



УДК 517.958:531.3–1

Решение уравнений идеального газа, описывающих галилеевы инвариантные движения с винтовыми линиями уровня, с коллапсом на геликоиде

Ю. В. Юлмухаметова

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН,
Россия, 450054, Уфа, Проспект Октября, 71.

Аннотация


Для уравнений идеальной газовой динамики в цилиндрической системе координат с произвольным уравнением состояния рассматривается одна двумерная подалгебра из оптимальной системы 11-мерной алгебры Ли операторов дифференцирования первого порядка. Базис операторов рассматриваемой подалгебры состоит из оператора галилеева переноса и оператора движения по спиральным линиям. Инварианты операторов задают представление решения: вид компонент вектора скорости, функции плотности и функции энтропии. После подстановки представления решения в дифференциальные уравнения газовой динамики вводится предположение о линейной зависимости радиальной компоненты скорости от пространственной координаты. Записаны преобразования эквивалентности, которые допускает система уравнений газовой динамики после подстановки представления решения. Для уравнения состояния политропного газа найдены все четыре решения в зависимости от показателя адиабаты. Для каждого случая записаны уравнения мировых линий движения частиц газа. Найден якобиан перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым. По значению якобиана определены моменты времени коллапса частиц газа. В результате полученные решения описывают прямолинейный разлет частиц газа с поверхности геликоида. Движения частиц по логарифмическим спиральям, лежащим на параболоиде и движения по гиперболическим спиральям, лежащим на конусе.

Ключевые слова: газовая динамика, подмодель ранга два, линейное поле скоростей, политропный газ, поверхность коллапса, геликоид.

Получение: 14 мая 2019 г. / Исправление: 7 ноября 2019 г. /

Принятие: 11 ноября 2019 г. / Публикация онлайн: 2 декабря 2019 г.

Краткое сообщение

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Yulmukhametova Yu. V. The solution of equations of ideal gas that describes Galileo invariant motion with helical level lines, with the collapse in the helix, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 797–808. doi: [10.14498/vsgtu1703](https://doi.org/10.14498/vsgtu1703).

Сведения об авторе

Юлия Валерьевна Юлмухаметова  <https://orcid.org/0000-0002-5127-4584>

кандидат физико-математических наук; научный сотрудник; лаб. дифференциальных уравнений механики; e-mail: yulmukhametova.yulya@ya.ru

Введение. Для системы уравнений газовой динамики с общим уравнением состояния известны все 27 инвариантных подмоделей ранга два [1]. Все перечисленные подмодели приводятся к системе эволюционного типа или к системе стационарного типа. В книге С. В. Хабирова [2] рассмотрены инвариантные подмодели, построенные на подалгебрах 2.17, 2.9, 2.2 (нумерация подалгебр из [1]). Решения подмоделей описывают соответственно двумерные установившиеся течения газа, одномерные движения газа с цилиндрическими волнами и закруткой, течения со спиральными поверхностями уровня. Классификация точных решений остальных подмоделей не завершена.

В данной работе рассматривается инвариантная подмодель ранга 2 эволюционного типа в цилиндрической системе координат, построенная на подалгебре 2.10 [1]. Ставится задача найти все решения для политропного газа с предположением о линейной зависимости радиальной компоненты скорости от пространственной координаты. Аналогичная задача рассмотрена в работе [3], где изучено только одно точное решение с двумя линейными компонентами скорости подмодели ранга 3.

Классификация газодинамических подмоделей с линейным полем скоростей по трем координатам и по общему уравнению состояния была проделана в работе [4]. Полученные динамические системы большой размерности не поддаются простому интегрированию. Поэтому ставится аналогичная задача для инвариантных подмоделей. В работе С. В. Головина [5] решение поставленной задачи свелось к дифференциальному уравнению для функций одной переменной, но зависящих от различных независимых переменных. Чтобы его решить, необходимо разделить переменные в уравнении. В отличие от работы [5], в настоящей работе найдены все решения в явном виде. Найденные решения описывают коллапс на геликоиде и движения по спиральным линиям.

