



УДК 517.938

## О динамике вихревой нити. Новый взгляд на проблему энергии и эффективной массы

*С. В. Талалов*Тольяттинский государственный университет,  
Россия, 445020, Тольятти, ул. Белорусская, 14.

### Аннотация

Рассматривается динамика бесконечной вихревой нити «нулевой толщины» в приближении локальной индукции. Асимптотически нить считается прямолинейной, причем предполагается существование в окружающем пространстве  $E_3$  выделенного направления, задаваемого некоторым вектором  $\mathbf{b}_3$ , который и определяет асимптотики нити.

Исследуется возможность интерпретации такого объекта как модели планарной «квазичастицы» с конфигурационным пространством (коллективных координат) в виде плоскости  $E_2 \perp \mathbf{b}_3$  и внутренними степенями свободы.

Построено гамильтоново описание динамики такой нити в терминах переменных, допускающих естественное разделение на две группы: «внешние» и «внутренние».

Внешние гамильтоновы переменные (имеющие смысл координат и импульсов бесструктурной планарной частицы) и внутренние (соответствующие переменным модели магнетика Гейзенберга) перепутаны связями, что приводит к нетривиальности конструкции. Группа пространственной симметрии системы строится в два этапа: сжатие  $SO(3) \rightarrow E(2)$  и последующее расширение  $E(2) \times T \rightarrow \tilde{G}_2$ . Здесь  $E(2)$  — группа движений плоскости  $E_2 \perp \mathbf{b}_3$ ,  $T$  — группа временных сдвигов и  $\tilde{G}_2$  — центрально расширенная группа Галилея, действующая на указанной плоскости.

Введение в модель группы Галилея позволяет ввести в рассмотрение инвариантные функции Казимира алгебры Ли данной группы и, как следствие, сформулировать новый подход к проблеме энергии бесконечной вихревой нити нулевой толщины. Получено также выражение для тензора обратной эффективной массы построенной динамической системы. Показано, что предложенную теорию можно рассматривать как математическую модель планарной вихревой частицы, обладающей бесконечным числом внутренних степеней свободы.

**Ключевые слова:** вихревые нити, гамильтоновы системы со связями, эффективная масса.

### Научная статья

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

### Образец для цитирования

Талалов С. В. О динамике вихревой нити. Новый взгляд на проблему энергии и эффективной массы // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 1. С. 37–48. doi: [10.14498/vsgtu1652](https://doi.org/10.14498/vsgtu1652).

### Сведения об авторе

*Сергей Владимирович Талалов*   <https://orcid.org/0000-0003-0311-273X>

доктор физико-математических наук, доцент; профессор; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: [svt\\_19@mail.ru](mailto:svt_19@mail.ru)

Получение: 10 октября 2018 г. / Исправление: 4 февраля 2019 г. /  
 Принятие: 4 марта 2019 г. / Публикация онлайн: 12 марта 2019 г.

**Введение.** Предмет рассмотрения данной статьи — бесконечная вихревая нить в приближении локальной индукции [1]. Сложность реалистических моделей в гидродинамике делает востребованными подобные идеализированные конструкции, в том числе — для «отработки» новых подходов, а также как исходный материал для построения новых моделей. Практический интерес представляет, конечно, исследование динамики реального вихря с некоторым эффективным радиусом ядра  $r_0$  в области  $D \subset E_3$ , где  $D$  — подмножество пространства  $E_3$ , ограниченное плоскостями  $z = \pm L$ .

Если считать, что концы вихря расположены на разных граничных плоскостях, то такой объект может рассматриваться, например, как планарная квазичастица. Заметим, что интерес к квазичастицам той или иной природы, эволюционирующим на некоторой плоскости, в недавнее время был стимулирован гипотетическим их использованием для помехоустойчивых квантовых вычислений [2, 3].

Бесконечная вихревая нить, имеющая прямолинейные асимптотики вдоль некоторого выделенного направления, может рассматриваться как некоторое приближение ( $L \rightarrow \infty$ ) для указанного вихря. Как известно, заявленные приближения ( $r_0 \rightarrow 0$  и  $L \rightarrow \infty$ ) приводят к проблемам: так, например, стандартные интегралы для динамических инвариантов [4] становятся расходящимися. В настоящей статье мы предложим новый подход для построения некоторых из таких инвариантов. Построенная в работе модель делает также возможным вычисление тензора эффективной массы вихревой нити (как планарной квазичастицы): его нетривиальность отражает тот экспериментальный факт, что отклик вихря на внешнее воздействие является, как правило, сложной функцией такого воздействия.

