Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23, № 1. С. 7–19
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1647

Дифференциальные уравнения и математическая физика

УДК 517.956.6

Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в полуполосе

В. З. Вагапов

Башкирский государственный университет, Стерлитамакский филиал,
Россия, 453103, Стерлитамак, проспект Ленина, 49.

Аннотация

Изучена первая граничная задача для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в полуполосе в классе регулярных и ограниченных в бесконечности решений. Методами спектрального анализа установлен критерий единственности поставленной задачи. Решение задачи построено в виде ряда по собственным функциям соответствующей одномерной задачи на собственные значения. При обосновании равномерной сходимости построенного ряда возникла проблема малых знаменателей, в связи с чем в работе доказана оценка об отделенности от нуля малого знаменателя с соответствующей асимптотикой. Эта оценка при некоторых достаточных условиях на граничную функцию позволила доказать сходимость построенного ряда в классе регулярных решений данного уравнения. В отличие от других работ схожей тематики, критерий единственности и существование решения поставленной задачи удалось доказать при всех положительных значениях входящих в уравнение параметров, не обязательно равных. Важным следствием полученного результата является такой факт, что построенное решение всюду в рассматриваемой области является решением уравнения, поэтому линия изменения типа уравнения как особая устраняется.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа с двумя линиями вырождения, полуполоса, задача Дирихле, критерий единственности, существование, малые знаменатели.

Получение: 26 сентября 2018 г. / Исправление: 12 декабря 2018 г. / Принятие: 27 января 2019 г. / Публикация онлайн: 30 марта 2019 г.

Научная статья

Образец для цитирования

Вагапов В. З. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в полуполосе // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 1. С. 7–19. doi: 10.14498/vsgtu1647.

Сведения об авторе

Винер Зуфарович Вагапов https://orcid.org/0000-0002-2579-1967
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. математического анализа; e-mail: vagapov_vz@rambler.ru

Введение. Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu(x,t) \equiv K(t)u_{xx} + x^m u_{tt} - b^2 x^m K(t)u = 0 \tag{1}$$

в бесконечной прямоугольной области

$$D = \{(x,t) \mid 0 < x < 1, t > -\alpha\},$$

где $K(t) = (\operatorname{sgn} t)|t|^n$; $n > 0$, $m > 0$, $b \geqslant 0$, $\alpha > 0$ — заданные действительные числа.

Задача Дирихле. *Найти в области D ограниченную функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям*

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{2}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad -\alpha \leqslant t \leqslant +\infty; \tag{4}$$

$$u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{5}$$

где $\psi(x)$ — заданная достаточно гладкая функция, причем $\psi(0) = \psi(1) = 0$,

$$D_+ = D \cap \{t > 0\}, \quad D_- = D \cap \{t < 0\}.$$

Ранее задача Трикоми для уравнения (1) при $b = 0$ изучалась в работах [1, 2] в классической области, в которой гиперболическая часть представляет характеристический треугольник, где методом экстремума доказана единственность решения, а существование — методом интегральных уравнений при всех $m = n > 0$. Обзор работ, посвященных данному направлению, приведен в монографии [3].

Отметим, что задача Дирихле изучалась в работах [4–6].

В работе [7] исследована задача (2)–(5) для уравнения (1) при $m = 0$ в прямоугольной области D и полуполосе, методами спектрального анализа установлен критерий единственности и решение задачи построено в виде суммы ряда Фурье.

В данной статье на основании работ [6, 7] установлен критерий единственности и построено решение задачи (2)–(5) при всех n, $m > 0$, не обязательно равных.

1. Построение частных решений уравнения (1). Частные решения уравнения (1), не равные нулю в области D, будем искать в виде произведения

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

удовлетворяющего однородным граничным условиям (4). Подставляя данное произведение в уравнение (4), получим

$$X''(x) + \mu X(x)x^m = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{6}$$

$$X(0) = 0, \quad X(1) = 0, \tag{7}$$

$$T''(t) - (b^2 + \mu)\operatorname{sgn} t \cdot |t|^n T(t) = 0, \quad -\alpha < t < +\infty, \quad t \neq 0, \tag{8}$$

где μ — постоянная разделения.

