Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23, № 1. С. 20–36
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1648

УДК 517.956.6

Краевая задача для смешанно-составного уравнения с дробной производной, функциональным запаздыванием и опережением

А. Н. Зарубин, Е. В. Чаплыгина

Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева,
Россия, 302026, Орел, ул. Комсомольская, 95

Аннотация

Исследуется краевая задача Трикоми для функционально-дифференциального смешанно-составного уравнения $LQu(x,y) = 0$ в классе дважды непрерывно дифференцируемых решений. Здесь L — дифференциально-разностный оператор смешанного «параболо»-эллиптического типа с дробной производной Римана—Лиувилля и линейным сдвигом по y. Оператор Q содержит кратные функциональные запаздывания и опережения $a_1(x)$ и $a_2(x)$ по переменной x. Функциональные сдвиги $a_1(x)$ и $a_2(x)$ — сохраняющие ориентацию взаимно-обратные диффеоморфизмы. Область интегрирования $D = D^+ \cup D^- \cup I$. Область «параболичности» D^+ — множество $x_0 < x < x_3$, $y > 0$. Область эллиптичности $D^- = D_0^- \cup D_1^- \cup D_2^-$, причем D_k^- — множество $x_k < x < x_{k+1}$, $-\rho_k(x) < y < 0$ и $\rho_k = \sqrt{a_1^k(x)(x_1 - a_1^k(x))}$, $\rho_k(x) = \rho_0(a_1^k(x))$, $k = 0, 1, 2$. Построено общее решение. Доказаны теоремы единственности и существования.

Ключевые слова: уравнение смешанно-составного типа, дробная производная, разностный оператор, задача Трикоми.

Получение: 26 сентября 2018 г. / Исправление: 23 января 2019 г. /
Принятие: 27 января 2019 г. / Публикация онлайн: 28 марта 2019 г.

Научная статья

Образец для цитирования

Зарубин А. Н., Чаплыгина Е. В. Краевая задача для смешанно-составного уравнения с дробной производной, функциональным запаздыванием и опережением // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 1. С. 20–36. doi: 10.14498/vsgtu1648.

Сведения об авторах

Александр Николаевич Зарубин https://orcid.org/0000-0002-0611-5752
доктор физико-математических наук, профессор; зав. кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений; e-mail: matdiff@yandex.ru

Елена Викторовна Чаплыгина https://orcid.org/0000-0002-7553-0466
кандидат физико-математических наук; доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений; e-mail: lena260581@yandex.ru

Введение. Функционально-дифференциальные уравнения в частных производных [1, 2] и функционально-дифференциальные уравнения смешанного типа [3, 4] служат математическими моделями для многих прикладных задач [5].

Целью настоящей работы является исследование краевой задачи Трикоми для смешанно-составного уравнения, содержащего дробную производную, кратные функциональные запаздывания и опережения:

$$\mathbf{L}V(x,y) \equiv \mathbf{L}(A(x)U(\alpha_1(x),y) + \sum_{k=1}^{n} B_k(x)U(\alpha_1^k(x),y) + \\ + \sum_{k=1}^{m} C_k(x)U(\alpha_2^k(x),y) = 0, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{L} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{H}(-y)\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \mathbf{H}(y)\mathbf{D}_{0y}^{\alpha} - \mathbf{P}_y^{\tau}\mathbf{H}(y) \quad (2)$$

— дифференциально-разностный оператор смешанного типа, в котором $\mathbf{D}_{0y}^{\alpha}$ — оператор [6, с. 43] дробного (в смысле Римана—Лиувилля) интегро-дифференцирования порядка α, $0 < \alpha < 1$, действующий на функцию $V(x,y)$ по переменной y, определяемый соотношением

$$\mathbf{D}_{0y}^{\alpha}V(x,\xi) = \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{D}_{0y}^{\alpha-1}V(x,\xi) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^y (y-\xi)^{-\alpha}V(x,\xi)d\xi; \quad (3)$$

$\Gamma(x)$ — гамма-функция [7, с. 947]; $\mathbf{P}_y^{\tau}$ — оператор сдвига по y:

$$\mathbf{P}_y^{\tau}V(x,y) = V(x,y-\tau), \quad 0 < \tau \equiv \mathrm{const};$$

$\mathbf{H}(\xi)$ — функция Хевисайда; $A(x)$, $B_k(x)$, $C_k(x)$ — непрерывные достаточно гладкие функции; $n, m \in \mathbb{N}$; $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ — сохраняющие ориентацию взаимно обратные диффеоморфизмы класса $\mathbb{C}^2$, удовлетворяющие условиям $\alpha_1'(x) > 1$ ($\alpha_1'(x) < 1$), $\alpha_1(x) < x$ и $\alpha_2'(x) < 1$ ($\alpha_2'(x) > 1$), $\alpha_2(x) > x$, то есть представляющие собой соответственно растягивающе(сжимающе)-запаздывающее и сжимающе(растягивающе)-опережающее отображения, для которых выполняются тождества

$$\alpha_{3-j}(\alpha_j(x)) = x, \quad j = 1, 2, \quad (4)$$

где x принадлежит области определения $\alpha_j(x)$, причём $x_0 = 0$, а x_n определены корректно, согласно (4), любым из следующий равносильных равенств:

$$x_n = \alpha_1(x_{n+1}), \quad x_{n+1} = \alpha_2(x_n).$$

Например, если $n = \overline{-2, 5}$, то

$$x_{-2} = \alpha_1^2(x_0) < x_{-1} = \alpha_1^1(x_0) < 0 = x_0 = \alpha_2^0(x_0) < x_1 = \alpha_2^1(x_0) < x_2 = \\ = \alpha_2^2(x_0) < x_3 = \alpha_2^3(x_0) < x_4 = \alpha_2^4(x_0) < x_5 = \alpha_2^5(x_0).$$

Здесь и далее обозначено $\alpha_j^m(x) \equiv \underbrace{\alpha_j(\alpha_j(\ldots(\alpha_j(x))\ldots))}_{m\ \text{раз}}$, если $m>0$, $\alpha_j^0(x)\equiv x$, $\alpha_j^m(x) \equiv \underbrace{\alpha_{3-j}(\alpha_{3-j}(\ldots(\alpha_{3-j}(x))\ldots))}_{-m\ \text{раз}}$, если $m<0$; $j=1,2$.