Итак, мы рассматриваем эволюционирующую в пространстве  $E_3$  кривую  $z(\tau, \xi)$ , определяемую выражением

$$z(\tau, \xi) = z_0 + \frac{\rho_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi - \eta) \mathbf{j}(\tau, \eta) d\eta. \quad (1)$$

Параметры  $\tau$  и  $\xi$  являются безразмерными. Параметр эволюции  $\tau$  мы будем опускать в формулах там, где это не вызовет недоразумений. Константа  $\rho_0$  является *in-input* константой теории и определяет масштабы длин. Вектор-функция

$$\mathbf{j}(\xi) = \sum_{k=1}^3 j_k(\xi) \mathbf{b}_k,$$

где  $\mathbf{b}_k$  — некоторый фиксированный ортонормированный базис в  $E_3$ , удовлетворяет уравнению магнетика Гейзенберга [5]

$$\partial_\tau \mathbf{j}(\tau, \xi) = \mathbf{j}(\tau, \xi) \times \partial_\xi^2 \mathbf{j}(\tau, \xi), \quad (2)$$

асимптотическим условиям

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} j_k(\xi) = \delta_{3k}, \quad (3)$$

а также соответствующим связям

$$j^2(\xi) = 1. \quad (4)$$

Мы полагаем, что функции  $j_1(\xi)$ ,  $j_2(\xi)$  и  $j_3(\xi) - 1$  убывают при  $\xi \rightarrow \pm\infty$  не медленнее, чем  $1/\xi^2$ , а интеграл для компоненты  $z_3$  кривой  $\mathbf{z}$  в формуле (1) понимается в смысле главного значения Коши. Таким образом, кривая  $\mathbf{z}(\tau, \xi)$  удовлетворяет уравнению локальной индукции

$$\partial_\tau \mathbf{z}(\tau, \xi) = \frac{1}{\rho_0} \partial_\xi \mathbf{z}(\tau, \xi) \times \partial_\xi^2 \mathbf{z}(\tau, \xi) \quad (5)$$

и обладает при  $\xi \rightarrow \pm\infty$  асимптотиками

$$\mathbf{z}(\tau, \xi) \rightarrow \mathbf{z}_0 \pm \mathbf{a} + \rho_0 \xi \mathbf{b}_3 + o(1/\xi), \quad \mathbf{a} = \frac{\rho_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (j(\tau, \eta) - \mathbf{b}_3) d\eta.$$

Не ограничивая общности, мы полагаем далее  $z_{03} = 0$ , сделав, если это не так, сдвиг параметра  $\xi$  на соответствующую константу.

Следует отметить, что хотя исследуемый объект — вихревая нить — давно является предметом изучения, он до сих пор вызывает интерес у исследователей и в данной области периодически появляются новые работы (см., например, [6, 7]). Отметим здесь работу [8], в которой рассматривалась связь модели магнетика Гейзенберга и вихревой нити в ином подходе. В терминах нелинейного уравнения Шредингера (калибровочно-эквивалентного уравнения (2), см. [5]) вихревая нить была описана в работе [9]. Найденное в указанной статье преобразование (Хасимото) продолжает активно изучаться [10], в том числе и на квантовом уровне [11].

**1. Динамические инварианты.** Рассматривая вихревое движение жидкости каноническим образом [4], мы имеем в своем распоряжении следующие выражения для импульса и момента:

$$\mathbf{p}_{\text{cn}} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) dV, \quad \mathbf{s}_{\text{cn}} = \frac{1}{3} \int \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})) dV. \quad (6)$$

Здесь и далее мы полагаем, что плотность жидкости  $\rho \equiv 1$ , вектор  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$  обозначает завихренность, которая, как известно, для вихревой нити выражается формулой

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = \Gamma \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \delta(\mathbf{r} - \mathbf{z}(\xi)) \partial_\xi \mathbf{z}(\xi) d\xi,$$

где символом  $\Gamma$  обозначена циркуляция.

Наша цель заключается в том, чтобы построить гамильтонову динамическую систему, связанную с уравнением (5). Данное уравнение в нашей модели является следствием представления (1) и уравнения (2), которое постулируется. Чтобы иметь основания связывать построенную динамическую систему именно с вихревым движением жидкости, мы постулируем также формулы (6) для импульса  $\mathbf{p}$  и момента  $\mathbf{s}$ .

Известно, что непосредственное применение формул (6) к бесконечной вихревой нити проблематично, так как интегралы расходятся. Действительно, для импульса  $\mathbf{p}_{\text{сн}}$  имеем

$$\mathbf{p}_{\text{сн}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{p}(R),$$

где при достаточно больших  $R$

$$\mathbf{p}(R) \simeq \rho_0 \Gamma \mathbf{z}_0 \times (R \mathbf{b}_3 + \mathbf{a}) + \mathbf{p}, \quad (7)$$

а вектор  $\mathbf{p}$  записывается в виде выражения

$$\mathbf{p} = \rho_0^2 \Gamma \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = \frac{1}{4} \iint_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi - \eta) \mathbf{j}(\eta) \times \mathbf{j}(\xi) d\xi d\eta. \quad (8)$$

Несобственный интеграл в последнем выражении понимается в смысле главного значения Коши. Рассмотрим сначала частный случай  $\mathbf{a} = 0$ . В данном случае вполне естественно выполнить процедуру вычитания расходящегося члена  $\rho_0 \Gamma R (\mathbf{z}_0 \times \mathbf{b}_3)$  и определить импульс выражением (8). Фактически это означает вычитание (бесконечного) импульса бесконечного прямолинейного вихря. Заметим, что идея такого вычитания высказывалась еще в работе [4]. Постулируемый импульс — это импульс возмущений бесконечного прямолинейного вихря.