1. Постановка задачи. Уравнения газовой динамики (УГД) в цилиндрической системе координат (t, x, r, θ) имеют вид

$$\begin{aligned} U_t + UU_x + VU_r + r^{-1}WU_\theta + \rho^{-1}p_x &= 0, \\ V_t + UV_x + VV_r + r^{-1}WV_\theta + \rho^{-1}p_r &= r^{-1}W^2, \\ W_t + UW_x + VW_r + r^{-1}WW_\theta + \rho^{-1}r^{-1}p_\theta &= -r^{-1}VW, \\ \rho_t + U\rho_x + V\rho_r + r^{-1}W\rho_\theta + \rho(U_x + V_r + r^{-1}V + r^{-1}W_\theta) &= 0, \\ S_t + US_x + VS_r + r^{-1}WS_\theta &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где U — скорость вдоль оси x , V — радиальная скорость, W — окружная скорость, ρ — плотность, S — энтропия, давление определяется по уравнению состояния $p = f(\rho, S)$.

Рассматривается подалгебра 2.10 оптимальной системы 11-мерной алгебры Ли, допускаемой УГД с произвольным уравнением состояния [1]. Базис операторов подалгебры состоит из оператора галилеева переноса $X_4 = t\partial_x + \partial_U$ и оператора движения по спиральным линиям $\alpha X_1 + X_7 = \alpha\partial_x + \partial_\theta$. В оптимальной системе $\alpha = 1$. Для дальнейшего удобства взята подобная подалгебра с произвольным $\alpha \neq 0$. Инварианты этих операторов задают представление решения:

$$U = \frac{x - \alpha\theta}{t} + u(t, r), \quad V = V(t, r), \quad W = W(t, r), \quad \rho = \rho(t, r), \quad S = S(t, r). \quad (2)$$

Подстановка представления (2) в УГД (1) дает систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} u_t + ut^{-1} + Vu_r = \alpha W(rt)^{-1}, \quad V_t + VV_r + p_r\rho^{-1} = W^2r^{-1}, \\ W_t + VW_r + VWr^{-1} = 0, \quad \rho_t + V\rho_r + \rho(t^{-1} + V_r + Vr^{-1}) = 0, \\ S_t + VS_r = 0, \quad p = f(\rho, S). \end{aligned} \quad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Система уравнений (3) допускает следующие преобразования эквивалентности:

$$\begin{aligned} V \rightarrow \frac{R}{T}V, \quad W \rightarrow \frac{R}{T}W, \quad \rho \rightarrow \frac{PT^2}{R^2}\rho, \quad p \rightarrow Pp + p_0, \\ u \rightarrow uT^{-1}, \quad t \rightarrow Tt, \quad r \rightarrow Rr, \quad S \rightarrow h(S), \\ \bar{f}(\rho, S) = P^{-1}(f(PT^2R^{-2}\rho, h(S)) - p_0), \end{aligned} \quad (4)$$

где R, T, P — постоянные, $h(S)$ — произвольная функция, а также инверсия

$$W \rightarrow -W, \quad u \rightarrow -u.$$

Решение УГД принято рассматривать [6] с точностью до преобразований эквивалентности (4).

Из первого уравнения системы (3) функция $u(t, r)$ может быть найдена после нахождения решения остальных уравнений. Уравнения системы (3) записываются в виде

$$\begin{aligned} V_t + VV_r + p_r\rho^{-1} = W^2r^{-1}, \quad (rW)_t + V(rW)_r = 0, \\ (rt\rho)_t + (rtV\rho)_r = 0, \quad S_t + VS_r = 0. \end{aligned}$$

Вводится лагранжева координата $\xi = \xi(t, r)$ по правилу $\xi_t + V\xi_r = 0$ с точностью до взятия произвольной функции от ξ [6]. Тогда уравнение для W, ρ, S интегрируются:

$$S = S(\xi), \quad rW = g(\xi), \quad \rho = (rt)^{-1}\xi_r, \quad V = -(\xi_r)^{-1}\xi_t, \quad (5)$$

где $S(\xi), g(\xi)$ — произвольные функции, а функция $\xi(t, r)$ удовлетворяет уравнению

$$-\left(\frac{\xi_t}{\xi_r}\right)_t + \frac{\xi_t}{\xi_r}\left(\frac{\xi_t}{\xi_r}\right)_r + f_\rho\left(\frac{\xi_{rr}}{\xi_r} - \frac{1}{r}\right) + f_S S_\xi rt = \frac{g^2(\xi)}{r^3}. \quad (6)$$