Решение спектральной задачи (6) и (7) определяется по формуле

$$\tilde{X}_k(x) = J_{\frac{1}{2l}}(d_k x^l)\sqrt{x} = J_{\frac{1}{2l}}\left(\frac{\sqrt{\mu_k}}{l}x^l\right)\sqrt{x}, \tag{9}$$

где $\mu_k = (d_k l)^2$, $J_{\frac{1}{2l}}(z)$ — функция Бесселя первого рода, $2l = m+2$, d_k — k-тый корень уравнения $J_{\frac{1}{2l}}(d) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Отметим, что система собственных функций (9) задачи (6) и (7) ортогональна в пространстве $L_2[0,1]$ с весом x^m, так как

$$\int_0^1 x^m \tilde{X}_k(x)\tilde{X}_{k'}(x)dx = \int_0^1 x^{m+1} J_{\frac{1}{2l}}(d_k x^l) J_{\frac{1}{2l}}(d_{k'} x^l)dx =$$
$$= \int_0^1 z J_{\frac{1}{2l}}(d_k z) J_{\frac{1}{2l}}(d_{k'} z)dz = 0$$

при $k \neq k'$.

Доказательство полноты этой системы в пространстве $L_2[0,1]$ с весом x^m проводится аналогично [8, §23, п. 7]. При этом для собственных значений задачи (6) и (7) справедлива асимптотическая формула при больших k:

$$\sqrt{\mu_k} = d_k l = k\pi l + \frac{\pi}{4}(1+3l) + O\left(\frac{1}{k}\right). \tag{10}$$

Для удобства дальнейших вычислений данную систему функций ортонормируем:

$$X_k(x) = \frac{1}{\|\tilde{X}_k\|_{L_2(0,1)}}\tilde{X}_k(x),$$

где

$$\|\tilde{X}_k\|^2_{L_2(0,1)} = \int_0^1 x^m \tilde{X}_k^2(x)dx.$$

На основании результатов [9] общее решение дифференциального уравнения (8) имеет вид

$$T_k(t) = \begin{cases} a_k\sqrt{t}I_{\frac{1}{2q}}(p_k t^q) + b_k\sqrt{t}K_{\frac{1}{2q}}(p_k t^q), & t > 0, \\ c_k\sqrt{-t}J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q) + d_k\sqrt{-t}Y_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q), & t < 0, \end{cases} \tag{11}$$

где $Y_{\frac{1}{2q}}(z)$ — функция Бесселя второго рода, $I_{\frac{1}{2q}}(z)$ и $K_{\frac{1}{2q}}(z)$ — модифицированные функции Бесселя первого и третьего рода соответственно; a_k, b_k, c_k и d_k — произвольные постоянные; $2q = n+2$, $p_k^2 = (b^2 + \mu_k)/q^2$.

Теперь в (11) на основании (2) подберем постоянные a_k, b_k, c_k, d_k так, чтобы выполнялись условия сопряжения

$$T_k(0+0) = T_k(0-0), \quad T'_k(0+0) = T'_k(0-0). \tag{12}$$

На основании асимптотических формул для функций Бесселя при $z \to 0$ [10, § 7.13.3] имеем

$$J_\nu(z) \sim \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu, \quad I_\nu(z) \sim \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu,$$
$$K_\nu(z) \sim \frac{\Gamma(|\nu|)}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{-|\nu|}, \quad \nu \neq 0.$$

Первое из равенств (12) выполнено, если $d_k = -\pi b_k/2$ при любых a_k и c_k, а второе равенство имеет место при $c_k = (\pi b_k/2)\operatorname{ctg}(\pi/(4q)) - a_k$ и $d_k = -\pi b_k/2$. С учетом последних равенств функции из (11) примут вид

$$T_k(t) = \begin{cases} a_k\sqrt{t}I_{\frac{1}{2q}}(p_k t^q) + b_k\sqrt{t}K_{\frac{1}{2q}}(p_k t^q), & t \geqslant 0, \\ -a_k\sqrt{-t}J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q) + b_k\sqrt{-t}\,\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q), & t \leqslant 0, \end{cases} \tag{13}$$

где

$$\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q) = \frac{\pi}{2\sin(\pi/(2q))}\Big[J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q) + J_{-\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)\Big].$$

По условию решение $u(x,t)$ уравнения (1) ограничено на бесконечности, поэтому построенные функции $T_k(t)$ при $t \to +\infty$ должны быть ограниченными. Это возможно при $a_k = 0$ для всех $k \in N$, так как решение $\sqrt{t}I_{\frac{1}{2q}}(p_k t^q)$ при $t \to +\infty$ стремится к бесконечности. Тогда, полагая в (13) $a_k = 0$, получаем

$$T_k(t) = \begin{cases} b_k\sqrt{t}K_{\frac{1}{2q}}(p_k t^q), & t \geqslant 0, \\ b_k\sqrt{-t}\,\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q), & t \leqslant 0. \end{cases} \tag{14}$$