Рассмотрим общий случай  $\mathbf{a} \neq 0$ . Из представления (7) следует, что компоненту  $a_3$  вектора  $\mathbf{a}$  без ограничения общности здесь можно считать нулевой, переопределив, если это не так, параметр  $R$ . Как отмечалось ранее,  $z_{03} = 0$ , так что после вычитания расходящегося слагаемого  $\rho_0 \Gamma R \mathbf{z}_0 \times \mathbf{b}_3$  компоненты канонического импульса  $p_{\text{сн}1}$  и  $p_{\text{сн}2}$  определяются так же, как и в случае  $\mathbf{a} = 0$  — трансляционно-инвариантным выражением (8). Напротив, компонента  $p_{\text{сн}3}$  после вычитания содержит слагаемое  $\rho_0 \Gamma (z_{01} a_2 - z_{02} a_1)$ , что не может считаться удовлетворительным результатом в силу трансляционной неинвариантности.

Что касается компонент вектора момента  $\mathbf{s}_{\text{сн}}$ , можно убедиться, что компоненты  $s_{\text{сн}1}$  и  $s_{\text{сн}2}$  расходятся в пределе  $R \rightarrow \infty$  квадратично, и лишь компонента  $s_{\text{сн}3}$  расходится линейно, что позволяет применить к ней вычитательную процедуру. После такой процедуры по-прежнему имеем  $s_{\text{сн}j} \rightarrow \infty$ , где  $j = 1, 2$ .

Таким образом, канонические формулы (6) приводят к удовлетворительным результатам для динамических инвариантов  $p_{\text{сн}1}$ ,  $p_{\text{сн}2}$  и  $s_{\text{сн}3} = s$ , что позволяет нам интерпретировать рассматриваемую динамическую систему как планарную. Выражение для величины  $s$  может быть получено в следующей форме:

$$s = \frac{\alpha_0^3 \Gamma}{12} \iiint_{-\infty}^{\infty} \text{Tr} \left( \boldsymbol{\sigma}_3 l(\eta_1, \eta_2, \eta_3) J(\eta_1) J(\eta_2) (\partial_\eta T^+(\eta_3)) \boldsymbol{\sigma}_3 T(\eta_3) \right) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3,$$

где функция  $l(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \eta_i$  определена так, что для  $\eta_i < \eta_j < \eta_k$  коэффициенты  $\varepsilon_i = \varepsilon_k = -1$ ,  $\varepsilon_j = 1$ . Что касается матриц  $J$  и  $T$ , они определены в соответствии с формулой

$$J(\xi) \equiv \sum_{a=1}^3 j_a(\xi) \boldsymbol{\sigma}_a = T^+(\xi) \boldsymbol{\sigma}_3 T(\xi).$$

Заметим, предельные переходы  $R \rightarrow \infty$  для компонент момента  $\mathbf{s}_{\text{сн}}$  фактически задают предельный переход (контракцию)  $SO(3) \rightarrow E(2)$  (см. [12]). В итоге группа пространственно-временной симметрии исследуемой динамической системы — это группа  $E(2) \times E_\tau$ , где  $E(2)$  — группа движений плоскости  $E_2 \perp \mathbf{b}_3$  и  $E_\tau$  — группа «временных» трансляций  $\tau \rightarrow \tau + c$ .

Для обозначения векторов на данной плоскости мы используем далее прямые римские символы (safari), так что  $\mathbf{j} = (\mathbf{j}, j_3)$  и т.п.

Заметим, что в предлагаемом подходе такое понятие, как «скорость  $\mathbf{u}$  окружающей вихревую нить жидкости», отсутствует. Поэтому величина  $\Gamma$ , вычисляемая в стандартном подходе как  $\oint \mathbf{u} d\mathbf{r}$ , является динамической переменной, которая дополняет переменные  $\{\mathbf{z}_0, \mathbf{j}(\xi)\}$ , определяющие положение точек вихревой нити в пространстве.

Обозначим множество  $\{\mathbf{z}_0, \Gamma, \mathbf{j}(\xi)\}$ , элементы которого удовлетворяют связям (4), символом  $\mathcal{A}$ .

В силу сказанного выше справедливо следующая

*ЛЕММА 1. Множество  $\mathcal{A}$  параметризует рассматриваемую динамическую систему — вихревую нить  $\mathbf{z}(\xi)$ , эволюционирующую в соответствии с уравнением (5) и имеющую циркуляцию  $\Gamma$ . Данная система может рассматриваться как планарная, имеющая координаты  $(z_{01}, z_{02})$ , импульс  $\mathbf{p} = p_1 \mathbf{b}_1 + p_2 \mathbf{b}_2$ , момент  $s$ , а также внутренние степени свободы  $\mathbf{j}(\xi)$ , которые определяются в соответствии с описанными выше правилами.*

Отметим, что уравнение (5) (или (2), что эквивалентно) выводится в литературе из анализа движения окружающей нить сплошной среды, которое, собственно, рассматриваемую вихревую нить и порождает. Поэтому переменные  $\Gamma, \mathbf{j}(\tau, \xi)$  формально содержат в себе информацию о таком движении окружающей среды.