1. Постановка задачи. Не ограничивая общности, для наглядности рассмотрим уравнение (1) в смешанной области $D = D^+ \cup D^- \cup I$ при $n, m = 2$, $B_1(x) = C_1(x) = 0$, $B_2(x) = -B(x)$, $C_2(x) = C(x)$, то есть уравнение

$$\mathbf{L}V(x,y) \equiv \mathbf{L}(A(x)U(\alpha_1(x),y) - B(x)U(\alpha_1^2(x),y) + C(x)U(\alpha_2^2(x),y)) = 0, \quad (5)$$

где $\mathbf{L}$ — оператор смешанного типа (2) в области D с линией изменения типа $I = \{(x,y) : x_0 < x < x_3, y = 0\}$; $D^+ = D_0^+ \cup D_1^+ \cup D_2^+ \cup J = \{(x,y) : x_0 < < x < x_3, y > 0\}$ и $D^- = D_0^- \cup D_1^- \cup D_2^-$ — соответсвенно «параболическая» и эллиптическая части области D, причём $D_k^+ = \{(x,y) : x_k < x < x_{k+1}, y > 0\}$, $k = \overline{-2,4}$; D_k^- — односвязная область при $y \leqslant 0$, $k = \overline{-2,4}$, ограниченная простой дугой Ляпунова

$$\sigma_k : y = -\rho_k(x), \quad \rho_k(x) = \sqrt{\alpha_1^k(x)(x_1 - \alpha_1^k(x))}, \quad x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}$$

и отрезком $[x_k, x_{k+1}]$ оси абсцисс; т.е.

$$D_k^- = \{(x,y) : x_k < x < x_{k+1}, -\rho_k(x) < y < 0\}, \quad \rho_k(x) = \rho_0(\alpha_1^k(x));$$

$J = J_1 \cup J_2$, где $J_k = \{(x,y) : x = x_k, y > 0\}$, $k = 1, 2$.

Пусть $D_k = D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k$, где $I_k = \{(x,y) : x_k < x < x_{k+1}, y = 0\}$, $k = \overline{-2,4}$, то есть $D = D^+ \cup D^- \cup I = \cup_{k=0}^{2}(D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k) \cup J = \cup_{k=0}^{+\infty} D_k \cup J$.

Тип функциональных отклонений очевиден из следующий представлений:

$$\begin{aligned}
U(\alpha_1(x),y) &= U(x - (x - \alpha_1(x)), y) = U(x - \tau_1(x), y),\\
U(\alpha_1^2(x),y) &= U(x - (x - \alpha_1^2(x)), y) = U(x - \tau_2(x), y),\\
U(\alpha_2(x),y) &= U(x + (\alpha_2(x) - x), y) = U(x + \tau_3(x), y),\\
U(\alpha_2^2(x),y) &= U(x + (\alpha_2^2(x) - x), y) = U(x + \tau_4(x), y),
\end{aligned}$$

где $\tau_1(x) = x - \alpha_1(x) > 0$, $\tau_2(x) = x - \alpha_1^2(x) > 0$, $\tau_3(x) = \alpha_2(x) - x > 0$, $\tau_4(x) = \alpha_2^2(x) - x > 0$.

Решение $U(x,y)$ уравнения (5) будем называть регулярным в области D, если $\mathbf{D}_{0y}^{\alpha-1}U(x,\xi) \in \mathbb{C}(\overline{D}^+)$, $U(x,y) \in \mathbb{C}(\overline{D}^-)$, $y^{1-\alpha}\mathbf{D}_{0y}^{\alpha}U(x,\xi) \in \mathbb{C}(D^+ \cup I)$, $U_{xx}(x,y) \in \mathbb{C}(D \backslash (I \cup J))$, $U_{yy}(x,y) \in \mathbb{C}(D^-)$.

Задача T. *В области D найти регулярное решение $U(x,y)$ уравнения (5), удовлетворяющее краевым условиям*

$$U(x_0,y) = U(x_3,y) = 0, \quad y \geqslant 0, \quad (6)$$

$$U(x,y)\big|_{\sigma_k : y = -\rho_k(x)} = \varphi_k(x), \quad x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}, \quad k = 0,1,2,$$

$$U(x,y) = r(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D_{-2} \cup D_{-1}}, \quad (7)$$

$$U(x,y)=q(x,y),\quad (x,y)\in\overline{D_3\cup D_4};\tag{8}$$

условиям сопряжения

$$\lim_{y\to 0-}U(x,y)=\lim_{y\to 0+}\boldsymbol{D}_{0y}^{\alpha-1}U(x,\xi)=\omega(x),\quad x_0\leqslant x\leqslant x_3,$$
$$\lim_{y\to 0-}U_y(x,y)=\lim_{y\to 0+}y^{1-\alpha}\boldsymbol{D}_{0y}^{\alpha}U(x,\xi)=\nu(x),\quad x_0<x<x_3,\quad x\neq x_1,x_2;$$

условиям согласования

$$\begin{gathered}\varphi_2(x_3)=\varphi_0(x_0)=0,\quad \varphi_k(x_{k+1})=\varphi_{k+1}(x_{k+1}),\quad k=0,1;\\ B(x_3)=C(x_0)=0;\\ r(x_k,y)=0,\quad k=-2,-1,0;\qquad q(x_k,y)=0,\quad k=3,4,5,\end{gathered}\tag{9}$$

где $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $\varphi_k(x)$, $k=0,1,2$, $r(x,y)$, $q(x,y)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ — *заданные непрерывные достаточно гладкие функции.*

Положив

$$V(x,y)=A(x)U(\alpha_1(x),y)-B(x)U(\alpha_1^2(x),y)+C(x)U(\alpha_2^2(x),y),\tag{10}$$

приведём уравнение (5) к системе

$$\begin{cases}\mathbf{L}V(x,y)\equiv V_{xx}(x,y)+\mathbf{H}(-y)V_{yy}(x,y)-\mathbf{H}(y)\mathbf{D}_{0y}^{\alpha}V(x,\xi)-\\ \qquad\qquad -\mathbf{H}(y-\tau)V(x,y-\tau)=0,\qquad (x,y)\in D;\\ A(x)U(\alpha_1(x),y)-B(x)U(\alpha_1^2(x),y)+\\ \qquad\qquad +C(x)U(\alpha_2^2(x),y)=V(x,y),\quad (x,y)\in D,\end{cases}$$

которую в терминах функций

$$V_k^{\pm}(x,y)=V(x,y),\quad (x,y)\in D_k^{\pm},\quad k=0,1,2,\tag{11}$$
$$U_k^{\pm}(x,y)=U(x,y),\quad (x,y)\in D_k^{\pm},\quad k=0,1,2,\tag{12}$$

с учетом (7), (8) можно записать в форме матричной системы:

$$\begin{cases}\mathbf{L}\overline{V}(x,y)\equiv \overline{V}_{xx}(x,y)+\mathbf{H}(-y)\overline{V}_{yy}(x,y)-\mathbf{H}(y)\mathbf{D}_{0y}^{\alpha}\overline{V}(x,\xi)-\\ \qquad\qquad -\mathbf{H}(y-\tau)\overline{V}(x,y-\tau)=0,\quad (x,y)\in D_0^{\pm}, & (13)\\ R(x)\overline{U}^{\pm}(x,y)-\overline{\Phi}(x,y)=\overline{V}(x,y),\qquad (x,y)\in D_0^{\pm}, & (14)\end{cases}$$

где

$$\overline{V}(x,y)=\big(V_0^{\pm}(x,y),V_1^{\pm}(\alpha_2(x),y),V_2^{\pm}(\alpha_2^2(x),y)\big)^{\top},\tag{15}$$
$$\overline{U}^{\pm}(x,y)=\big(U_0^{\pm}(x,y),U_1^{\pm}(\alpha_2(x),y),U_2^{\pm}(\alpha_2^2(x),y)\big)^{\top},\tag{16}$$
$$R(x)=\big(\overline{R}_0(x),\overline{R}_1(x),\overline{R}_2(x)\big)^{\top},\tag{17}$$
$$\overline{\Phi}(x,y)=\big(\Phi_0(x,y),\Phi_1(x,y),\Phi_2(x,y)\big)^{\top},\tag{18}$$