Из первого уравнения системы (3) следует интеграл

$$tu = \alpha g(\xi) \int \frac{dt}{r^2(t, \xi)} + U_1(\xi), \quad (7)$$

где $U_1(\xi)$ — произвольная функция. Газодинамические функции определены формулами (2), (5), (7), где лагранжева координата $\xi(t, r)$ удовлетворяет уравнению (6). Координата скорости V линейна по r тогда и только тогда, когда лагранжева координата линейна по r :

$$\xi = rb(t) + c(t), \quad b(t) \neq 0. \quad (8)$$

В этом случае уравнение (6) примет вид

$$-(\xi - c)^4 \left(\frac{b'}{b^2}\right)' - b \left(\frac{c'}{b^2}\right)' (\xi - c)^4 - f_\rho b (\xi - c)^2 + f_S S_\xi t \frac{(\xi - c)^4}{b} = g^2(\xi) b^3. \quad (9)$$

Замечание. Равенство (9) — тождество по независимым переменным ξ и t . При $\xi = c(t) \neq 0$ следует $g(c(t)) = 0$. Отсюда либо $g = 0$, либо c — постоянная, не равная нулю. Если c — постоянная, то преобразование эквивалентности сдвига по ξ делает $c = 0$. Противоречие. Если $g = 0$, то из (9) следует

$$(\xi - c)^2 \left[-\left(\frac{b'}{b^2}\right)' - b \left(\frac{c'}{b^2}\right)' + f_S S_\xi \frac{t}{b} \right] = f_\rho b.$$

При $\xi = c$ получаем $b = 0$, так как $f_\rho \neq 0$ для нормального газа. Противоречие. Значит, $c = 0$ и уравнение (9) примет вид

$$-\left(\frac{b'}{b^2}\right)' - \frac{b}{\xi^2} f_\rho + f_S S_\xi \frac{t}{b} = g^2(\xi) \frac{b^2}{\xi^4}, \quad f(\rho, S) = f\left(\frac{b^2}{t\xi}, S(\xi)\right). \quad (10)$$

Последнее равенство есть уравнение для определения уравнения состояния (УС) по известным функциям $b(t)$ и $S(\xi)$. По заданным решениям определяется УС. Если известно УС, то это уравнение задает переопределенное соотношение для нахождения функций $S(\xi)$ и $b(t)$.

2. Модель политропного газа. Уравнение состояния политропного газа имеет вид $p = h(S)\rho^\gamma$, $\gamma \neq 0$, где $h(S)$ — произвольная функция энтропии, γ — показатель адиабаты. С точностью до преобразования эквивалентности (4) системы (1) можно считать $S(\xi) = \xi$, то есть

$$p = \xi \rho^\gamma. \quad (11)$$

Уравнение (10) в силу (8), (11), (5) становится тождеством по t и ξ :

$$-\frac{|t|^{\gamma-1}}{b^{2\gamma-1}} \left(\frac{b'}{b^2}\right)' + (1 - \gamma) \text{sign } \xi |\xi|^{-\gamma} = \frac{g^2(\xi)}{\xi^4} \frac{|t|^{\gamma-1}}{b^{2\gamma-4}}, \quad (12)$$

После дифференцирования тождества (12) по t

$$-\left(\frac{|t|^{\gamma-1}}{b^{2\gamma-1}} \left(\frac{b'}{b^2}\right)'\right)' = \frac{g^2(\xi)}{\xi^4} \left(\frac{|t|^{\gamma-1}}{b^{2\gamma-4}}\right)'$$

независимые переменные t и ξ разделяются. Возможны два случая:

- 1) $g = \xi^2$, $(|t|^{\gamma-1} b^{4-2\gamma})' \neq 0$;
- 2) $b = \pm |t|^{\frac{\gamma-1}{2\gamma-4}}$, $\gamma \neq 2$.