Далее мы построим гамильтоново описание рассматриваемой модели в терминах иных, более подходящих для такого описания переменных. Вводимые ниже переменные, во-первых, сделают интерпретацию исследуемой динамической системы как планарной квазичастицы более наглядной и, во-вторых, позволят расширить группу пространственно-временной симметрии. Последнее, в свою очередь, позволит предложить новый подход к определению энергии бесконечной вихревой нити нулевой толщины и, как следствие, к определению тензора обратной эффективной массы системы.

Фактически мы построим новую динамическую систему, эквивалентную рассмотренной выше вихревой нити «почти всюду».<sup>1</sup> Чтобы это сделать, мы перепараметризуем множество  $\mathcal{A}$ . Во-первых, мы объявим компоненты импульса — величины  $p_1$  и  $p_2$  — новыми независимыми динамическими переменными вместо переменной  $\Gamma$ . В плане предлагаемой здесь интерпретации такая замена выглядит физически мотивированной. Поскольку мы вводим две переменные вместо одной, в теории необходимо постулировать дополнительную связь. Действительно, восстановление исходной переменной  $\Gamma$  по введенным переменным  $p_1$  и  $p_2$  неоднозначно:

$$\Gamma = \frac{p_1}{\rho_0^2 f_1} = \frac{p_2}{\rho_0^2 f_2},$$

<sup>1</sup>Точное значение данного термина в рассматриваемой теории мы объясним позже.

где, напомним,  $f_i$  — компоненты введенного выше вектора  $\mathbf{f}$  (см. (8)). Неоднозначность исчезает на поверхности связи

$$\Phi(p_1, p_2; \mathbf{j}) \equiv (\mathbf{f}\mathbf{p})^2 - \mathbf{f}^2\mathbf{p}^2 = 0, \quad (9)$$

которую мы далее постулируем. Здесь  $\mathbf{f} = f_1\mathbf{b}_1 + f_2\mathbf{b}_2$  — планарный вектор. Заметим, что равенство (9) выполняется тождественно, если независимыми являются элементы множества  $\mathcal{A}$ .

Обозначим множество независимых переменных  $(z_{01}, z_{02}; p_1, p_2; \mathbf{j}(\xi))$ , удовлетворяющих связям (4) и (9), как  $\Omega$ .

Заметим, что на множестве  $\Upsilon \subset \Omega$ , определенном условиями  $p_1 = p_2 = 0$  и  $\mathbf{j}(\xi) \equiv \mathbf{b}_3$ , восстановление переменной  $\Gamma \in \mathcal{A}$  по-прежнему неоднозначно. Пусть подмножество  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  определено условием  $\mathbf{j}(\xi) \equiv \mathbf{b}_3$ . Такое условие определяет, очевидно, бесконечную прямолинейную стационарную вихревую нить с произвольной, вообще говоря, циркуляцией. В итоге справедливо следующая

ЛЕММА 2. *Справедливо взаимно-однозначное соответствие*

$$(\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}) \longleftrightarrow (\Omega \setminus \Upsilon).$$

Введение импульсов  $p_1$  и  $p_2$  в качестве независимых переменных позволяяет нам расширить группу пространственной симметрии  $E(2) \times E_\tau$  рассматриваемой динамической системы путем добавления галилеевских бустов

$$p_j \longrightarrow \tilde{p}_j = p_j + cv_j, \quad c, v_j = \text{const}, \quad j = 1, 2$$

как явных преобразований независимых фундаментальных переменных.

Таким образом, расширенная группа пространственно-временной симметрии теории — это планарная группа Галилея  $\tilde{\mathcal{G}}_2$ . Знак «тильда» означает однопараметрическое (с параметром  $m_0$ ) центральное расширение данной группы. Расширение группы делает возможными дальнейшие действия по определению энергии рассматриваемой системы.

**2. Энергия и гамильтонова структура.** Как известно, попытка вычислить энергию бесконечной вихревой нити при  $r_0 = 0$  при помощи канонической формулы [1]

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \iint \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV dV' = \frac{\Gamma^2}{8\pi} \iint \frac{\partial_\xi z(\xi)\partial_\xi z(\xi')}{|z(\xi) - z(\xi')|} d\xi d\xi' \quad (10)$$

приводит к неудовлетворительному результату, так как интеграл в правой части расходится. Напомним, что мы описываем вихревую нить в терминах множества  $\Omega$ , параметризуемого координатами  $(z_{01}, z_{02}; p_1, p_2; \mathbf{j}(\xi))$ . Рассмотрим вначале его подмножество  $\Upsilon \subset \Omega$  (см. выше), отвечающее бесконечной прямолинейной стационарной вихревой нити. На данном подмножестве интеграл в правой части формулы (10) по-прежнему расходится, однако циркуляция, как обсуждалось, не определена. Этот факт делает возможным и естественным постулировать величину энергии такого объекта; вводимую таким образом в теорию дополнительную константу мы будем обозначать символом  $\mathcal{E}_0$ .