причём компоненты матрицы $R(x)$ из (17) и вектор-функции $\overline{\Phi}(x,y)$ из (18) имеют следующий вид:

$$\overline{R}_0(x) = (0,0,C(x)), \quad \overline{R}_1(x) = (A(\alpha_2(x)),0,0),$$
$$\overline{R}_2(x) = (-B(\alpha_2^2(x)), A(\alpha_2^2(x)), 0);$$

$$\Phi_0(x,y) = B(x)r(\alpha_1^2(x),y) - A(x)r(\alpha_1(x),y),$$
$$\Phi_1(x,y) = B(\alpha_2(x))r(\alpha_1(x),y) - C(\alpha_2(x))q(\alpha_2^3(x),y),$$
$$\Phi_2(x,y) = -C(\alpha_2^2(x))q(\alpha_2^4(x),y).$$

Если определитель $|R(x)| \neq 0$, $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, то единственное решение задачи T в области D в терминах функций (11), (12), (15), (16) может быть получено из (14) в форме

$$\overline{U}^{\pm}(x,y) = R^{-1}(x)\big(\overline{\Phi}(x,y) + \overline{V}(x,y)\big), \quad (x,y) \in D_0^{\pm}, \tag{19}$$

где обратная матрица

$$R^{-1}(x) = \big(\overline{R}_0^{-1}(x), \overline{R}_1^{-1}(x), \overline{R}_2^{-1}(x)\big)^{\top},$$

имеет компоненты

$$\overline{R}_0^{-1}(x) = |R(x)|^{-1}\big(0, C(x)A(\alpha_2^2(x)), 0\big),$$
$$\overline{R}_1^{-1}(x) = |R(x)|^{-1}\big(0, C(x)B(\alpha_2^2(x)), C(x)A(\alpha_2(x))\big),$$
$$\overline{R}_2^{-1}(x) = |R(x)|^{-1}\big(A(\alpha_2(x))A(\alpha_2^2(x)), 0, 0\big)$$

и

$$|R(x)| = C(x)A(\alpha_2(x))A(\alpha_2^2(x)),$$

а для $\overline{V}(x,y)$ согласно (6)–(9) и равенству (10) должна быть решена

Задача $\mathrm{T}_{\overline{V}}$. *Найти в области $D_0 = D_0^+ \cup D_0^- \cup I_0$ регулярное решение $\overline{V}(x,y)$ уравнения (13), удовлетворяющее краевым условиям*

$$\overline{V}(x_0,y) = \overline{V}(x_1,y) = 0, \quad y \geqslant 0, \tag{20}$$
$$\overline{V}(x,y)\big|_{\sigma_0: y=-\rho_0(x)} = R(x)\overline{\varphi}(x) - \overline{\Phi}(x,-\rho_0(x)), \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1; \tag{21}$$

условиям сопряжения

$$\lim_{y\to 0-} \overline{V}(x,y) = \lim_{y\to 0+} \boldsymbol{D}_{0y}^{\alpha-1}\overline{V}(x,\xi) = R(x)\overline{\omega}(x) - \overline{\Phi}(x,0), \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \tag{22}$$
$$\lim_{y\to 0-} \overline{V}_y(x,y) = \lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}\boldsymbol{D}_{0y}^{\alpha}\overline{V}(x,\xi) = R(x)\overline{\nu}(x) - \overline{\Phi}_y(x,0), \ x_0 < x < x_1, \tag{23}$$
$$\max\big(R(x)\overline{\nu}(x) - \overline{\Phi_y}(x,0)\big) < \frac{1}{\Gamma(\alpha)}, \quad 0 < \alpha < 1;$$

условию согласования

$$\overline{V}(x_0,x_0) = 0,$$

где

$$\overline{\varphi}(x) = \big(\varphi_0(x), \varphi_1(\alpha_2(x)), \varphi_2(\alpha_2^2(x))\big)^\top$$

— заданная непрерывная достаточно гладкая вектор-функция, а

$$\overline{\omega}(x) = \big(\omega(x), \omega(\alpha_2(x)), \omega(\alpha_2^2(x))\big)^\top, \ \ \overline{\nu}(x) = \big(\nu(x), \nu(\alpha_2(x)), \nu(\alpha_2^2(x))\big)^\top \tag{24}$$

— вектор-функции, подлежащие определению.

2. Однозначная разрешимость задачи T.

Теорема 1. *Если* $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x) \in \mathbb{C}[x_0, x_3] \cap \mathbb{C}^2(x_0, x_3)$, $\varphi_k(x) \in \mathbb{C}[x_k, x_{k+1}] \cap \mathbb{C}^2(x_k, x_{k+1})$, $k = 0, 1, 2$; $r(x, y) \in \mathbb{C}(\overline{D_{-2} \cup D_{-1}}) \cap \mathbb{C}^2(D_{-2} \cup D_{-1})$; $q(x, y) \in \mathbb{C}(\overline{D_3 \cup D_4}) \cap \mathbb{C}^2(D_3 \cup D_4)$ *абсолютно интегрируемы на своих промежутках*; $B(x_3) = C(x_0) = 0$, $\varphi_0(x_0) = \varphi_2(x_3) = 0$, $\varphi_k(x_{k+1}) = \varphi_{k+1}(x_{k+1})$, $k = 0, 1$; $r(x_k, y) = 0$, $k = -2, -1, 0$; $q(x_k, y) = 0$, $k = 3, 4, 5$, *то существует единственное решение задачи T.*

Доказательство.

2.1. Единственность решения задачи T для уравнения (5) *в области D* следует из того, что однородная задача T имеет тривиальное решение $\overline{U}^{\pm}(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D}_0^{\pm}$ при условии, что однородная задача $\mathrm{T}_{\overline{V}}$ имеет в области $\overline{D}_0^{\pm}$ тривиальное решение $\overline{V}(x, y) \equiv 0$.