Таким образом, ограниченные в области D частные решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям (2)–(4), определяются по следующей формуле:

$$u_k(x,t) = \begin{cases} b_k\sqrt{t}K_{\frac{1}{2q}}(p_k t^q)X_k(x), & t \geqslant 0, \\ b_k\sqrt{-t}\,\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)X_k(x), & t \leqslant 0, \end{cases} \tag{15}$$

где $X_k(x)$ задаются по формуле (9).

Отметим, что для функций (15) выполнено равенство

$$\frac{\partial^2 u_k(x,t)}{\partial t^2}\Big|_{t=0+0} = \frac{\partial^2 u_k(x,t)}{\partial t^2}\Big|_{t=0-0} \equiv 0.$$

2. Единственность решения задачи Дирихле. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (2)–(5). Рассмотрим функции

$$u_k(t) = \int_0^1 u(x,t)x^m X_k(x)dx, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

где $X_k(x)$ определяются по формуле (9).

На основании (16) введем функции

$$u_{k,\varepsilon}(t) = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x,t)x^m X_k(x)dx, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число.

Поскольку собственные функции $X_k(x)$ удовлетворяют уравнению (6), отсюда выразим

$$x^m X_k(x) = -\frac{1}{\mu_k}X_k''(x) \tag{18}$$

и подставим в (17):

$$u_{k,\varepsilon}(t) = -\frac{1}{\mu_k}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x,t)X_k''(x)dx. \tag{19}$$

Интегрируя по частям интеграл (19) два раза и используя уравнение (1) при $t \neq 0$, получим

$$u_{k,\varepsilon}''(t) - (b^2+\mu_k)K(t)u_{k,\varepsilon}(t) - K(t)\big[u(1-\varepsilon,t)X_k'(1-\varepsilon) - u(\varepsilon,t)X_k'(\varepsilon) - \\ - u_x(1-\varepsilon,t)X_k(1-\varepsilon) + u_x(\varepsilon,t)X_k(\varepsilon)\big] = 0. \tag{20}$$

Переходя в (20) к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом условий (4) и (7), получим, что $u_k(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u_k''(t) - (b^2+\mu_k)K(t)u_k(t) = 0, \quad t \in (-\alpha,0)\cup(0,+\infty). \tag{21}$$

Уравнение (21) совпадает с (8) при $\mu = \mu_k$. Тогда $u_k(t) \equiv T_k(t)$ на промежутке $t \in (-\alpha,0)\cup(0,+\infty)$, т.е. функции $u_k(t)$ определяются по формуле (14) и имеют вид

$$u_k(t) = \begin{cases} b_k\sqrt{t}K_{\frac{1}{2q}}(p_k t^q), & t > 0, \\ b_k\sqrt{-t}\,\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q), & t < 0. \end{cases} \tag{22}$$

Для нахождения постоянных b_k воспользуемся граничным условием (5) и формулой (16):

$$u_k(-\alpha) = \int_0^1 u(x,-\alpha)x^m X_k(x)dx = \int_0^1 \psi(x)x^m X_k(x)dx = \psi_k. \tag{23}$$

Тогда из (22) и (23) при условии

$$\delta_k(\alpha) = \overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q) \neq 0 \tag{24}$$

имеем

$$b_k = \frac{\psi_k}{\delta_k(\alpha)\sqrt{\alpha}}. \tag{25}$$

Подставляя (25) в (22), найдем окончательный вид функций:

$$u_k(t) = \begin{cases} \psi_k\sqrt{\dfrac{t}{\alpha}}\dfrac{K_{\frac{1}{2q}}(p_k t^q)}{\delta_k(\alpha)}, & t > 0, \\ \psi_k\sqrt{\dfrac{-t}{\alpha}}\dfrac{\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)}{\delta_k(\alpha)}, & t < 0. \end{cases} \tag{26}$$

