pi^2 n^2/r^2+1/4, \quad q=c+\lambda_1+\lambda_2, \quad n=1,2,\ldots$$

то задача BS имеет, и притом единственное, решение.

Доказательство. Пусть существует решение $u(x,y)$ задачи (1)–(3). Обозначим $\tau(x)=u(x,0)$, $\nu(x)=u_y(x,0)$, причем из условий задачи $\tau(x) \in C(\bar J) \cap C^1(J)$, $\nu(x) \in C(J)$. Тогда из (2) и (3) следует

$$\tau(0)=\varphi_0(0), \tag{4}$$

$$\tau(x_0)=\alpha(0)\tau(r)+\beta(0). \tag{5}$$

Переходя в уравнении (1) к пределу при $y \to +0$, получаем, что $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на линии изменения типа будут связаны следующим соотношением, принесенным из параболической части Ω_1 области Ω:

$$\tau''(x)-\nu(x)+\lambda_1\tau(x)=f_1(x,0), \quad 0<x<r. \tag{6}$$

Также, переходя к пределу при $y \to -0$, в Ω_2 получим

$$\tau'(x)+\nu(x)+\big[c+\lambda_2\big]\tau(x)=f_2(x,0), \quad 0<x<r. \tag{7}$$

Из (6), (7) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\tau''(x)+\tau'(x)+q\tau(x)=f(x), \tag{8}$$

где $q=c+\lambda_1+\lambda_2$, $f(x)=f_1(x,0)+f_2(x,0)$.

Отсюда сразу видно, что при $\alpha(0)=0$ и $0<x_0<r$ нарушается единственность решения задачи (4), (5) для уравнения (8). Введем обозначение

$$\varphi_r(y)=u(r,y), \tag{9}$$

тогда

$$\tau(r)=\varphi_r(0). \tag{10}$$

Решение задачи Дирихле (4), (10) для уравнения (8) имеет вид

$$\tau(x)=\int_0^r G(x,\xi)f(\xi)d\xi+G_\xi(x,r)\varphi_r(0)-G_\xi(x,0)\varphi_0(0), \tag{11}$$

где $G(x,\xi)$ — функция Грина задачи (8), (4), (10), имеющая вид

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\exp([\xi-x]/2)\,\mathrm{sh}(p\xi)\,\mathrm{sh}(p[x-r])}{p\,\mathrm{sh}(pr)}, & 0\leqslant\xi\leqslant x,\\ \dfrac{\exp([\xi-x]/2)\,\mathrm{sh}(px)\,\mathrm{sh}(p[\xi-r])}{p\,\mathrm{sh}(pr)}, & x\leqslant\xi\leqslant r;\end{cases}$$

где $p=\sqrt{1-4q}/2$, $pr\neq\pi n$ $\big(q\neq\pi^2n^2/r^2+1/4\big)$, $n=1,2,\ldots$

Здесь надо отметить, что $G(x,\xi)$ является действительнозначной функцией, зависящей от комплексного числа p.

Устремляя $x\to x_0$, из (11) получим

$$\tau(x_0)=\int_0^r G(x_0,\xi)f(\xi)d\xi+G_\xi(x_0,r)\varphi_r(0)-G_\xi(x_0,0)\varphi_0(0),$$

откуда с учетом (5) при выполнении условия $\alpha(0)\neq G_\xi(x_0,r)$ получаем

$$\varphi_r(0)=\frac{1}{\alpha(0)-G_\xi(x_0,r)}\left[\int_0^r G(x_0,\xi)f(\xi)d\xi-G_\xi(x_0,0)\varphi_0(0)-\beta(0)\right].$$

Из явного вида функции Грина получаем, что условие $\alpha(0)\neq G_\xi(x_0,r)$ можно переписать в виде $\alpha(0)\neq\exp\big([r-x_0]/2\big)\dfrac{\mathrm{sh}\,px_0}{\mathrm{sh}\,pr}$.

Таким образом, после нахождения $\varphi_r(0)$ функция $\tau(x)$ полностью определяется формулой (11), причем $\tau(x)\in C[0,r]\cap C^2]0,r[$. Далее $\nu(x)$ находим из (7), откуда видно, что $\nu(x)\in C^1]0,r[$.

В гиперболической части области Ω_2 решение задачи (1)–(3) сводится к решению задачи Коши для частного случая неоднородного уравнения Мак-Кендрика [3, с. 179]

$$u_x+u_y+cu=\rho(x,y), \tag{12}$$

$$u(x,0)=\tau(x), \tag{13}$$

где $\rho(x,y)=f_2(x,y)-\lambda_2\tau(x-y)$.