Доказательство этого факта основано на установлении знакоопределенности интеграла

$$\overline{\beta} = \int_{x_0}^{x_1} \big[R(x)\overline{\omega}(x) - \overline{\Phi}(x, 0)\big]\big[R(x)\overline{\nu}(x) - \overline{\Phi}_y(x, 0)\big] dx.$$

Лемма 1. *Если* $\overline{V}(x, y)$ *— регулярное решение уравнения* (13) *в области* D_0^- *из класса* $\mathbb{C}(\overline{D}_0^-) \cap \mathbb{C}^2(D_0^-)$, *обращающееся в нуль на* $y = -\rho_0(x)$, $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, *то*

$$\overline{\beta} \geqslant 0 \tag{25}$$

и

$$\overline{\beta} = \iint_{D_0^-} \big[(\overline{V}_x^-(x, y))^2 + (\overline{V}_y^-(x, y))^2\big] dx dy. \tag{26}$$

Доказательство леммы 1 для уравнения

$$\mathbf{L}\overline{V}(x, y) \equiv \overline{V}_{xx}^-(x, y) + \overline{V}_{yy}^-(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D_0^-, \tag{13_1}$$

следует из тождества

$$\overline{V}^-(x, y)\mathbf{L}\overline{V}(x, y) \equiv \big(\overline{V}^-(x, y)\overline{V}_x^-(x, y)\big)_x + \big(\overline{V}^-(x, y)\overline{V}_y^-(x, y)\big)_y -$$
$$- \big(\overline{V}_x^-(x, y)\big)^2 - \big(\overline{V}_y^-(x, y)\big)^2 = 0, \quad (x, y) \in D_0^-,$$

интегрируя которое по области $D_{0\varepsilon}^- = \{(x, y) : x_0' < x < x_1', \rho_0(x) < y < -\varepsilon\}$, где x_0', x_1' — корни уравнения $\rho_0(x) = \varepsilon$, $0 < \varepsilon \equiv \mathrm{const}$, применяя формулу

Грина [8, с. 541–544], в пределе при $\varepsilon \to 0$ на основании (22), (23) и регулярности решения $\overline{V}^{-}(x,y)$ получим (25), (26). Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Если $\overline{V}(x,y)$ — регулярное решение уравнения* (13) *в области D_0^+, обращающееся в нуль при $x = x_k$, $k = 0, 1$, $y \geqslant 0$, то $\overline{\beta} \leqslant 0$ и*

$$\overline{\beta} = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^{x_1} \Big[\frac{d}{dx}\big(R(x)\overline{\omega}(x) - \overline{\Phi}(x,0)\big)\Big]^2 dx. \tag{27}$$

Доказательство. В области D_0^+ из уравнения

$$\mathbf{L}\overline{V}(x,y) \equiv \overline{V}^{+}_{xx}(x,y) - \mathbf{D}^{\alpha}_{0y}\overline{V}^{+}(x,\xi) - \\ -\mathbf{H}(y-\tau)\overline{V}(x,y-\tau) = 0, \quad (x,y) \in D_0^+, \tag{13_2}$$

в силу регулярности решения $\overline{V}^{+}(x,y)$ и условий (22)–(24) при $y \to 0+$ найдём выражение

$$\Gamma(\alpha)\big[R(x)\overline{\nu}(x) - \overline{\Phi}_y(x,0)\big] = \frac{d^2}{dx^2}\big[R(x)\overline{\omega}(x) - \overline{\Phi}(x,0)\big], \quad x_0 < x < x_1, \tag{28}$$

являющееся функциональным соотношением между $\overline{\omega}(x)$ и $\overline{\nu}(x)$, привнесенным из D_0^+ на линию изменения типа $I_0 = \{(x,y) : x_0 < x < x_1, y = 0\}$.

Тогда с учётом (28) и (9)

$$\overline{\beta} = \int_{x_0}^{x_1} \big[R(x)\overline{\omega}(x) - \overline{\Phi}(x,0)\big]\big[R(x)\overline{\nu}(x) - \overline{\Phi}_y(x,0)\big]dx = \\ = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^{x_1} \big[R(x)\overline{\omega}(x) - \overline{\Phi}(x,0)\big] \frac{d^2}{dx^2}\big[R(x)\overline{\omega}(x) - \overline{\Phi}(x,0)\big]dx = \\ = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^{x_1} \Big[\frac{d}{dx}\big(R(x)\overline{\omega}(x) - \overline{\Phi}(x,0)\big)\Big]^2 dx \leqslant 0. \ \square$$

Из лемм 1 и 2 в силу (25), (27) имеем $\overline{\beta} = 0$. Поэтому на основании регулярности решения из положительной определенности интеграла (26) следует

$$\overline{V}^{-}(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in \overline{D_0^-}. \tag{29}$$

Кроме того, в силу $\overline{\beta} = 0$ и положительной определенности интеграла в (27) имеем

$$\frac{d}{dx}\big[R(x)\overline{\omega}(x) - \overline{\Phi}(x,0)\big] \equiv 0, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1.$$

Значит, $R(x)\overline{\omega}(x) - \overline{\Phi}(x,0) \equiv \mathrm{const}$, $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, и на основании (22)

$$\lim_{y \to 0+} \mathbf{D}^{\alpha-1}_{0y}\overline{V}^{+}(x,\xi) \equiv \mathrm{const}, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1.$$

Регулярность решения $\overline{V}^{+}(x,y)$ и однородность условий приводит к утверждению

$$\lim_{y \to 0+} \mathbf{D}^{\alpha-1}_{0y}\overline{V}^{+}(x,\xi) = 0, \quad R(x)\overline{\omega}(x) - \overline{\Phi}(x,0) = 0, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1. \tag{30}$$

Следовательно, в силу (28) и (23) получаем

$$R(x)\overline{\nu}(x) - \overline{\Phi}(x,0) = 0, \quad \lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}\mathbf{D}^{\alpha}_{0y}\overline{V}^{+}(x,\xi) = 0, \quad x_0 < x < x_1. \tag{31}$$

Лемма 3. *Однородная смешанная задача* (13_2), (20), (30) *в области* D_0^+ *имеет тривиальное решение, то есть*

$$\overline{V}^{+}(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in \overline{D}_0^{+}. \tag{32}$$

Доказательство. Пусть

$$D_0^+ = \{(x,y) : x_0 < x < x_1, y > 0\} = \cup_{k=0}^{+\infty} D_{k_0}^+,$$

где

$$D_{k_0}^+ = \{(x,y) : x_0 < x < x_1, k\tau < y < (k+1)\tau\}.$$

Уравнение (13_2) в области $D_{k_0}^+$ запишем в форме

$$\mathbf{L}\overline{V}(x,y) \equiv \overline{V}^{+}_{xx}(x,y) - \mathbf{D}^{\alpha}_{k\tau,y}\overline{V}^{+}(x,\xi) - \mathbf{D}^{\alpha}_{0,k\tau}\overline{V}^{+}(x,\xi) - \\ - \mathbf{H}(y-\tau)\overline{V}^{+}(x,y-\tau) = 0, \quad (x,y) \in D_{k_0}^+$$

и проинтегрируем по области

$$D_{k_0\varepsilon}^+ = \{(x,y) : x_0 < x < x_1, k\tau + \varepsilon < y < (k+1)\tau - \varepsilon\}, \quad 0 < \varepsilon \equiv \mathrm{const}$$

тождество

$$\big(\mathbf{D}^{\alpha-1}_{k\tau,y}\overline{V}^{+}(x,\xi)\big)\mathbf{L}\overline{V}(x,y) \equiv \big(\overline{V}^{+}_{x}(x,y)\mathbf{D}^{\alpha-1}_{k\tau,y}\overline{V}^{+}(x,\xi)\big)_x - \\ - \frac{1}{2}\big((\mathbf{D}^{\alpha-1}_{k\tau,y}\overline{V}^{+}(x,\xi))^2\big)_y - \overline{V}^{+}_{x}(x,y)\mathbf{D}^{\alpha-1}_{k\tau,y}\overline{V}^{+}_{x}(x,\xi) - \\ - \mathbf{H}(y-\tau)\overline{V}^{+}(x,y-\tau)\mathbf{D}^{\alpha-1}_{k\tau,y}\overline{V}^{+}(x,\xi) - \\ - \big(\mathbf{D}^{\alpha-1}_{k\tau,y}\overline{V}^{+}(x,\xi)\big)\mathbf{D}^{\alpha}_{0,k\tau}\overline{V}^{+}(x,\xi) = 0.$$