Пусть теперь $\psi(x) \equiv 0$ и выполнено условие (24). Тогда из равенств (23) и (26) следует, что $u_k(t) \equiv 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и из (16) получим

$$\int_0^1 u(x,t)x^m X_k(x)dx = 0, \quad k = 1,2,\ldots.$$

Отсюда в силу полноты системы (9) в пространстве $L_2[0,1]$ следует, что $u(x,t)=0$ почти для всех $x\in[0,1]$ и при любом $t\in[-\alpha,+\infty)$. Поскольку $u(x,t)\in C(\overline{D})$, имеем $u(x,t)\equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых α и $k=l\in\mathbb{N}$ нарушено условие (24), т.е. $\delta_l(\alpha)=0$. Тогда однородная задача (2)–(5), где $\psi(x)\equiv 0$, имеет нетривиальное решение

$$u_l(x,t)=\begin{cases}\sqrt{t}K_{\frac{1}{2q}}(p_l t^q)X_l(x), & t>0,\\ \sqrt{-t}\;\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_l(-t)^q)X_l(x), & t<0,\end{cases}\tag{27}$$

где $X_l(x)$ находятся по формуле (9).

Таким образом, нами установлен следующий критерий единственности.

Теорема 1. *Если существует решение $u(x,t)$ задачи (2)–(5), то оно единственно тогда и только тогда, когда $\delta_k(\alpha)\neq 0$ при всех $k\in\mathbb{N}$.*

3. Существование решения задачи Дирихле. Рассмотрим выражение

$$\tilde{\delta}_k(\alpha)=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2q}\;\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)=J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)+J_{-\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q).$$

На основании асимптотической формулы для функции

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\Bigl(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\Bigr)+O\Bigl(\frac{1}{z^{3/2}}\Bigr),\quad z\to\infty,\tag{28}$$

при достаточно больших $k>k_1$ имеем

$$\tilde{\delta}_k(\alpha)=2\sqrt{\frac{2}{\pi p_k\alpha^q}}\cos\Bigl(p_k\alpha^q-\frac{\pi}{4}\Bigr)\cos\frac{\pi}{4q}+O\bigl(k^{-3/2}\bigr).\tag{29}$$

При этом натуральное число k_1 выбирается настолько большим, что при всех $k>k_1$ выполняется равенство (29) и при любых фиксированных $b\geqslant 0$ и $l>0$ имеет место неравенство

$$\Bigl(\frac{b}{\sqrt{\mu_k}}\Bigr)^2<1.$$

Тогда

$$qp_k=\sqrt{b^2+\mu_k}=\sqrt{\mu_k}\Bigl(1+\frac{b^2}{\mu_k}\Bigr)^{1/2}=$$
$$=\sqrt{\mu_k}\Bigl[1+\frac{1}{2}\Bigl(\frac{b}{\sqrt{\mu_k}}\Bigr)^2-\frac{1}{8}\Bigl(\frac{b}{\sqrt{\mu_k}}\Bigr)^4+\ldots\Bigr]=\sqrt{\mu_k}+\theta_k,$$

где для θ_k справедлива оценка

$$0\leqslant\theta_k<\frac{b^2}{2\sqrt{\mu_k}}.\tag{30}$$

Отсюда на основании формулы (10)

$$p_k\alpha^q=k\pi\alpha_{ql}+\frac{\pi}{4}\frac{1+3l}{l}\alpha_{ql}+\frac{\theta_k}{l}\alpha_{ql}+O\Bigl(\frac{1}{k}\Bigr).\tag{31}$$

Пусть $\alpha_{ql} = \alpha_q l = \alpha^q l/q$. Тогда из соотношения (29) с учетом (31) получим

$$\sqrt{k}\widetilde{\delta}_k(\alpha) = \\ = A_k \cos\Big[k\pi\alpha_{ql} + \Big(\frac{\pi}{4}\frac{1+3l}{l} + \frac{\theta_k}{l}\Big)\alpha_{ql} + O\Big(\frac{1}{k}\Big) - \frac{\pi}{4}\Big] + O\Big(\frac{1}{k}\Big) = \\ = B_{1k} + B_{2k}, \quad (32)$$

где

$$A_k = \frac{2\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4q}}{\pi\sqrt{\alpha_q\Big(l + \dfrac{1+3l}{4k} + \dfrac{\theta_k}{\pi k}\Big) + O\Big(\dfrac{1}{k^2}\Big)}}.$$