В первом случае из уравнения (12) с точностью до преобразования эквивалентности следует

$$\gamma = 1, \quad b = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Тогда компоненты вектора скорости (U, V, W) и плотность согласно формулам (2), (5), (7) имеют вид

$$U = \frac{x - \alpha\theta + \alpha \arctg t + U_1(\xi)}{t}, \quad V = \frac{rt}{1+t^2}, \quad W = \frac{r}{1+t^2}, \quad (13)$$

$$\rho = \frac{\pm 1}{rt\sqrt{1+t^2}}, \quad \xi = \frac{\pm r}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Во втором случае после подстановки выражения для функции $b(t)$ в тождество (12) получаем

$$-\frac{(\gamma-1)(5-3\gamma)}{(2\gamma-4)^2} \operatorname{sign} t |t|^{\frac{6-4\gamma}{\gamma-2}} = \frac{g^2(\xi)}{\xi^4} - (1-\gamma) \operatorname{sign} \xi |\xi|^{-\gamma}. \quad (14)$$

Последнее тождество верно только в трех случаях: $\gamma = 3/2, 1, 5/3$.

Если $\gamma = 3/2$, то $b = \pm |t|^{-1/2}$, $\xi = \pm r |t|^{-1/2}$. Тождество (14) есть равенство для определения функции $g(\xi)$ только при $t < 0$ и $\xi = -r |t|^{-1/2}$:

$$g^2 = \frac{1}{4} \xi^4 + \frac{1}{2} |\xi|^{5/2}.$$

Тогда компоненты вектора скорости (U, V, W) и плотность согласно формулам (2), (5), (7) имеют вид

$$\begin{aligned} U &= \frac{x - \alpha\theta}{t} + \alpha \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{|t|^{3/4}}{r^{3/2}} \right)^{1/2} \frac{\ln |t|}{t} + \frac{U_1(\xi)}{t}, & V &= \frac{r}{2t}, \\ W &= \frac{1}{2r} \left(\frac{r^4}{t^2} + 2 \frac{r^{5/2}}{|t|^{5/4}} \right)^{1/2}, & \rho &= \frac{1}{|t|^{3/2} r}, & \xi &= -\frac{r}{\sqrt{|t|}}, & t < 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Если $\gamma = 5/3$, то $b = t^{-1}$, $\xi = rt^{-1}$. Из тождества (14) следует выражение для функции $g(\xi)$ только при $t < 0$:

$$g = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} |\xi|^{7/6}.$$

Тогда компоненты вектора скорости (U, V, W) и плотность согласно формулам (2), (5), (7) имеют вид

$$\begin{aligned} U &= \frac{x - \alpha\theta}{t} - \alpha \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{r^{5/6} |t|^{7/6}} + \frac{U_1(\xi)}{t}, & V &= \frac{r}{t}, \\ W &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{r^{1/6}}{|t|^{7/6}}, & \rho &= \frac{1}{rt^2}, & \xi &= \frac{r}{t}, & t < 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Если $\gamma = 1$, то $b = \pm 1$, $\xi = \pm r$. В этом случае из тождества (14) следует $g(\xi) = 0$. Тогда компоненты вектора скорости (U, V, W) и плотность согласно формулам (2), (5), (7) имеют вид

$$U = \frac{x - \alpha\theta + U_1(\xi)}{t}, \quad V = 0, \quad W = 0, \quad \rho = \pm \frac{1}{rt}. \quad (17)$$

Таким образом, модель политропного газа задается решениями (13), (15), (16) и (17). Далее рассматриваются траектории движения частиц и приводится описание полученных решений.

3. Примеры движения частиц газа. Мировые линии движения частиц газа в цилиндрической системе координат определяются как решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = U, \quad \frac{dr}{dt} = V, \quad r \frac{d\theta}{dt} = W.$$

3.1. Для решения (13) уравнения мировые линии задаются равенствами

$$x = u_0 t + \alpha \theta_0 - U_1(\pm r_0), \quad r = r_0 \sqrt{1 + t^2}, \quad \theta = \text{arctg } t + \theta_0, \quad (18)$$

где u_0, r_0, θ_0 — лагранжевы координаты частиц в момент $t = 0$: $0 \leq r_0 < \infty$, $-\infty < \theta_0 < \infty$, $-\infty < u_0 < \infty$.