Применяя формулу Грина [8, с. 541–544], однородность граничных условий (20) и регулярность решения задачи $\mathrm{T}_{\overline{V}}$, в пределе при $\varepsilon \to 0$ получим

$$\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\big(\mathbf{D}^{\alpha-1}_{k\tau,y}\overline{V}^{+}(x,\xi)\big)^2\big|_{y=k\tau}dx - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\big(\mathbf{D}^{\alpha-1}_{k\tau,y}\overline{V}^{+}(x,\xi)\big)^2\big|_{y=(k+1)\tau}dx - \\ - \iint_{D_{k_0}^+}\Big[\overline{V}^{+}_{x}(x,y)\mathbf{D}^{\alpha-1}_{k\tau,y}\overline{V}^{+}_{x}(x,\xi) + \big(\mathbf{D}^{\alpha-1}_{k\tau,y}\overline{V}^{+}(x,\xi)\big)\mathbf{D}^{\alpha}_{0,k\tau}\overline{V}^{+}(x,\xi) + \\ + \mathbf{H}(y-\tau)\overline{V}^{+}(x,y-\tau)\mathbf{D}^{\alpha-1}_{k\tau,y}\overline{V}^{+}(x,\xi)\Big]dxdy = 0, \quad (x,y) \in D_{k_0}^+. \tag{33}$$

Первый двойной интеграл в (33) положительно определён, поскольку аналогично [9, с. 43] с учётом (3) можно показать, что

$$\iint_{D^+_{k_0}} \overline{V}^+_x(x,y)\mathbf{D}^{\alpha-1}_{k\tau,y}\overline{V}^+_x(x,\xi)dxdy =$$
$$= \frac{1}{\pi}\sin\Big(\frac{\pi\alpha}{2}\Big)\int_{x_0}^{x_1}dx\int_0^{+\infty}s^{\alpha-1}\Bigg[\bigg(\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\overline{V}^+_x(x,y)\cos(sy)dy\bigg)^2 +$$
$$+\bigg(\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\overline{V}^+_x(x,y)\sin(sy)dy\bigg)^2\Bigg]ds \geqslant 0. \quad (34)$$

Следовательно, при $k = 0$, то есть в области $D^+_{0_0} = \{(x,y) : x_0 < x < x_1, 0 < y < \tau\}$, из (33) и (31), (34) приходим к положительно определенной форме

$$\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\big(\mathbf{D}^{\alpha-1}_{0y}\overline{V}^+(x,\xi)\big)^2\big|_{y=\tau}dx + \iint_{D^+_{0_0}}\overline{V}^+_x(x,y)\mathbf{D}^{\alpha-1}_{0y}\overline{V}^+_x(x,\xi)dxdy = 0,$$

которая позволяет утверждать, что

$$\lim_{y\to\tau}\mathbf{D}^{\alpha-1}_{0y}\overline{V}^+(x,\xi) = 0, \tag{35}$$

и в силу регулярности решения

$$\overline{V}^+(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in \overline{D}_{0_0}. \tag{36}$$

Аналогично, при $k = 1$, то есть в области $D^+_{1_0} = \{(x,y) : x_0 < x < x_1, \tau < y < 2\tau\}$, из (33) и (35), (36) приходим к положительно определенной форме

$$\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\big(\mathbf{D}^{\alpha-1}_{\tau,y}\overline{V}^+(x,\xi)\big)^2\big|_{y=2\tau}dx + \iint_{D^+_{1_0}}\overline{V}_x(x,y)\mathbf{D}^{\alpha-1}_{\tau,y}\overline{V}^+_x(x,\xi)dxdy = 0,$$

которая позволяет утверждать, что

$$\lim_{y\to 2\tau}\mathbf{D}^{\alpha-1}_{\tau,y}\overline{V}^+(x,\xi) = 0,$$

и в силу регулярности решения

$$\overline{V}^+(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in \overline{D}^+_{1_0}.$$

Продолжая этот процесс, на k-том шаге, т.е. в области $D^+_{k_0} = \{(x,y) : x_0 < x < x_1, k\tau < y < (k+1)\tau\}$, придём к утверждениям

$$\lim_{y\to(k+1)\tau}\mathbf{D}^{\alpha-1}_{k\tau,y}\overline{V}^+(x,\xi) = 0, \overline{V}^+(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in \overline{D}^+_{k_0}, \quad k = 2, 3, \ldots.$$

Таким образом,
$$\overline{V}^+(x,y) \equiv 0, (x,y) \in \overline{D}^+_0$$
и лемма 3 доказана. □

Равенства (29), (32) приводят к выводу, что $\overline{V}(x,y) = 0$, $(x,y) \in \overline{D}_0$.

Единственность решения задачи $T_{\overline{V}}$ доказана.

Из (19) в силу $\overline{V}(x,y) \equiv 0, (x,y) \in \overline{D}_0$ следует тривиальность решения однородной задачи T в области $\overline{D}_0$, то есть *единственность решения задачи T.*

2.2. Нахождение решения $\overline{V}^-(x,y)$ задачи $T_{\overline{V}}$ в области D_0^-.

Лемма 4. *Если $\overline{\omega}(x), \overline{\varphi}(x) \in \mathbb{C}[x_0,x_1] \cap \mathbb{C}^2(x_0,x_1), \overline{\omega}(x_0) = \overline{\omega}(x_1) = \overline{\varphi}(x_0) = = \overline{\varphi}(x_1) = 0$, то существует единственное решение $\overline{V}^-(x,y) \in \mathbb{C}(\overline{D_0^-}) \cap \mathbb{C}^2(D_0^-)$ задачи Дирихле (13_1), (20)–(22) вида*

$$\overline{V}^-(x,y) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\boldsymbol{P}_x^{2i\rho_0(x)m} \boldsymbol{P}_x^{-iy} - \boldsymbol{P}_x^{2i\rho_0(x)(m+1)} \boldsymbol{P}_x^{iy}\right) \left[R(x)\overline{\omega}(x) - \overline{\Phi}(x,0)\right] +$$
$$+ \sum_{m=0}^{+\infty} \boldsymbol{P}_x^{2i\rho_0(x)m} \left(\boldsymbol{P}_x^{i(\rho_0(x)+y)} - \boldsymbol{P}_x^{i(\rho_0(x)-y)}\right) \left[R(x)\overline{\varphi}(x) - \overline{\Phi}(x,-\rho_0(x))\right]. \quad (37)$$

Доказательство. Решение задачи Дирихле для уравнения (13_1) в области D_0^- будем искать с помощью непосредственно проверяемого общего решения

$$\overline{V}^-(x,y) = \overline{C}_1(x+iy) + \overline{C}_2(x-iy), \quad (38)$$

где $\overline{C}_1(t), \overline{C}_2(t)$ — дважды непрерывно дифференцируемые произвольные вектор-функции.