Отметим, что величина A_k ограничена и отделена от нуля:

$$0 < A < A_k < B = A_\infty.$$

Пусть теперь $\alpha_{ql} = p/t$ — рациональное число, p, $t \in \mathbb{N}$, $\gcd(p,t) = 1$. Разделим kp на t с остатком: $kp = st + r$, r, $s \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leqslant r \leqslant t-1$. Тогда выражение B_{1k} из (32) при больших $k > k_2 \in \mathbb{N}$ оценим следующим образом:

$$|B_{1k}| = A_k\Big|\cos\Big[\frac{\pi r}{t} + \Big(\frac{\pi}{4}\frac{1+3l}{l} + \frac{\theta_k}{l}\Big)\frac{p}{t} + O\Big(\frac{1}{k}\Big) - \frac{\pi}{4}\Big]\Big| \geqslant \\ \geqslant \frac{A_\infty}{2}\Big|\cos\Big[\frac{\pi r}{t} + \frac{\pi}{4}\frac{1+3l}{l}\frac{p}{t} - \frac{\pi}{4}\Big]\Big| = \widetilde{C}_1 \geqslant 0,$$

так как в силу оценки (30) существует конечный предел

$$\lim_{k\to\infty} |B_{1k}| = \widetilde{C}_1.$$

Теперь потребуем, чтобы постоянная $\widetilde{C}_1$ была больше нуля, а это возможно только тогда, когда

$$\pi\Big(\frac{r}{t} + \frac{1+3l}{4l}\frac{p}{t} - \frac{1}{4}\Big) \neq \frac{\pi}{2} + d\pi, \quad d = 0, 1, 2, \ldots,$$

или

$$l \neq \frac{p}{3 - 3p + 4d} \tag{33}$$

при всех $d \in \mathbb{N}_0$ и $r \in \mathbb{N}_0 \cap [0, t-1]$.

Отметим, что правая часть неравенства (33) всегда является рациональным числом. Поэтому, если l принимает иррациональные значения, то неравенство (33) всегда выполнено при всех $d \in \mathbb{N}_0$ и $r \in \mathbb{N}_0 \cap [0, t-1]$.

Таким образом, при выполнении условия (33) при всех $k \geqslant \max\{k_1, k_2\}$

$$|B_{1k}| \geqslant \widetilde{C_1} > 0.$$

Тем самым показана отделимость от нуля выражения $\sqrt{k}\widetilde{\delta}_k(\alpha)$ при больших k, поэтому приходим к следующему утверждению.

Лемма 1. *Если* $\alpha_{ql} = p/t$, p, $t \in \mathbb{N}$, $\gcd(p,t) = 1$ *и выполнено условие* (33), *то существуют положительные постоянные* C_0 *и* k_0, $k_0 \in \mathbb{N}$, *зависящие, вообще говоря, от* α, n, m, b *и* β *такие, что при всех* $k > k_0$ *справедлива оценка*

$$|\sqrt{k}\delta_k(\alpha)| \geqslant C_0 > 0. \tag{34}$$

Если $\delta_k(\alpha) \neq 0$ при $k = \overline{1, k_0}$ для указанных α из леммы 1 и выполнена оценка (34), то решение задачи (2)–(5) на основании частных решений (9) и (14) можно представить в виде суммы ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t) X_k(x). \tag{35}$$

Теперь покажем, что при определенных условиях относительно функции $\psi(x)$ ряд (35) сходится равномерно на замкнутой области $\overline{D}$ и там его можно почленно дифференцировать по x и t дважды.

Рассмотрим следующие отношения:

$$A_k(t) = \sqrt{\frac{t}{\alpha}}\frac{K_{\frac{1}{2q}}(p_k t^q)}{\delta_k(\alpha)}, \quad t \geqslant 0;$$

$$B_k(t) = \sqrt{\frac{-t}{\alpha}}\frac{\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)}{\delta_k(\alpha)}, \quad -\alpha \leqslant t \leqslant 0.$$

Лемма 2. *При условии* (34) *для достаточно больших* k *справедливы следующие оценки*:

$$|A_k(t)| \leqslant P_1 k^{1/2-\lambda}, \quad |A_k'(t)| \leqslant P_1 k^{1/2+\lambda}, \quad |A_k''(t)| \leqslant P_1 k^{5/2-\lambda},$$

$$|B_k(t)| \leqslant P_2 k^{1/2-\lambda}, \quad |B_k'(t)| \leqslant P_2 k^{1/2+\lambda}, \quad |B_k''(t)| \leqslant P_2 k^{5/2-\lambda},$$

$$|u_k(t)| \leqslant P_3 k^{1/2-\lambda}|\psi_k|, \quad |u_k'(t)| \leqslant P_3 k^{1/2+\lambda}|\psi_k|, \quad |u_k''(t)| \leqslant P_3 k^{5/2-\lambda}|\psi_k|,$$

где P_i — *здесь и далее положительные постоянные*, $\lambda = 1/(2q)$.