Энергию вихревой нити произвольной конфигурации мы определим, используя теоретико-групповые методы. Так, алгебра Ли группы  $\tilde{\mathcal{G}}_2$  содержит три функции Казимира:

$$\hat{C}_1 = m_0 \hat{I}, \quad \hat{C}_2 = \hat{M} - \sum_{i,j=1}^2 \epsilon_{jk} \hat{P}_j \hat{B}_k, \quad \hat{C}_3 = \hat{H} - \frac{1}{2m_0} \sum_{i=1}^2 \hat{P}_i^2,$$

где  $\hat{I}$  — единичный оператор;  $\hat{M}$ ,  $\hat{H}$ ,  $\hat{P}_i$  и  $\hat{B}_i$  — генераторы вращений, временных и пространственных трансляций, а также галилеевских бустов соответственно. Известно (см., например, [13]), что функция  $\hat{C}_3$  может быть интерпретирована как «внутренняя энергия частицы». Мы полагаем, что инвариантное относительно галилеевских преобразований выражение

$$\hat{C}_3 = \mathcal{E}_0 \left( 1 + \frac{1}{4} \int (\partial_\xi \mathbf{j}(\xi))^2 d\xi \right)$$

является здесь естественным для определения внутренней энергии. Данное выражение мотивировано, конечно, формулой для гамильтониана модели магнетика Гейзенберга и постулатом об энергии стационарной прямолинейной вихревой нити. В итоге в качестве кандидата для энергии эволюционирующей бесконечной вихревой нити произвольной конфигурации мы будем рассматривать выражение

$$H_0(p_1, p_2; \mathbf{j}) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m_0} + \mathcal{E}_0 \left( 1 + \frac{1}{4} \int (\partial_\xi \mathbf{j}(\xi))^2 d\xi \right).$$

Следующая лемма вместе с леммой 2 объясняет термин «почти всюду», использованный в начале статьи.

**Лемма 3.** *Справедливо соотношение  $\overline{\Omega \setminus \Upsilon} = \Omega$ .*

Верхняя черта означает здесь замыкание в слабой топологии, порождаемой на множестве  $\Omega$  функцией  $H_0$  стандартным образом. Поскольку на множестве  $\Omega \setminus \Upsilon$  выполняется неравенство  $H_0 > \mathcal{E}_0$ , а на множестве  $\Upsilon$  — равенство  $H_0 = \mathcal{E}_0$ , доказательство очевидно.

Введем вместо переменных  $z_{01}$  и  $z_{02}$  переменные

$$q_i = m_0 z_{0i} + \tau t_0 p_i, \quad i = 1, 2,$$

где  $t_0 = \sqrt{m_0 \rho_0^2 / \mathcal{E}_0}$ . Данную константу мы будем использовать далее вместо константы  $\mathcal{E}_0$ . В итоге величины

$$\mathbf{j}(\xi), \quad \mathbf{q} = q_1 \mathbf{b}_1 + q_2 \mathbf{b}_2, \quad \mathbf{p} = p_1 \mathbf{b}_1 + p_2 \mathbf{b}_2$$

объявляются в предлагаемом подходе фундаментальными переменными модели. Например, исходная эволюционирующая кривая  $\mathbf{z}(\tau, \xi)$  — вихревая нить — записывается в терминах данных переменных следующим образом:

$$\mathbf{z}(\tau, \xi) = \frac{1}{m_0} (\mathbf{q} - \tau t_0 \mathbf{p}) + \frac{\rho_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi - \eta) \mathbf{j}(\eta) d\eta. \quad (11)$$

Заметим, что гамильтонова формулировка динамики вихревых нитей по-прежнему является предметом исследования в том или ином аспекте (см., например, [14]). В предложенной модели гамильтонову структуру, которая обеспечивает динамику (5), мы постулируем. Такой подход мотивирован известными положениями Дирака [15] о первичности гамильтонова формализма. Для определения гамильтоновой структуры мы вводим в рассмотрение следующие объекты.

- Фазовое пространство  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ . Здесь пространство  $\mathcal{H}_2$  параметризовано переменными  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$ , пространство  $\mathcal{H}_1$  — переменными  $j_a(\xi)$ , которые удовлетворяют условиям (4) и асимптотикам (3).
- Пуассонова структура

$$\begin{aligned} \{p_i, q_j\} &= m_0 \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \\ \{j_a(\xi), j_b(\eta)\} &= -\frac{2t_0}{m_0 \rho_0^2} \epsilon_{abc} j_c(\xi) \delta(\xi - \eta), \quad \epsilon_{123} = 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Все остальные скобки Пуассона нулевые. В соответствии с определением (12) функция  $\mathbf{j}^2(\eta)$  является аннулятором пуассоновой структуры. Таким образом, условие (4) отбирает симплектические листы в пространстве  $\mathcal{H}_1$ .

- Связь  $\Phi = 0$ , где функция  $\Phi$  была определена ранее в формуле (9).
- Гамильтониан

$$H = H_0 + l_0 \Phi,$$

где функция  $l_0$  — множитель Лагранжа.