Используя условия (21), (22) в (38), аналогично [10] найдём вектор-функции

$$\overline{C}_1(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}_x^{2i\rho_0(x)m} \left[R(x)\overline{\omega}(x) - \overline{\Phi}(x,0)\right] -$$
$$- \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}_x^{2i\rho_0(x)m} \left[\mathbf{P}_x^{i\rho_0(x)} \left(R(x)\overline{\varphi}(x) - \overline{\Phi}(x,-\rho_0(x))\right)\right],$$

$$\overline{C}_2(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}_x^{2i\rho_0(x)m} \left[\mathbf{P}_x^{i\rho_0(x)} \left(R(x)\overline{\varphi}(x) - \overline{\Phi}(x,-\rho_0(x))\right)\right] -$$
$$- \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}_x^{2i\rho_0(x)(m+1)} \left[R(x)\overline{\omega}(x) - \overline{\Phi}(x,0)\right],$$

которые после подстановки в (38) приведут к решению (37) задачи Дирихле (13_1), (20)–(22). Лемма 4 доказана. □

Найдём *функциональное соотношение* между $\overline{\omega}(x)$ и $\overline{\nu}(x)$, привнесенное из D_0^- на линию изменения типа $I_0 = \{(x,y) : x_0 < x < x_1, y = 0\}$.

Условие (23) и решение (37) позволяют записать

$$R(x)\overline{\nu}(x)-\overline{\Phi}_y(x,0)=-i\frac{d}{dx}\big[R(x)\overline{\omega}(x)-\overline{\Phi}(x,0)\big]+$$
$$+2i\sum_{m=0}^{+\infty}\mathbf{P}_x^{2i\rho_0(x)m}\frac{d}{dx}\big[R(x)\overline{\omega}(x)-\overline{\Phi}(x,0)\big]-$$
$$-2i\sum_{m=0}^{+\infty}\mathbf{P}_x^{2i\rho_0(x)m}\Big(\mathbf{P}_x^{i\rho_0(x)}\frac{d}{dx}\big[R(x)\overline{\varphi}(x)-\overline{\Phi}(x,-\rho_0(x))\big]\Big),\quad x_0\leqslant x\leqslant x_1,$$

т.е.

$$(1-\mathbf{P}_x^{2i\rho_0(x)})(R(x)\overline{\nu}(x)-\overline{\Phi}_y(x,0))=$$
$$=i(1+\mathbf{P}_x^{2i\rho_0(x)})\Big(\frac{d}{dx}\big(R(x)\overline{\omega}(x)-\overline{\Phi}(x,0)\big)\Big)-$$
$$-2i\mathbf{P}_x^{i\rho_0(x)}\Big(\frac{d}{dx}\big(R(x)\overline{\varphi}(x)-\overline{\Phi}(x,-\rho_0(x))\big)\Big),\quad x_0<x<x_1. \tag{39}$$

Полученное выражение является искомым функциональным соотношением.

2.3. Нахождение решения $\overline{V}^+(x,y)$ задачи $T_{\overline{V}}$ в области D_0^+.

Лемма 5. *Если $\overline{\omega}(x)\in\mathbb{C}[x_0,x_1]\cap\mathbb{C}^2(x_0,x_1)$, $\overline{\omega}(x_0)=\overline{\omega}(x_1)=0$, то существует единственное регулярное решение $\overline{V}^+(x,y)$ смешанной задачи (13_2), (20), (22) в области D_0^+ вида*

$$\overline{V}^+(x,y)=\int_{x_0}^{x_1}G(x,y,\xi)\big[R(\xi)\overline{\omega}(\xi)-\overline{\Phi}(\xi,0)\big]d\xi, \tag{40}$$

где

$$G(x,y,\xi)=\frac{2}{x_1}\sum_{n=1}^{+\infty}S_n(y)\sin\lambda_n x\sin\lambda_n\xi \tag{41}$$

— фундаментальное решение задачи (13_2), (20), (22) $\lambda_n=n\pi/x_1$, а

$$S_n(y)=\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\mathbf{H}(y-m\tau)(y-m\tau)^{\alpha(m+1)-1}E_{\alpha,\alpha(m+1)}^{m+1}(-\lambda_n^2(y-m\tau)^\alpha), \tag{42}$$

причём $E_{\alpha,\beta}^\rho(t)$ — обобщенная функция типа Миттаг—Леффлера [11, с. 45, 67], определяемая рядом

$$E_{\alpha,\beta}^\rho(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\rho)_k t^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!}=\frac{1}{\Gamma(\rho)}H_{12}^{11}\big[-t\big|_{(0,1),(1-\beta,\alpha)}^{(1-\rho,1)}\big], \tag{43}$$

$(\rho)_k$ — символ Похгаммера [10, с. 24], а $H_{p,q}^{m,n}\big[z\big|_{(b_q,B_q)}^{(a_p,A_p)}\big]$ — функция Фокса [11, с. 54].

Доказательство. Решение задачи (13_2), (20), (22) будем искать в виде ряда Фурье

$$\overline{V}^+(x,y)=\sum_{n=1}^{+\infty}r_n(y)\sin\lambda_n x,\quad (x,y)\in\overline{D}_0^+, \tag{44}$$

где $r_n(y)$ — функция, подлежащая определению.

Разложимость начальной функции $\overline{\omega}(x)$ в ряд Фурье по синусам является необходимым условием разрешимости задачи (13_2), (20), (22) в классе функций, определяемых рядом (44). Такое представление имеет место тогда и только тогда, когда функция $\overline{\omega}(x)$ непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывные производные второго порядка и $\overline{\omega}(x_0) = \overline{\omega}(x_1) = 0$.

Считая, что ряд (44) равномерно сходится в $\overline{D}_0^+$, равномерно сходятся ряды, полученные двукратным дифференцированием по x и взятием дробной производной по y порядка $0 < \alpha < 1$ в D_0^+, и подставляя (44) в (13_2), (20), (22), для определения $r_n(y)$ придем к задаче

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{0y}^{\alpha} r_n(\xi) + \lambda_n^2 r_n(y) + \mathbf{H}(y-\tau) r_n(y-\tau) = 0, \quad y \geqslant 0, & (45) \\ \lim\limits_{y \to 0+} \mathbf{D}_{0y}^{\alpha-1} r_n(\xi) = \gamma_n, & (46) \end{cases}$$

где

$$\gamma_n = \frac{2}{x_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[R(x)\overline{\omega}(x) - \overline{\Phi}(x,0) \right] \sin \lambda_n x dx.$$

Будем искать решение $r_n(y)$ задачи (45), (46) с помощью интегрального преобразования Лапласа [12, с. 30].