Якобиан перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым, равный $t\sqrt{1+t^2}$, обращается в нуль при $t = 0$. Момент времени $t = 0$ является моментом коллапса частиц газа. Ранг матрицы Якоби при $t = 0$ равен 2. Значит коллапс частиц происходит на поверхности. В момент времени $t = 0$ частицы занимают положение

$$x = \alpha \theta_0 - U_1(\pm r_0), \quad r = r_0, \quad \theta = \alpha \theta_0. \quad (19)$$

Поверхность коллапса задается уравнением

$$x = \theta - U_1(\pm r). \quad (20)$$

При $U_1 = 0$ поверхность коллапса есть прямой геликоид (рис. 1, а). Если $U_1 \neq \text{const}$, то поверхность коллапса есть наклонный геликоид (рис. 1, б). В каждой точке геликоида находится однопараметрическое семейство частиц, которые отличаются друг от друга скоростью u_0 вдоль оси x . Траектории движения частиц газа есть прямые линии.

Функция $U_1(\pm r)$ отвечает за форму образующей геликоида. Так, если $U_1(\pm r) > 0$, то геликоид раскручивается вдоль оси x в направлении убывания координаты x . Если $U_1(\pm r) < 0$, то геликоид раскручивается вдоль оси x в направлении возрастания координаты x .

На рис. 1, а изображен геликоид с функцией $U_1 = -r^2$. Если рассмотреть проекции траекторий на плоскость (y, z) , то это будут параллельные прямые для частиц с одинаковой лагранжевой координатой θ_0 и различной координатой r_0 . Если проекции траекторий частиц лежат на окружности радиуса r_0 (винтовые линии в пространстве), то проекциями траекторий будут прямые — касательные к этой окружности. Это следует из (18).

3.2. Для решения (15) уравнения мировых линий задаются равенствами

$$x = u_0 t + \alpha \theta_0 + U_1(-r_0), \quad r = r_0 \sqrt{|t|}, \quad \theta = \ln |t| \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{1}{r_0^{3/2}} \right)^{1/2} + \theta_0.$$

Якобиан перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым, равный $t\sqrt{|t|}$, обращается в нуль при $t = 0$. Момент времени $t = 0$ является моментом коллапса частиц газа. Ранг матрицы Якоби при $t = 0$ равен 1. Коллапс частиц происходит на прямой

$$x = \alpha \theta_0 - U_1(-r_0), \quad y = z = 0. \quad (21)$$

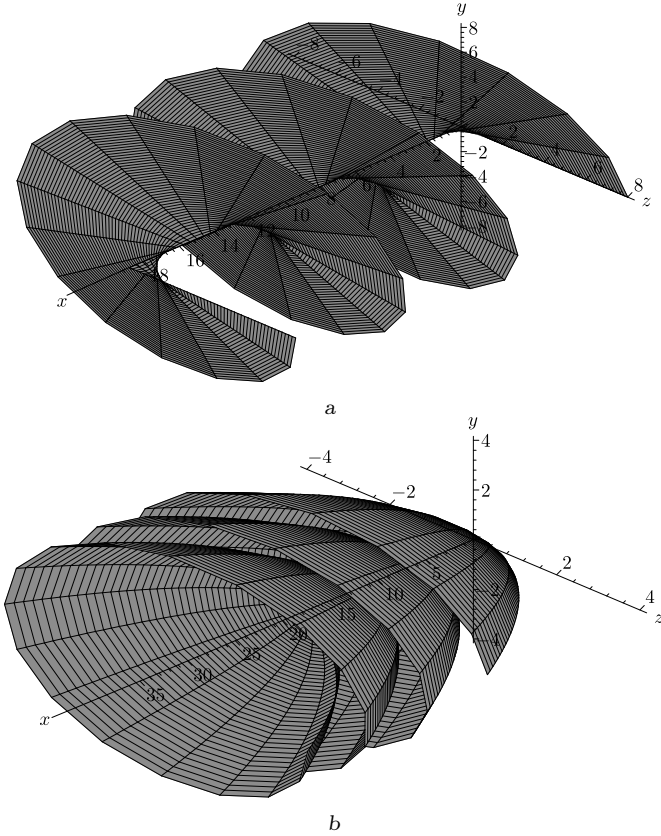


Рис. 1. Поверхности коллапса: а) прямой геликоид; б) наклонный геликоид
 [Figure 1. Collapse surfaces: (a) straight helix; (b) inclined helix]