*ЛЕММА 4. Введенная гамильтонова структура корректно определяет гамильтоновы потоки на множестве  $\Omega$ . Поток, соответствующий значению  $l_0 = 0$ , приводит к уравнению (5) для кривой  $\mathbf{z}(\tau, \xi)$ , которая может быть реконструирована по координатам пространства  $\mathcal{H}$  в соответствии с формулой (11).*

*Доказательство.* Действительно, прямыми вычислениями убеждаемся, что на симплектическом листе (4) выполняется равенство  $\{H_0, f_a\} = 0$ ,  $a = 1, 2, 3$ . Это означает, что при выполнении (4) справедливо равенство

$$\{H_0, \Phi\} = 0,$$

так что дополнительных связей в теории нет.

Определим «время»  $t = t_0 \tau$ . При  $l_0 = 0$  уравнение движения выглядит следующим образом:

$$\frac{dz(\xi)}{dt} = \frac{\partial z(\xi)}{\partial t} + \{H_0, z(\xi)\}.$$

Как обычно при написании данной общей формулы, явными аргументами функции  $\mathbf{z}$  здесь считаются время  $t$  и независимые гамильтоновы переменные — величины  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{p}$  и  $j_a(\xi)$ . Используя явное выражение (11), получаем окончательное выражение для правой части последней формулы в виде

$$\frac{1}{t_0 \rho_0} \partial_\xi \mathbf{z}(\xi) \times \partial_\xi^2 \mathbf{z}(\xi).$$

Принимая во внимание, что производная  $\partial/\partial\tau$  в формуле (5) предполагает, что функция  $\mathbf{z}$  зависит явно только от аргументов  $\tau$  и  $\xi$ , считаем предложение доказанным.  $\square$

После вычисления всех скобок Пуассона мы можем учесть связи явно. Сделав это, получаем окончательное выражение для энергии:

$$\mathcal{E} = H \Big|_{\Omega} = \frac{21}{2m_0} (\mathbf{p} \mathbf{n}_f)^2 + \mathcal{E}_0 \left( 1 + \frac{1}{4} \int (\partial_{\xi} \mathbf{j}(\xi))^2 d\xi \right),$$

где введено обозначение  $\mathbf{n}_f = \mathbf{f}/|\mathbf{f}|$ . Данная формула приводит к следующему выражению для тензора обратной эффективной массы  $(1/m_{\text{eff}})_{ik}$ :

$$\left( \frac{1}{m_{\text{eff}}} \right)_{ik} \equiv \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p_i \partial p_k} = \frac{1}{m_0} (\mathbf{n}_f)_i (\mathbf{n}_f)_k.$$

**Заключение.** В работе построена гамильтонова динамическая система, определенный сектор которой соответствует бесконечной вихревой нити «нулевой толщины» в приближении локальной индукции. Данный сектор определен подмножеством поверхности связи (9) в пространстве  $\mathcal{H}$ , получаемым исключением из поверхности точек с координатами  $p_1 = p_2 = 0$  и  $\mathbf{j}(\xi) \equiv \mathbf{b}_3$ . Энергия такой системы, в отличие от энергии указанной вихревой нити, корректно определена. Предложенная гамильтонова структура теории позволяет интерпретировать ее как математическую модель планарной квазичастицы с внутренними степенями свободы. В частности, оказывается возможным вычислить тензор обратной эффективной массы такой частицы. Модель содержит в себе три размерные константы:  $\rho_0$ ,  $m_0$  и  $t_0$ , определяющие масштабы длины, массы и времени соответственно. Аналогичная теория, но для замкнутой вихревой нити, построена автором в работе [16].

**Конкурирующие интересы.** Конкурирующих интересов не имею.

**Авторская ответственность.** Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

**Финансирование.** Исследование выполнялось без финансирования.

## Библиографический список

1. Saffman P. G. *Vortex dynamics* / Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics.. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992. xi+311 pp. doi: [10.1017/CB09780511624063](https://doi.org/10.1017/CB09780511624063).
2. Kitaev A. Yu. Fault-tolerant quantum computation by anyons // *Annals Phys.*, 2003. vol. 303, no. 1. pp. 2–30. doi: [10.1016/S0003-4916\(02\)00018-0](https://doi.org/10.1016/S0003-4916(02)00018-0).
3. Field B., Simula T. Introduction to topological quantum computation with non-Abelian anyons // *Quantum Science and Technology*, 2018. vol. 3, no. 4, UNSP 045004, arXiv: [1802.06176](https://arxiv.org/abs/1802.06176) [quant-ph]. doi: [10.1088/2058-9565/aacad2](https://doi.org/10.1088/2058-9565/aacad2).
4. Batchelor G. K. *An introduction to fluid dynamics* / Cambridge Mathematical Library. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. xviii+615 pp. doi: [10.1017/CB09780511800955](https://doi.org/10.1017/CB09780511800955).
5. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л. Д. *Гамильтонов подход в теории солитонов*. М.: Наука, 1986. 527 с.
6. Hirono Y., Kharzeev D. E, Sadofyev A. V. Dynamics of vortices in chiral media: The chiral propulsion effect // *Phys. Rev. Lett.*, 2018. vol. 121, no. 14, 142301. doi: [10.1103/PhysRevLett.121.142301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.142301).