Пусть

$$r_n(y) \to \int_0^{+\infty} e^{-py} r_n(y) dy = \overline{r}_n(p)$$

— изображение по Лапласу функции $r_n(y)$, причем

$$\mathbf{H}(y-\tau) r_n(y-\tau) \to e^{-p\tau} \overline{r}_n(p),$$

а [11, с. 84]

$$\mathbf{D}_{0y}^{\alpha} r_n(\xi) \to p^{\alpha} \overline{r}_n(p) - \lim_{y \to 0+} \mathbf{D}_{0y}^{\alpha-1} r_n(\xi) = p^{\alpha} \overline{r}_n(p) - \gamma_n.$$

Применяя к (45), (46) преобразование Лапласа, получим операторное уравнение

$$(p^{\alpha} + \lambda_n^2 + e^{-p\tau}) \overline{r}_n(p) = \gamma_n,$$

которое даёт операторное решение

$$\overline{r}_n(p) = \frac{\gamma_n}{p^{\alpha} + \lambda_n^2 + e^{-p\tau}} = \gamma_n \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m e^{-mp\tau}}{(p^2 + \lambda_n^2)^{m+1}}, \tag{47}$$

так как $\left| \dfrac{e^{-p\tau}}{p^2 + \lambda_n^2} \right| < 1$ при достаточно больших p.

Учитывая, что [11, с. 47]

$$\frac{1}{(p^{\alpha} + \lambda_n^2)^{m+1}} \leftarrow y^{\alpha(m+1)-1} E_{\alpha, \alpha(m+1)}^{m+1}(-\lambda_n^2 y^{\alpha}), \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

по теореме о запаздывании оригинала найдём

$$\frac{e^{-mp\tau}}{(p^\alpha+\lambda_n^2)^{m+1}} \leftarrow (y-m\tau)^{\alpha(m+1)-1}\times$$
$$\times E^{m+1}_{\alpha,\alpha(m+1)}(-\lambda_n^2(y-m\tau)^\alpha)\mathbf{H}(y-m\tau), \quad m=0,1,2,\ldots. \tag{48}$$

Таким образом, для изображения $\overline{r}_n(p)$ операторного решения (47) уравнения (45) имеем (на основании (47), (48)) оригинал $r_n(y)=\gamma_n S_n(y)$, $y\geqslant 0$, где $S_n(y)$ определяется равенством (42).

Воспользовавшись для (43) асимптотикой H-функции Фокса [11, с. 62] при больших значениях аргумента

$$H^{m,n}_{p,q}\Big[z\Big|^{(a_p,A_p)}_{(b_q,B_q)}\Big]=0(z^\delta), \quad \delta=\min_{1\leqslant j\leqslant n}\Big[\frac{a_j-1}{A_j}\Big],$$

получим для ряда $S_n(y)$ из (43) абсолютно и равномерно сходящийся при всех y мажорирующий ряд

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\mathbf{H}(y-m\tau)}{\lambda_n^{2(m+1)}\Gamma(m+1)(y-m\tau)},$$

что позволяет доказать абсолютную и равномерную сходимость ряда (41) в $\overline{D}_0^+$ и, значит, $\overline{V}^+(x,y)\in\mathbb{C}(\overline{D}_0^+)$.

Аналогично можно показать, что ряды, полученные из (41) двукратным почленным дифференцированием по x и взятием почленно дробной производной по у порядка α, сходятся абсолютно и равномерно в D_0^+, то есть $\overline{V}^+(x,y)$ удовлетворяет уравнению (13_2), начальному и граничным условиям (20), (22) и является единственным регулярным решением задачи $\mathrm{T}_{\overline{V}}$ в D_0^+. Лемма 5 доказана. $\square$

Функциональное соотношение (28) между $\overline{\omega}(x)$ и $\overline{\nu}(x)$, привнесенное из D_0^+ на линию изменения типа $I_0=\{(x,y): x_0<x<x_1, y=0\}$, можно найти из (40), учитывая условие (23).

Функциональное соотношение (26) представимо в интегральной форме

$$\frac{d}{dx}\big[R(x)\overline{\omega}(x)-\overline{\Phi}(x,0)\big]=\int_{x_0}^{x_1}M(x,\xi)\big[R(\xi)\overline{\nu}(\xi)-\overline{\Phi}_y(\xi,0)\big]d\xi, \tag{28$'$}$$

где

$$M(x,\xi)=\frac{\Gamma(\alpha)}{x_1}\begin{cases}\xi, & x\geqslant\xi,\\ \xi-x_1, & \xi\geqslant x.\end{cases}$$

2.4. Вопрос существования решения задачи $T_{\overline{V}}$ в области D_0 в силу условий сопряжения (22), (23) сводится к разрешимости системы функциональных соотношений (28$'$), (39), то есть к разностному интегральному уравнению

$$(1-\mathbf{P}_x^{2i\rho_0(x)})\big(R(x)\overline{\nu}(x)-\overline{\Phi}_y(x,0)\big)=$$
$$=i(1+\mathbf{P}_x^{2i\rho_0(x)})\int_{x_0}^{x_1}M(x,\xi)\big[R(\xi)\overline{\nu}(\xi)-\overline{\Phi}_y(\xi,0)\big]d\xi-$$

$$-2i\mathbf{P}_x^{i\rho_0(x)}\Big(\frac{d}{dx}\big(R(x)\overline{\varphi}(x)-\overline{\Phi}(x,-\rho_0(x))\big)\Big),\quad x_0<x<x_1,$$

которое можно представить в виде

$$R(x)\overline{\nu}(x)-\overline{\Phi}_y(x,0)=\mathbf{P}_x^{2i\rho_0(x)}\frac{1+iA}{1-iA}\big(R(x)\overline{\nu}(x)-\overline{\Phi}_y(x,0)\big)-$$
$$-\frac{2i}{1-iA}\mathbf{P}_x^{i\rho_0(x)}\Big(\frac{d}{dx}\big(R(x)\overline{\varphi}(x)-\overline{\Phi}(x,-\rho_0(x))\big)\Big),\quad x_0<x<x_1,\quad (49)$$

где

$$A=\int_{x_0}^{x_1}M(x,\xi)[\cdots]d\xi.$$

Так как $\|A\|<1$, из (49) будем иметь

$$R(x)\overline{\nu}(x)-\overline{\Phi}_y(x,0)=-2i\sum_{m=0}^{\infty}B^mC\Big(\frac{d}{dx}\big(R(x)\overline{\varphi}(x)-\overline{\Phi}(x,-\rho_0(x))\big)\Big),\quad (50)$$

где

$$B=\sum_{n=0}^{\infty}(iA)^n\mathbf{P}_x^{2i\rho_0(x)}(1+iA),\quad C=\sum_{n=0}^{\infty}(iA)^nP_x^{i\rho_0(x)}.$$

В силу свойств функций $\overline{\varphi}(x)$, входящих в (50), выполняется включение

$$R(x)\overline{\nu}(x)-\overline{\Phi}_y(x,0)\in\mathbb{C}^1(x_0,x_1),$$

а на основании (39) выполняется

$$R(x)\overline{\omega}(x)-\overline{\Phi}(x,0)\in\mathbb{C}^2(x_0,x_1)\cap\mathbb{C}[x_0,x_1].$$

Подставляя найденные значения $R(x)\overline{\nu}(x)-\overline{\Phi}_y(x,0), R(x)\overline{\omega}(x)-\overline{\Phi}(x,0)$ в (37), (40), получим окончательный вид решений $\overline{V}^-(x,y)$ и $\overline{V}^+(x,y)$ задачи $\mathrm{T}_{\overline{V}}$ в области D_0^- и D_0^+, то есть искомую функцию $\overline{V}(x,y)$ задачи $\mathrm{T}_{\overline{V}}$ в области $D_0\equiv D_0^-\cup D_0^+\cup I_0$.