Проекция траектории на плоскость (y, z) есть логарифмическая спираль (рис. 2, а):

$$r = r_0 \exp\left(\frac{\theta - \theta_0}{\kappa(r_0)}\right), \quad \kappa(r_0) = (1 + 2r_0^{-3/2})^{1/2}.$$

Траектории в пространстве лежат на параболоиде (рис. 2, б):

$$x = u_0(rr_0^{-1})^2 + \alpha\theta_0 + U_1(-r_0).$$

3.3. Для решения (16) уравнения мировых линий задаются равенствами

$$x = u_0t + \alpha\theta_0 - U_1(-r_0), \quad r = r_0|t|, \quad \theta = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{r_0^{5/6}|t|} + \theta_0.$$

Якобиан перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым, равный $t|t|$, обращается в нуль при $t = 0$. Момент времени $t = 0$ является моментом коллапса частиц газа. Ранг матрицы Якоби при $t = 0$ равен 1. Коллапс частиц происходит на прямой (21). Проекцией траекторий на плоскость (y, z) явля-

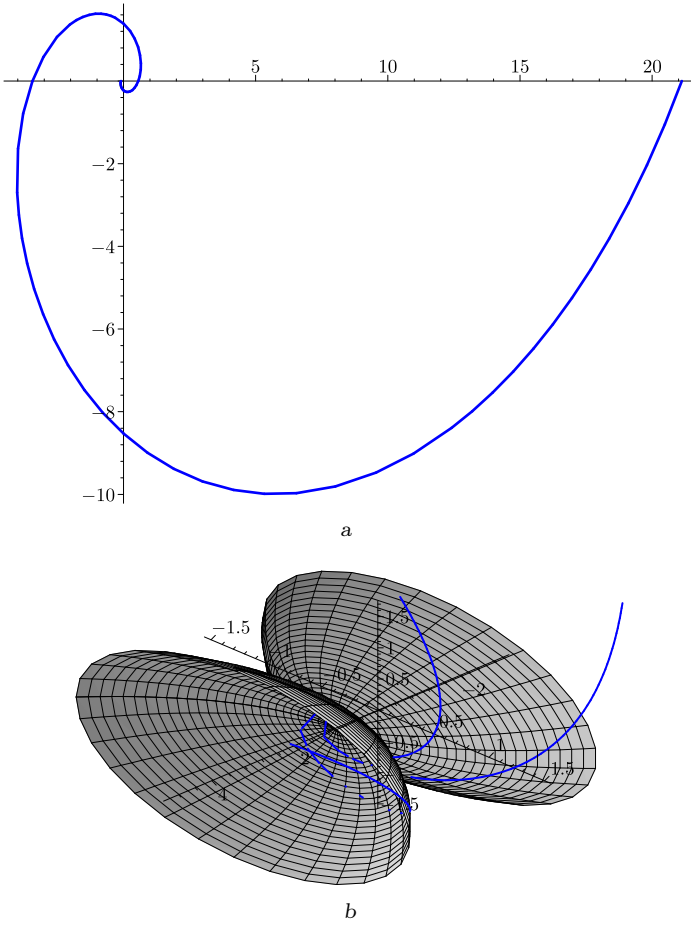


Рис. 2. Траектория движения частиц при $\gamma = 3/2$: а) логарифмическая спираль (проекция); б) логарифмическая спираль на параболоиде
 [Figure 2. The trajectory of motion of particles at $\gamma = 3/2$: (a) logarithmic spiral (a projection); (b) logarithmic spiral on a paraboloid]

ется гиперболическая спираль (рис. 3, а)