Доказательство леммы 2 проводится аналогично работе [9].

Лемма 3. *Для достаточно больших* k *и при любом* $x \in [0,1]$ *справедливы следующие оценки*:

$$|X_k(x)| \leqslant P_4, \quad |X_k''(x)| \leqslant P_5 k^2, \tag{36}$$

$$|X_k'(x)| \leqslant P_6 k, \qquad x \in [0,1], \tag{37}$$

Доказательство. Действительно, в силу асимптотической формулы (28) на основании (9) и (10) получаем первую оценку из (36). Собственные функции $X_k(x)$ удовлетворяют уравнению (18). Из этого равенства, используя оценку для $X_k(x)$, получим второе неравенство из (36). Поскольку

$$X_k'(x) = \pi l^2 k x^{l-1/2} J_{\frac{1}{2l}-1}(\pi l k x^l),$$

отсюда следует справедливость неравенства (37) при любом $x \in [0,1]$. $\square$

Формально из ряда (35) почленным дифференцированием составим ряды

$$u_t(x,t)=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k'(t)X_k(x),\quad u_x(x,t)=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k(t)X_k'(x), \tag{38}$$

$$u_{tt}(x,t)=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k''(t)X_k(x),\quad u_{xx}(x,t)=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k(t)X_k''(x). \tag{39}$$

Ряды (35) и (38) при любом $(x,t)\in\overline{D}$ мажорируются рядом

$$P_7\sum_{k=0}^{+\infty}k^{3/2+1/(2l)+\lambda}|\psi_k|,$$

а ряды (39) при любом $(x,t)\in\overline{D}_\varepsilon=\overline{D}\cap\{x\geqslant\varepsilon\}$ — рядом

$$P_8\sum_{k=0}^{+\infty}k^{5/2+\lambda}|\psi_k|.$$

Лемма 4. *Если функция $\psi(x)\in C^3[0,1]$ и $\psi(0)=\psi(1)=\psi''(1)=0$, то справедлива оценка*

$$|\psi_k|=\frac{|\chi_k|}{\mu_k}\leqslant\frac{P_9}{k^{7/2}}, \tag{40}$$

где

$$\chi_k=\int_0^1\psi'''(x)v_k(x)dx,$$

$$v_k(x)=\int_0^x\sqrt{t}J_{\frac{1}{2l}}(d_kt^l)dt. \tag{41}$$

Доказательство. В интеграле (23), интегрируя по частям два раза и используя равенство (18) и условия леммы, имеем

$$\psi_k=\int_0^1\psi(x)x^mX_k(x)dx=-\frac{1}{\mu_k}\int_0^1\psi(x)X_k''(x)dx=$$

$$=\frac{1}{\mu_k}\int_0^1\psi'(x)X_k'(x)dx=-\frac{1}{\mu_k}\int_0^1\psi''(x)X_k(x)dx=-\frac{\psi_k^{(2)}}{\mu_k}. \tag{42}$$

При условии $\psi''(1)=0$ последний интеграл из (42) проинтегрируем по частям еще раз:

$$\psi_k^{(2)}=\int_0^1\psi''(x)X_k(x)dx=\int_0^1\psi'''(x)v_k(x)dx.$$

В интеграле (41) сделаем замену $z=d_kt^l$, $z_1=d_kx^l$ и тогда получим

$$v_k(x)=\left(\frac{1}{d_k}\right)^{3/(2l)}\frac{1}{l}\int_0^{z_1}z^{3/(2l)-1}J_{\frac{1}{2l}}(z)dz. \tag{43}$$

Для оценки интеграла из (43) при больших k воспользуемся асимптотической формулой [11, п. 10.4.3 (10.87)]

$$\int_0^1 J_\mu(zt)t^{\alpha-1}(1-t^2)^{\beta-1}dt = \frac{2^{\alpha+\beta-2}}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}(\alpha-\mu)\Gamma\Big(\frac{\alpha-\mu}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{\alpha+\mu}{2}\Big)z^{-\alpha}+ \\ + \frac{2^{\beta-1/2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\beta)\cos\Big[z-\frac{\pi}{2}\Big(\mu+\beta+\frac{1}{2}\Big)\Big]z^{-\beta-1/2}+O\big(z^{-\min\{\alpha+1,\beta+3/2\}}\big).$$