Решение задачи (12), (13) дается формулой

$$u(x,y)=\tau(x-y)e^{-cy}+\int_0^y\rho(\eta+x-y,\eta)e^{c(\eta-y)}d\eta,$$

которая будет решением задачи BS в Ω_2. После несложных преобразований ее можно переписать в виде

$$u(x,y)=\tau(x-y)\Big[e^{-cy}(1+\lambda_2/c)-\lambda_2/c\Big]+\int_0^y f_2(\eta+x-y,\eta)e^{c(\eta-y)}d\eta,$$

если $c\neq0$, а при $c=0$

$$u(x,y)=\tau(x-y)[1-\lambda_2y]+\int_0^y f_2(\eta+x-y,\eta)d\eta.$$

Если $f_1(x,y) \in C(\bar{\Omega}_1)$ и удовлетворяет условию Гельдера по x, $\varphi_0(y) \in C[0,T]$, $\alpha(y), \beta(y) \in C[0,T] \cap C^1]0,T[$, то решение задачи BS в Ω_1 представимо в виде решения первой краевой задачи (2), (9), (13) для уравнения (1):

$$\begin{aligned} u(x,y) = \int_0^y \Gamma_\xi(x,y;0,\eta)\varphi_0(\eta)d\eta - \int_0^y \Gamma_\xi(x,y;r,\eta)\varphi_r(\eta)d\eta + \\ + \int_0^r \Gamma(x,y;\xi,0)\tau(\xi)d\xi + \int_0^y \int_0^r \Gamma(x,y;\xi,\eta)\big[f_1(\xi,\eta) - \lambda_1\tau(\xi)\big]d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\Gamma(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(y-\eta)}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big\{ \exp\Big[\frac{(x-\xi+2k)^2}{4(\eta-y)}\Big] - \exp\Big[\frac{(x+\xi+2k)^2}{4(\eta-y)}\Big]\Big\}$$

— функция Грина первой краевой задачи для уравнения Фурье [3, с. 267].

Удовлетворяя (14) условию (3) с учетом того, что $\alpha(y) \neq 0$, получим интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\varphi_r(y)$:

$$\varphi_r(y) + \int_0^y K(y,\eta)\varphi_r(\eta)d\eta = F(y), \quad (15)$$

где

$$K(y,\eta) = \frac{1}{\alpha(y)}\Gamma_\xi(x_0,y;r,\eta),$$

$$\begin{aligned} F(y) = \int_0^y \Gamma_\xi(x_0,y;0,\eta)\varphi_0(\eta)d\eta + \int_0^r \Gamma(x_0,y;\xi,0)\tau(\xi)d\xi + \\ + \int_0^y \int_0^r \Gamma(x_0,y;\xi,\eta)\big[f_1(\xi,\eta) - \lambda_1\tau(\xi)\big]d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Так как функция $\Gamma(x,y;\xi,\eta)$ непрерывна в $\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1$, имеет непрерывную при $0 \leqslant x \leqslant r$, $0 < y \leqslant \eta < T$ и интегрируемую вдоль отрезков $\{x = 0, 0 \leqslant y \leqslant T\}$ и $\{x = r, 0 \leqslant y \leqslant T\}$ производную Γ_x (и, соответственно, Γ_ξ) [3, с. 267], то уравнение (15) является интегральным уравнением Вольтерра II рода и имеет единственное решение $\varphi_r(y)$, причем $\varphi_r(y) \in C[0,T] \cap C^1]0,T[$. С учетом этого и условия теоремы $\alpha(y), \beta(y) \in C[0,T] \cap C^1]0,T[$ из (3) получим, что и $u(x_0,y) \in C[0,T] \cap C^1]0,T[$, т.е. полученное решение задачи будет в искомом классе. После нахождения функции $\varphi_r(y)$ единственное решение задачи (1)–(3) в Ω_1 задается формулой (14). $\square$

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов автор не имеет.

Авторская ответственность. Автор несет полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи автором одобрена.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России, тема № АААА–А19–119013190078–8.

Библиографический список

1. Нахушев А. М. *Нагруженные уравнения и их применения.* М.: Наука, 2012. 232 с.
2. Дикинов Х. Ж., Керефов А. А., Нахушев А. М. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности // *Диффер. уравн.*, 1976. Т. 12, № 1. С. 177–179.
3. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии.* М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
4. Хубиев К. У. Краевая задача для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с вырождением порядка в области его гиперболичности // *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2018. Т. 149. С. 113–117.
5. Напсо А. Ф. О задаче Бицадзе–Самарского для уравнения параболического типа // *Дифференц. уравнения*, 1977. Т. 13, № 4. С. 761–762.
6. Напсо А. Ф. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // *Дифференц. уравнения*, 1978. Т. 14, № 1. С. 185–186.
7. Хубиев К. У. Внутренне-краевая задача для нагруженного уравнения смешанного типа // *Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*, 2008. № 6(148). С. 23–25.
8. Водахова В. А. Краевая задача с нелокальным условием А. М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // *Диффер. уравн.*, 1982. Т. 18, № 2. С. 280–285.
9. Нахушев А. М. Краевые задачи для нагруженного интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // *Диффер. уравн.*, 1979. Т. 15, № 1. С. 96–105.
10. Нахушева З. А. Об одной нелокальной эллиптической краевой задаче типа задачи Бицадзе–Самарского // *Докл. АМАН*, 2013. Т. 15, № 1. С. 18–23.
11. Хубиев К. У. Задача типа задачи Бицадзе–Самарского для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа // *Мат. заметки СВФУ*, 2019. Т. 26, № 2. С. 31–40. doi: 10.25587/SVFU.2019.102.31510.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 789–796
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1677

MSC: 35M10, 35M12

The Bitsadze–Samarskii problem for some characteristically loaded hyperbolic-parabolic equation

K. U. Khubiev

Institute of Applied Mathematics and Automation
of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS,
89 a, Shortanova st., Nal'chik, 360000, Russian Federation.