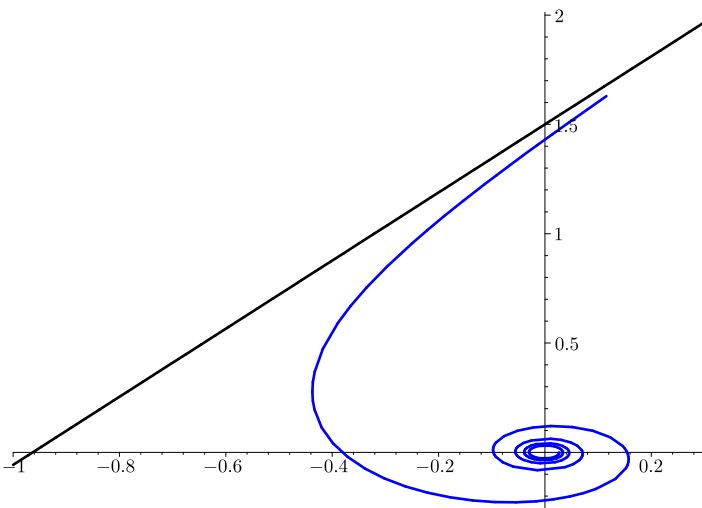
$$r = \frac{\kappa(r_0)}{\theta - \theta_0}, \quad \kappa(r_0) = \sqrt{\frac{2}{3}} r_0^{1/6}.$$

В пространстве траектории являются винтовыми линиями на конусе (рис. 3, б).

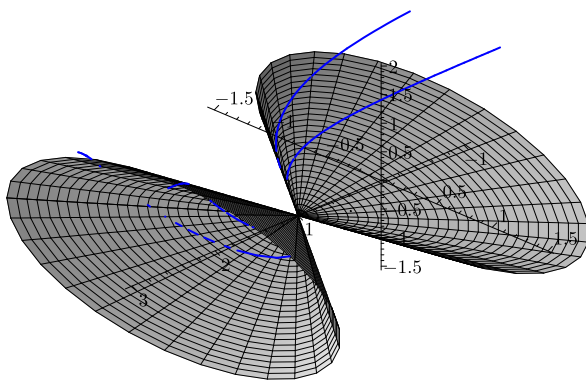
3.4. Для решения (17) уравнения мировых линий задаются равенствами

$$x = u_0 t + \theta_0 - U_1(r_0), \quad r = r_0, \quad \theta = \theta_0.$$

Якобиан перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым, равный t , обращается в нуль при $t = 0$. Момент времени $t = 0$ является моментом коллапса частиц газа. Ранг матрицы Якоби при $t = 0$ равен 2. В момент времени $t = 0$ частицы занимают положение (19). Поверхность коллапса задается уравнением (20) геликоида. Траектории параллельны оси x .



a



b

Рис. 3. Траектория движения частиц при $\gamma = 5/3$: a) гиперболическая спираль (проекция); b) гиперболическая спираль на конусе

[Figure 3. The trajectory of motion of particles at $\gamma = 5/3$: (a) hyperbolic spiral (a projection); (b) hyperbolic spiral on a cone]

Заключение. Для инвариантной подмодели ранга 2 найдены решения в случае политропного газа с предположением о линейной зависимости радиальной компоненты скорости от пространственных координат. Полученные решения описывают прямолинейный разлет частиц газа с поверхности геликоидов различной конфигурации. Движения частиц по гиперболическим или логарифмическим спиральям, которые в пространстве лежат на конусе или параболоиде соответственно. В работе получены соотношения и уравнения (3), (5), (6), (7), которые позволяют найти точные решения не только для уравнения состояния политропного газа, но и для любого уравнения состояния. Требуется лишь подставить выбранное уравнение состояния в дифференциальное уравнение (6) и провести разделение переменных в уравнении.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18–29–10071_мк) и частично поддержана средствами государственного бюджета по госзадаанию на 2019–2022 годы (№ 0246–2019–0052).

Благодарность. Автор благодарит анонимного рецензента за ценные предложения по улучшению этой статьи.

Библиографический список

1. Мамонтов Е. В. Инвариантные подмодели ранга два уравнений газовой динамики // *ПМТФ*, 1999. Т. 40, № 2. С. 50–55.
2. Хабиров С. В. *Аналитические методы в газовой динамике*. Уфа: Гилем, 2003. 192 с.
3. Вишератин К. Н., Калашник М. В. Нелинейные акустические колебания в закрученных газовых потоках // *Изв. Акад. наук. МЖГ*, 2014. Т. 4. С. 125–135.
4. Юлмухаметова Ю. В. Подмодели газовой динамики с линейным полем скоростей // *Сиб. электрон. матем. изв.*, 2012. № 9. С. 208–226.
5. Головин С. В. Точные решения для эволюционных подмоделей газовой динамики // *ПМТФ*, 2002. Т. 43, № 4. С. 3–14.
6. Овсянников Л. В. *Лекции по основам газовой динамики*. М.: Наука, 1981. 368 с.
7. Хабиров С. В., Чиркунов Ю. А. *Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды*. Новосибирск: НГТУ, 2012. 659 с.