Теорема 1 доказана. $\square$

Конкурирующие интересы. Мы заявляем, что у нас нет конфликта интересов в авторстве и публикации этой статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Муравник А. Б. О задаче Коши для некоторых дифференциально-разностных уравнений параболического типа // *Докл. РАН*, 2002. Т. 385, № 5. С. 604–607.
2. Зарубин А. Н. Задача Трикоми для функционально-дифференциального опережающе-запаздывающего уравнения Лаврентьева–Бицадзе // *Дифференц. уравнения*, 2017. Т. 53, № 8. С. 1329–1339. doi: 10.1134/S0374064117100090.
3. Бицадзе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* М.: Наука, 1981. 448 с.
4. Зарубин А. Н. *Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом.* Орел: Орловск. гос. ун-т, 1999. 255 с.
5. Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д., Свешников А. Г. О существовании режима установившихся колебаний в задаче Коши для уравнения составного типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2001. Т. 41, № 4. С. 641–647.
6. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* М.: Наука, 1971. 1108 с.
8. Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. *Курс математического анализа.* М.: Наука, 1988. 816 с.
9. Нахушев А. М. *Элементы дробного исчисления и их применения.* Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2000. 253 с.
10. Зарубин А. Н. Краевая задача для уравнения смешанного типа с опережающе-запаздыващим аргументом // *Дифференц. уравнения*, 2012. Т. 48, № 10. С. 1404–1411.
11. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and applications of fractional differential equations* / North-Holland Mathematics Studies. vol. 204. Amsterdam: Elsevier Science B.V., 2006. xvi+523 pp. doi: 10.1016/S0304-0208(06)80001-0.
12. Диткин В. А., Прудников А. П. *Интегральные преобразования и операционное исчисление.* М.: Наука, 1974. 521 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 1, pp. 20–36
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1648

MSC: 35R10, 35M13, 35A01, 35A02

Boundary value problem for mixed-compound equation with fractional derivative, functional delay and advance

A. N. Zarubin, E. V. Chaplygina

Orel State University named after I. S. Turgenev,
95, Komsomolskaya st., Orel, 302026, Russian Federation

Abstract

We study the Tricomi problem for the functional-differential mixed-compound equation $LQu(x,y) = 0$ in the class of twice continuously differentiable solutions. Here L is a differential-difference operator of mixed parabolic-elliptic type with Riemann–Liouville fractional derivative and linear shift by y. The Q operator includes multiple functional delays and advances $a_1(x)$ and $a_2(x)$ by x. The functional shifts $a_1(x)$ and $a_2(x)$ are the orientation preserving mutually inverse diffeomorphisms. The integration domain is $D = D^+ \cup D^- \cup I$. The "parabolicity" domain D^+ is the set of (x,y) such that $x_0 < x < x_3$, $y > 0$. The ellipticity domain is $D^- = D_0^- \cup D_1^- \cup D_2^-$, where D_k^- is the set of (x,y) such that $x_k < x < x_{k+1}$, $-\rho_k(x) < y < 0$, and $\rho_k = \sqrt{a_1^k(x)(x_1 - a_1^k(x))}$, $\rho_k(x) = \rho_0(a_1^k(x))$, $k = 0, 1, 2$. A general solution to this Tricomi problem is found. The uniqueness and existence theorems are proved.

Keywords: mixed-compound equation, fractional derivative, difference operator, Tricomi problem.

Received: 26th September, 2018 / Revised: 23rd January, 2019 /
Accepted: 27th January, 2019 / First online: 28th March, 2019

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Research Article

Please cite this article in press as:
Zarubin A. N., Chaplygina E. V. Boundary value problem for mixed-compound equation with fractional derivative, functional delay and advance, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 1, pp. 20–36. doi: 10.14498/vsgtu1648 (In Russian).

Authors' Details:

Alexandr N. Zarubin https://orcid.org/0000-0002-0611-5752
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Department; Dept. of Mathematical Analysis and Differential Equations; e-mail: matdiff@yandex.ru

Elena V. Chaplygina https://orcid.org/0000-0002-7553-0466
Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Dept. of Mathematical Analysis and Differential Equations; e-mail: lena260581@yandex.ru

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Muravnik A. B. On the Cauchy problem for differential-difference equations of the parabolic type, *Dokl. Math.*, 2002, vol. 66, no. 1, pp. 107–110.
2. Zarubin A. N. Tricomi problem for a functional-differential advanced-retarded Lavrent'ev–Bitsadze equation, *Differ. Equ.*, 2017, vol. 53, no. 10, pp. 1329–1339. doi: 10.1134/S0012266117100093.
3. Bitsadze A. V. *Nekotorye klassy uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Some classes of partial differential equations]. Moscow, Nauka, 1981, 448 pp. (In Russian)
4. Zarubin A. N. *Uravneniia smeshannogo tipa s zapazdyvaiushchim argumentom* [Equations of mixed type with retarded argument]. Orel, Orel State Univ., 1999, 255 pp. (In Russian)
5. Korpusov M. O., Pletner Yu. D. Sveshnikov A. G. On the existence of a steady-state oscillation mode in the Cauchy problem for a composite-type equation, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2001, vol. 41, no. 4.
6. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poriadka i nekotorye ikh prilozheniia* [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]. Minsk, Nauka i tekhnika, 1987, 688 pp. (In Russian)
7. Gradshtein I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, riadov i proizvedenii* [Tables of integrals, sums, series and products]. M., Nauka, 1971, 1108 pp. (In Russian)
8. Ter-Krikorov A. M., Shabunin M. I. *Kurs matematicheskogo analiza* [A course of mathematical analysis]. Moscow, Nauka, 1988, 816 pp. (In Russian)
9. Nakhushev A. M. *Elementy drobnogo ischisleniia i ikh primeneniia* [Elements of Fractional Calculus and their Application]. Nalchik, Kabardino-Balkarsk. Nauchn. Tsentr Ross. Akad. Nauk, 2000, 253 pp. (In Russian)
10. Zarubin A. N. Boundary value problem for a mixed type equation with an advanced-retarded argument, *Differ. Equ.*, 2012, vol. 48, no. 10, pp. 1384–1391. doi: 10.1134/S0012266112100084.
11. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Amsterdam, Elsevier Science B.V., 2006, xvi+523 pp. doi: 10.1016/S0304-0208(06)80001-0.
12. Ditkin V. A., Prudnikov A. P. *Integral'nye preobrazovaniia i operatsionnoe ischislenie* [Integral transforms and operational calculus]. Moscow, Nauka, 1974, 521 pp. (In Russian)