Abstract

The paper considers a characteristically loaded equation of a mixed hyperbolic-parabolic type with degeneration of order in the hyperbolicity part of the domain. In the hyperbolic part of the domain, we have a loaded one-velocity transport equation, known in mathematical biology as the Mac Kendrick Von Forester equation, in the parabolic part we have a loaded diffusion equation. The purpose of the paper is to study the uniqueness and existence of the solution of the nonlocal inner boundary value problem with Bitsadze-Samarskii type boundary conditions and the continuous conjugation conditions in the parabolic domain; the hyperbolic domain is exempt from the boundary conditions.

The problem under investigation is reduced to a non-local problem for an ordinary second-order differential equation with respect to the trace of the unknown function in the line of the type changing. The existence and uniqueness theorem for the solution of the problem has been proved; the solution is written out explicitly in the hyperbolic part of the domain. In the parabolic part, the problem under study is reduced to the Volterra integral equation of the second kind, and the solution representation has been found.

Keywords: loaded equation, equation of mixed type, hyperbolic-parabolic equation, nonlocal problem, Bitsadze–Samarskii problem, internal boundary value problem.

Received: 13th September, 2019 / Revised: 28th October, 2019 /
Accepted: 11th November, 2019 / First online: 23rd December, 2019

Competing interests. Author has no competing interests.

Author's Responsibilities. The author of this paper accept full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The author have read and approved the final version submitted.

Short Communication

Please cite this article in press as:
Khubiev K. U. The Bitsadze–Samarskii problem for some characteristically loaded hyperbolic-parabolic equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 789–796. doi: 10.14498/vsgtu1677.

Author's Details:
Kazbek U. Khubiev https://orcid.org/0000-0003-0081-0276
Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; Dept. of Mixed Type Equations;
e-mail: khubiev_math@mail.ru

Funding. The work was done within the State Assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, no. AAAA–A19–119013190078–8.

References

1. Nakhushev A. M. *Nagruzhennye uravneniya i ikh primeneniya* [Loaded Equations and their Applications]. Moscow, Nauka, 2012, 232 pp. (In Russian)
2. Dikinov Kh. Zh., Kerefov A. A., Nakhushev A. M. A boundary-value problem for a loaded heat-conduction equation, *Differ. Equ.*, 1976, vol. 12, no. 1, pp. 125–126 (In Russian).
3. Nakhushev A. M. *Uravneniia matematicheskoi biologii* [Equations of Mathematical Biology]. Moscow, Vyssh. Shk., 1995, 301 pp. (In Russian)
4. Khubiev K. U. Boundary-value problem for a loaded equation of hyperbolic-parabolic type with degeneracy of order in the domain of hyperbolicity, In: *Proceedings of the International Conference "Actual Problems of Applied Mathematics and Physics",* Kabardino-Balkaria, Nalchik, May 17–21, 2017, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., 149. Moscow, VINITI, 2018, pp. 113–117 (In Russian).
5. Napso A. F. The Bitsadze–Samarskii problem for an equation of parabolic type, *Differ. Uravn.*, 1977, vol. 13, no. 4, pp. 761–762 (In Russian).
6. Napso A. F. A nonlocal problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type, *Differ. Uravn.*, 1978, vol. 14, no. 1, pp. 185–186 (In Russian).
7. Khubiev K. U. Inner boundary value problem for the loaded equation of mixed type, *Izv. Vuzov. Severo-Kavkazskii Region. Estestvennye nauki*, 2008, no. 6(148), pp. 23–25 (In Russian).
8. Vogahova V. A. A boundary value problem with non-local A. M. Nakhushev condition for a certain pseudoparabolic moisture transfer equation, *Differ. Uravn.*, 1982, vol. 18, no. 2, pp. 280–285 (In Russian).
9. Nakhushev A. M. Boundary value problems for loaded integro-differential equations of hyperbolic type and some of their applications to the prediction of ground moisture, *Differ. Uravn.*, 1979, vol. 15, no. 1, pp. 96–105 (In Russian).
10. Nakhusheva Z. A. On a Bitsadze–Samarsky type nonlocal elliptic boundary value problem, *Dokl. Adyg. (Cherkess.) Mezdunar. Akad. Nauk*, 2013, vol. 15, no. 1, pp. 18–23 (In Russian).
11. Khubiev K. U. A problem of the Bitsadze-Samarskii type for a loaded hyperbolic-parabolic equation, *Math. Notes of NEFU*, 2019, vol. 26, no. 2, pp. 31–40 (In Russian). doi: 10.25587/SVFU.2019.102.31510.