7. Рубан В. П. Динамика прямых вихревых нитей в бозе-конденсате с гауссовым профилем плотности // *ЖЭТФ*, 2017. Т. 151, №6. С. 1092–1103. doi: [10.7868/S0044451017060116](https://doi.org/10.7868/S0044451017060116).
8. Abhinav K., Guha P. Inhomogeneous Heisenberg spin chain and quantum vortex filament as non-holonomically deformed NLS systems // *Eur. Phys. J. B*, 2018. vol. 91, no. 3, 52, arXiv: [1703.02353](https://arxiv.org/abs/1703.02353) [math-ph]. doi: [10.1140/epjb/e2018-80542-x](https://doi.org/10.1140/epjb/e2018-80542-x).
9. Hasimoto H. A soliton on a vortex filament // *J. Fluid Mech.*, 1972. vol. 51, no. 3. pp. 477–485. doi: [10.1017/s0022112072002307](https://doi.org/10.1017/s0022112072002307).
10. Molitor M. Generalization of Hasimoto’s transformation // *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 2009. vol. 6, no. 4. pp. 625–630, arXiv: [1204.5324](https://arxiv.org/abs/1204.5324) [math.DG]. doi: [10.1142/S0219887809003722](https://doi.org/10.1142/S0219887809003722).
11. Van Gorder R. A. Quantum Hasimoto transformation and nonlinear waves on a superfluid vortex filament under the quantum local induction approximation // *Phys. Rev. E*, 2015. vol. 91, no. 5, 053201. 33 pp., arXiv: [1402.7023](https://arxiv.org/abs/1402.7023) [physics.flu-dyn]. doi: [10.1103/PhysRevE.91.053201](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.053201).
12. Виленкин Н. Я. *Специальные функции и теория представлений групп*. М.: Наука, 1965. 588 с.
13. Фуцич В. И., Никитин А. Г. *Симметрия уравнений квантовой механики*. М.: Наука, 1990. 404 с.
14. Рубан В. П. Гамильтоновы уравнения движения вихревой нити во вращающемся бозе-конденсате и их “солитонные” решения // *Письма в ЖЭТФ*, 2016. Т. 103, № 12. С. 878–882. doi: [10.7868/S0370274X16120092](https://doi.org/10.7868/S0370274X16120092).
15. Dirac P. A. M. Generalized hamiltonian dynamics // *Canad. J. Math.*, 1950. vol. 2. pp. 129–148. doi: [10.4153/CJM-1950-012-1](https://doi.org/10.4153/CJM-1950-012-1).
16. Talalov S. V. About the non-standard viewpoint on the dynamics of closed vortex filament // *Mod. Phys. Letters B*, 2018. vol. 32, 1850410. 7 pp., arXiv: [1807.08922](https://arxiv.org/abs/1807.08922) [math-ph]. doi: [10.1142/S0217984918504109](https://doi.org/10.1142/S0217984918504109).

MSC: 70H45, 74K99, 76B47

## The vortex filament dynamics: New viewpoint on the problems of energy and effective mass

*S. V. Talalov*

Togliatti State University,

14, Belorusskaya str., Togliatti, 445020, Russian Federation.

### Abstract

The paper is devoted to the dynamics of a zero thickness infinite vortex filament in the local induction approximation. The filament is asymptotically considered as a straight line defined by the certain vector  $\mathbf{b}_3 \in \bar{E}_3$ .

We also investigate the possibility of interpretation of such object as a planar “quaziparticle”. The configuration space for some “collective coordinates” for such object is the plane  $E_2 \perp \mathbf{b}_3$ .

The “quaziparticle” has a certain number of the internal degrees of the freedom. The Hamiltonian description of the filament is constructed in terms of the variables allowing the natural classification into “external” and “internal” groups.

The external variables (coordinates and momenta of a planar structureless particle) and the internal ones (the variables for the continuous Heisenberg spin chain) are entangled by the constraints. Because of these constraints, the constructed theory is non-trivial. The space symmetry group of the system was constructed by two stages: the contraction  $SO(3) \rightarrow E(2)$  and the subsequent extension  $E(2) \times T \rightarrow \tilde{G}_2$ . The group  $E(2)$  is the group of the plane motion for the plane  $E_2 \perp \mathbf{b}_3$ , symbol  $T$  denotes the group of time translations and the group  $\tilde{G}_2$  is the central extended Galilei group for the plane mentioned above.

The appearance of the Galilei group makes it possible to introduce the invariant Casimir functions for the Lee algebras for this group and to formulate the new approach for the problem of the energy of the infinite vortex filament with zero thickness. The formula for the tensor of the inverse effective mass of the constructed system is also being deduced. It is demonstrated that the suggested theory can be interpreted as a model of the planar vortex particle having an infinite number of internal degrees of freedom.

**Keywords:** vortex filament, constrained hamiltonian systems, effective mass.

Received: 10<sup>th</sup> October, 2018 / Revised: 4<sup>th</sup> February, 2019 /

Accepted: 4<sup>th</sup> March, 2019 / First online: 12<sup>th</sup> March, 2019

### Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this article in press as:

Talalov S. V. The vortex filament dynamics: New viewpoint on the problems of energy and effective mass, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 1, pp. 37–48. doi: [10.14498/vsgtu1652](https://doi.org/10.14498/vsgtu1652) (In Russian).