Из этой формулы в итоге получаем

$$|v_k(x)| \leqslant P_{10}k^{-3/2}.$$

С учетом (43) из (42) следует справедливость оценки (40). □

В силу леммы 4 ряды (38) и (39) оцениваются соответственно числовыми рядами

$$P_{11}\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-2+1/(2l)+\lambda}, \quad P_{12}\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-1+\lambda}. \tag{44}$$

На основании сходимости рядов (44) в силу признака Вейерштрасса сходятся равномерно ряды (35), (38) и (39) соответственно на замкнутой области $\overline{D}$ и $\overline{D}_\varepsilon$. Поэтому функция $u(x,t)$, определенная рядом (35), удовлетворяет условию (2).

Если для указанных в лемме 1 значений α при некоторых $k=l=n_1$, n_2, …, n_m, где $1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots < n_m \leqslant k_0$, n_m и m — заданные натуральные числа, $\delta_l(\alpha)=0$, то для разрешимости системы (23) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия ортогональности

$$\int_0^1 \psi(x)X_k(x)dx = 0. \tag{45}$$

В этом случае решение задачи (2)–(5) определяется в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \Bigg(\sum_{k=1}^{n_1-1} + \sum_{k=n_1+1}^{n_2-1} + \cdots + \sum_{k=n_m+1}^{+\infty}\Bigg)u_k(t)X_k(x) + \sum_l C_l u_l(x,t). \tag{46}$$

Здесь в последней сумме l принимает значения n_1, n_2, …, n_m, C_l — произвольные постоянные, $u_l(x,t)$ — определяется по формуле (27), конечные суммы в (46) следует считать равными нулю, если нижний предел больше верхнего.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть функция $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 4 и выполнена оценка (34) при $k > k_0$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

- *если $\delta_k(\alpha) \neq 0$ при всех $k=\overline{1,k_0}$, то существует единственное решение задачи (2)–(5) и это решение определяется рядом (35);*
- *если $\delta_k(\alpha)=0$ при некоторых $k=n_1,n_2,\ldots,n_m \leqslant k_0$, то задача (2)–(5) разрешима только тогда, когда выполняются условия ортогональности (45) и решение в этом случае определяется рядом (46).*

Следствие. *Построенное решение* $u(x,t)$ *задачи* (2)–(5) *принадлежит классу* $C^2(D)$ *и функция* $u(x,t)$ *всюду в* D *является решением уравнения* (1). *Линия изменения типа* $t = 0$ *уравнения* (1) *как особая устраняется.*

Конкурирующие интересы. У меня нет конфликта интересов в авторстве и публикации этой статьи.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Сабитов К. Б., Шарафутдинова Г. Г. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения // *Дифференц. уравнения*, 2003. Т. 39, № 6. С. 788–800.
2. Сабитов К. Б., Карамова А. А. Решение одной газодинамической задачи для уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения // *Дифференц. уравнения*, 2002. Т. 38, № 1. С. 111–116.
3. Сабитов К. Б., Биккулова Г. Г., Гималтдинова А. А. *К теории уравнений смешанного типа с двумя линиями изменения типа.* Уфа: Гилем, 2006. 149 с.
4. Нахушев А. М. Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // *Дифференц. уравнения*, 1970. Т. 6, № 1. С. 190–191.
5. Хачев М. М. *Первая краевая задача для линейных уравнений смешанного типа.* Нальчик: Эльбрус, 1998. 168 с.
6. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // *Докл. РАН*, 2007. Т. 413, № 1. С. 23–26.
7. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в полуполосе // *Дифференц. уравнения*, 2007. Т. 43, № 10. С. 1417–1422.
8. Владимиров В. С. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1988. 512 с.
9. Сабитов К. Б., Сидоренко О. Г. Задача с условиями периодичности для вырождающегося уравнения смешанного типа // *Дифференц. уравнения*, 2010. Т. 46, № 1. С. 105–113.
10. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher transcendental functions.* vol. II. / Bateman Manuscript Project. New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Co., 1953. xvii+396 pp.
11. Риекстыньш Э. Я. *Асимптотические разложения интегралов.* Т. 1. Рига: Зинатне, 1974. 392 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 1, pp. 7–19
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1647

MSC: 35M10, 35G16

Dirichlet problem for the mixed type equation with two degeneration lines in a half-strip

V. Z. Vagapov

Sterlitamak Branch of Bashkir State University,
49, Lenin Avenue, Sterlitamak, 453103, Russian Federation.