MSC: 35B35, 35B06

The solution of equations of ideal gas that describes Galileo invariant motion with helical level lines, with the collapse in the helix

*Yu. V. Yulmukhametova*Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Center, RAS,
71, Oktyabr' av., Ufa, 450054, Russian Federation.

Abstract

We consider the equations of ideal gas dynamics in a cylindrical coordinate system with the arbitrary equation of state and one two-dimensional subalgebra from the optimum system of an 11-dimensional Lie algebra of differentiation operators of the first order. The basis of the subalgebra operators consists of the operator of Galilean transfer and the operator of movement on spiral lines. Invariants of operators set representation: type of speed, density and entropy. After substitution of the solution representation into the equations of gas dynamics the assumption of the linear relation of a radial component of speed and spatial coordinate is entered. Transformations of equivalence which are allowed by a set of equations of gas dynamics after substitution of the solution representation are written down. For the state equation of polytropic gas all four solutions depending on an isentropic exponent are found. For each case the equations of world lines of gas particles motion are written down. The transition Jacobian from Eulerian variables to Lagrangian is found. The instants of collapse of gas particles are determined by value of the Jacobian. As a result the solutions describe movement on straight lines from a helicoid surface. Movements of the particles on equiangular spirals lying on a paraboloid and on hyperbolic spirals, lying on a cone.


Keywords: gas dynamics, rank two submodel, linear velocity field, polytropic gas, collapse surface, helicoid.

Received: 14th May, 2019 / Revised: 7th November, 2019 /Accepted: 11th November, 2019 / First online: 2nd December, 2019

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Short Communication

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Yulmukhametova Yu. V. The solution of equations of ideal gas that describes Galileo invariant motion with helical level lines, with the collapse in the helix, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 797–808. doi: [10.14498/vsgtu1703](https://doi.org/10.14498/vsgtu1703).

Author's Details:

Yulya V. Yulmukhametova   <https://orcid.org/0000-0002-8127-4584>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Researcher; Lab. of Differential Equation of Mechanics;

e-mail: yulmukhametova.yv@ya.ru

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18–29–10071_mk) and supported by the state budget funds for the state assignments (no. 0246–2019–0052).

Acknowledgments. The author thanks anonymous reviewer for valuable suggestions to improve this paper.

References

1. Mamontov E. V. Invariant submodels of rank two to the equations of gas dynamics, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1999, vol. 40, no. 2, pp. 232–237. doi: [10.1007/BF02468519](https://doi.org/10.1007/BF02468519).
2. Khabirov S. V. *Analiticheskie metody v gazovoi dinamike* [Analytical Methods in Gas Dynamics]. Ufa, Gilem, 2003, 192 pp. (In Russian)
3. Visheratin K. N., Kalashnik M. V. Nonlinear acoustic oscillations in swirling gas flows, *Fluid Dyn.*, 2014, vol. 49, no. 4, pp. 530–539. doi: [10.1134/S0015462814040139](https://doi.org/10.1134/S0015462814040139).
4. Yulmukhametova Yu. V. Submodels in gas dynamics with linear field of velocity, *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2012, no. 9, pp. 208–226 (In Russian).
5. Golovin S. V. Exact solutions for evolutionary submodels of gas dynamics, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2002, vol. 43, no. 4, pp. 493–502. doi: [10.1023/A:1016006110915](https://doi.org/10.1023/A:1016006110915).
6. Ovsyannikov L. V. *Lektsii po osnovam gazovoi dinamiki* [Lectures on the Fundamentals of Gas Dynamics]. Moscow, Nauka, 1981, 368 pp. (In Russian)
7. Khabirov S. V., Chirkynov Y. A. *Elementy simmetriinogo analiza differentsial'nykh uravnenii mekhaniki sploshnoi sredy* [Elements of Symmetry Analysis of Differential Equations of Continuum Mechanics]. Novosibirsk, Novosibirsk State Technical Univ., 2012, 659 pp. (In Russian)