#### Author’s Details:

*Sergei V. Talalov*  <https://orcid.org/0000-0003-0311-273X>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Applied Mathematics and Informatics; e-mail: [svt\\_19@mail.ru](mailto:svt_19@mail.ru)

**Competing interests.** I declare that I have no competing interests.

**Author's Responsibilities.** I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

**Funding.** This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

## References

1. Saffman P. G. *Vortex dynamics*, Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics.. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1992, xi+311 pp. doi: [10.1017/CB09780511624063](https://doi.org/10.1017/CB09780511624063).
2. Kitaev A. Yu. Fault-tolerant quantum computation by anyons, *Annals Phys.*, 2003, vol. 303, no. 1, pp. 2–30. doi: [10.1016/S0003-4916\(02\)00018-0](https://doi.org/10.1016/S0003-4916(02)00018-0).
3. Field B., Simula T. Introduction to topological quantum computation with non-Abelian anyons, *Quantum Science and Technology*, 2018, vol.3, no.4, UNSP 045004, arXiv: [1802.06176](https://arxiv.org/abs/1802.06176) [quant-ph]. doi: [10.1088/2058-9565/aacad2](https://doi.org/10.1088/2058-9565/aacad2).
4. Batchelor G. K. *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge Mathematical Library. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1999, xviii+615 pp. doi: [10.1017/CB09780511800955](https://doi.org/10.1017/CB09780511800955).
5. Faddeev L. D., Takhtadzhyan L. A. *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*, Springer Series in Soviet Mathematics. Berlin, Springer-Verlag, 1987, ix+592 pp.
6. Hirono Y., Kharzeev D. E., Sadofyev A. V. Dynamics of vortices in chiral media: The chiral propulsion effect, *Phys. Rev. Lett.*, 2018, vol. 121, no. 14, 142301. doi: [10.1103/PhysRevLett.121.142301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.142301).
7. Ruban V. P. The dynamics of straight vortex filaments in a Bose-Einstein condensate with a Gaussian density profile, *JETP*, 2017, vol. 124, no. 6, pp. 932–942, arXiv: [1612.00165](https://arxiv.org/abs/1612.00165) [cond-mat.quant-gas]. doi: [10.1134/S1063776117050041](https://doi.org/10.1134/S1063776117050041).
8. Abhinav K., Guha P. Inhomogeneous Heisenberg spin chain and quantum vortex filament as non-holonomically deformed NLS systems, *Eur. Phys. J. B*, 2018, vol. 91, no. 3, 52, arXiv: [1703.02353](https://arxiv.org/abs/1703.02353) [math-ph]. doi: [10.1140/epjb/e2018-80542-x](https://doi.org/10.1140/epjb/e2018-80542-x).
9. Hasimoto H. A soliton on a vortex filament, *J. Fluid Mech.*, 1972, vol. 51, no. 3, pp. 477–485. doi: [10.1017/s0022112072002307](https://doi.org/10.1017/s0022112072002307).
10. Molitor M. Generalization of Hasimoto's transformation, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 2009, vol. 6, no. 4, pp. 625–630, arXiv: [1204.5324](https://arxiv.org/abs/1204.5324) [math.DG]. doi: [10.1142/S02198878090003722](https://doi.org/10.1142/S02198878090003722).
11. Van Gorder R. A. Quantum Hasimoto transformation and nonlinear waves on a superfluid vortex filament under the quantum local induction approximation, *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 91, no. 5, 053201, 33 pp., arXiv: [1402.7023](https://arxiv.org/abs/1402.7023) [physics.flu-dyn]. doi: [10.1103/PhysRevE.91.053201](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.053201).
12. Vilenkin N. Ia. *Special functions and the theory of group representations*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 22. Providence, RI, American Mathematical Society, 1968, x+612 pp.
13. Fushchich V. I., Nikitin A. G. *Simmetriia uravnenii kvantovoi mekhaniki* [Symmetry of the Equations of Quantum Mechanics ]. Moscow, Nauka, 1990, 404 pp. (In Russian)
14. Ruban V. P. Hamilton's equations of motion of a vortex filament in the rotating Bose-Einstein condensate and their "soliton" solutions, *JETP Letters*, 2016, vol. 103(12), pp. 780–784, arXiv: [1609.03747](https://arxiv.org/abs/1609.03747) [cond-mat.quant-gas]. doi: [10.1134/S0021364016120109](https://doi.org/10.1134/S0021364016120109).
15. Dirac P. A. M. Generalized hamiltonian dynamics, *Canad. J. Math.*, 1950, vol. 2, pp. 129–148. doi: [10.4153/CJM-1950-012-1](https://doi.org/10.4153/CJM-1950-012-1).
16. Talalov S. V. About the non-standard viewpoint on the dynamics of closed vortex filament, *Mod. Phys. Letters B*, 2018, vol. 32, 1850410, 7 pp., arXiv: [1807.08922](https://arxiv.org/abs/1807.08922) [math-ph]. doi: [10.1142/S0217984918504109](https://doi.org/10.1142/S0217984918504109).