Abstract

In this article, the first boundary problem for the mixed type equation with two degeneration lines at a half-strip in the class of the regular and limited in infinity decisions is discussed. The criterion of uniqueness for the stated problem was formulated by the methods of a spectral analysis. The solution of a problem is constructed in the form of a series on eigenfunctions of the corresponding one-dimensional eigenvalues problem. At justification of the uniform convergence of the constructed series there was a problem of small denominators. The estimation for the separation from zero of a small denominator with the corresponding asymptotics was provided in connestion with mentioned problem in the present paper. This assessment at some sufficient conditions on boundary function allowed to prove convergence of the constructed series in a class of the regular solutions of this equation. In difference from other works of similar subject is the criterion of uniqueness and existence of the solution of the stated problem to be proved at all positive values of the parameters entering the equation, not necessarily equal. Such fact is an important consequence of the received result that the constructed solution everywhere in the considered area is the solution of the equation. Therefore the line of change-type of the equation as a special one is eliminated.

Keywords: mixed type equation with two degeneration lines, half-strip, Dirichlet problem, criterion of uniqueness, existence, small denominators.

Received: 26th September, 2018 / Revised: 12th December, 2018 /
Accepted: 27th January, 2019 / First online: 30th March, 2019

Competing interests. I hereby declare that I have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Research Article

Please cite this article in press as:
Vagapov V. Z. Dirichlet problem for the mixed type equation with two degeneration lines in a half-strip, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 1, pp. 7–19. doi: 10.14498/vsgtu1647 (In Russian).

Author's Details:
Viner Z. Vagapov https://orcid.org/0000-0002-2579-1967
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mathematical Analysis;
e-mail: vagapov_vz@rambler.ru

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Sabitov K. B., Sharafutdinova G. G. The Tricomi problem for a mixed type equation with two orthogonal degeneration lines, *Differ. Equ.*, 2003, vol. 39, no. 6, pp. 830–843. doi: 10.1023/B:DIEQ.0000008410.62079.a0.
2. Sabitov K. B., Karamova A. A. Solution of a gasdynamic problem for an equation of mixed type with nonsmooth degeneration line, *Differ. Equ.*, 2002, vol. 38, no. 1, pp. 120–126. doi: 10.1023/A:1014867929277.
3. Sabitov K. B., Bikkulova G. G., Gimaltdinova A. A. *K teorii uravnenii smeshannogo tipa s dvumia liniiami izmeneniia tipa* [On the theory of mixed type equations with two lines of change of type]. Ufa, Gilem, 2006, 149 pp. (In Russian)
4. Nakhushev A. M. An uniqueness condition of the Dirichlet problem for an equation of mixed type in a cylindrical domain, *Differ. Uravn.*, 1970, vol. 6, no. 1, pp. 190–191 (In Russian).
5. Khachev M. M. *Pervaia kraevaia zadacha dlia lineinykh uravnenii smeshannogo tipa* [The first boundary value problem for linear equations of mixed type]. Nal'chik, El'brus, 1998, 168 pp. (In Russian)
6. Sabitov K. B. Dirichlet problem for mixed-type equations in a rectangular domain, *Dokl. Math.*, 2007, vol. 75, no. 2, pp. 193–196. doi: 10.1134/S1064562407020056.
7. Sabitov K. B. Dirichlet problem for equations of mixed type in a half-strip, *Differ. Equ.*, 2007, vol. 43, no. 10, pp. 1453–1458. doi: 10.1134/S0012266107100136.
8. Vladimirov V. S. *Equations of mathematical physics*, Pure and Applied Mathematics, vol. 3. New York, Marcel Dekker, Inc., 1971, vi+418 pp.
9. Sabitov K. B., Sidorenko O. G. Problem with periodicity conditions for a degenerating equation of mixed type, *Differ. Equ.*, 2010, vol. 46, no. 1, pp. 108–116. doi: 10.1134/S0012266110010118.
10. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher transcendental functions*, vol. II., Bateman Manuscript Project. New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Co., 1953, xvii+396 pp.
11. Riekstinš E. J. *Asimptoticheskie razlozheniia integralov* [Asymptotic expansions of integrals], vol. 1. Riga, Zinatne, 1974, 392 pp. (In Russian)