



УДК 539.4

Моделирование упругопластического поведения гибких пространственно-армированных пластин в рамках уточненной теории изгиба

А. П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Россия, 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1.

Аннотация

На базе алгоритма шагов по времени построена структурная модель упругопластического деформирования изгибаемых пластин с пространственными структурами армирования. Неупругое поведение материалов фаз композиции описывается определяющими уравнениями теории пластического течения с изотропным упрочнением. Возможное ослабленное сопротивление армированных пластин поперечному сдвигу учитывается на основе уточненной теории, из которой в первом приближении получаются соотношения теории Редди. Геометрическая нелинейность задачи рассматривается в приближении Кармана. Решение сформулированных начально-краевых задач строится по явной численной схеме типа «крест». Исследовано динамическое неупругое деформирование пространственно- и плоско-перекрестно армированных металлокомпозитных и стеклопластиковых гибких пластин разной относительной толщины под действием нагрузки, вызванной воздушной взрывной волной. Продемонстрировано, что для относительно толстых стеклопластиковых пластин замена плоско-перекрестной структуры армирования на пространственную структуру с сохранением общего расхода волокон приводит к уменьшению податливости конструкции в поперечном направлении почти в 1.5 раза, а также к уменьшению максимума интенсивности деформаций в связующем материале в два раза. Для относительно тонких как стеклопластиковых, так и металлокомпозитных пластин замена плоско-перекрестной структуры 2D-армирования на пространственные структуры 3D- и 4D-армирования не приводит к заметному уменьшению их прогибов, но позволяет уменьшить интенсивность деформаций в связующем на 10 % и более. Показано, что широко используемая неклассическая теория Редди не позволяет получать надежные результаты расчетов упругопластического динамического поведения изгибаемых пластин как с плоскими, так и пространственными структурами армирования даже при малой относительной толщине конструкций и слабой анизотропии композиции.

Научная статья

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Янковский А. П. Моделирование упругопластического поведения гибких пространственно-армированных пластин в рамках уточненной теории изгиба // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 1. С. 90–112. doi: [10.14498/vsgtu1644](https://doi.org/10.14498/vsgtu1644).

Сведения об авторе

Андрей Петрович Янковский  <https://orcid.org/0000-0002-2602-8357>

доктор физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. физики быстропротекающих процессов; e-mail: lab4nemir@rambler.ru

Ключевые слова: композитные пластины, пространственно-перекрестное армирование, плоско-перекрестное армирование, теория Редди, уточненная теория изгиба, упругопластическое деформирование, геометрическая нелинейность, взрывные нагрузки, схема типа «крест».

Получение: 18 сентября 2018 г. / Исправление: 11 февраля 2019 г. /

Принятие: 4 марта 2019 г. / Публикация онлайн: 20 марта 2019 г.

Введение. Конструкции из композиционных материалов (КМ) находят широкое применение в современной инженерной практике [1–8, 10]. При этом все более активно используются пространственно-армированные материалы [6–8, 10], так как такой тип армирования упраздняет серьезный недостаток плоско-армированных сред — расслоение в силу слабого сопротивления поперечным сдвигам и отрыву, а также позволяет локализовать трещины в пределах нескольких ячеек периодичности. Упругое деформирование волокнистых сред с пространственными структурами армирования моделировалось в [9, 11, 12]. Однако КМ-изделия часто испытывают высокоинтенсивное внешнее воздействие [1–3, 6, 13]. При этом КМ-конструкции могут деформироваться упругопластически. В связи с этим в [14] была построена структурная модель упругопластического деформирования пластин, перекрестно армированных в своей плоскости. Структурная же модель неупругого поведения КМ-среды с пространственной структурой армирования, использующая определяющие уравнения теории пластического течения, пока не построена.

Так как при пространственном ортогональном армировании [6–10] тонкостенные элементы КМ-конструкций типа пластин также могут обладать ослабленным сопротивлением поперечным сдвигам, актуальной является проблема не только математического моделирования упругопластического деформирования КМ-сред, но и адекватного описания механического поведения КМ-пластин с такими структурами армирования при изгибе с учетом их возможного ослабленного сопротивления поперечным сдвигам. Последнее обстоятельство традиционно учитывается в рамках теорий Рейсснера [13, 15–18] и Редди [14, 19–22]. В [19, 23] продемонстрировано, что при линейно-упругом изгибном деформировании КМ-пластин уточнение теории Редди, которая в первом приближении учитывает искривление поперечной нормали, не требуется. Однако, согласно [23], при упругопластическом изгибном деформировании пластин, перекрестно армированных в своей плоскости, теория Редди не гарантирует получения приемлемых результатов расчетов их динамического поведения. Для адекватного описания ослабленного сопротивления таких КМ-пластин поперечным сдвигам следует использовать кинематические гипотезы более высокого порядка [23, 24], чем это принято в теории Редди.

Согласно всему вышеизложенному, данное исследование посвящено математическому моделированию упругопластического поведения пространственно-армированных гибких пластин при использовании более точных, чем в теории Редди, кинематических гипотез. Для численного интегрирования возникающих при этом начально-краевых задач предполагается использовать явную пошаговую схему типа «крест».

1. Моделирование упругопластического деформирования пространственно-армированной гибкой пластины с учетом ослабленного сопротивления поперечным сдвигам. Рассматриваем изгибное деформирование КМ-пластины толщиной $2h$ (рис. 1), с которой свяжем прямоугольную декартову систему координат x_i так, чтобы отсчетная плоскость x_1x_2 ($x_3 = 0$) совпадала со срединной плоскостью ($|x_3| \leq h$). Конструкция плоскоили пространственно усилена K семействами волокон с относительным их объемным содержанием в репрезентативной ячейке ω_k , $1 \leq k \leq K$ (интенсивности армирования). На рис. 1, а изображено ортогональное плоское 2D-армирование при $K = 2$; на рис. 1, б — ортогональное пространственное 3D-армирование при $K = 3$ [7, 9, 10]; на рис. 1, в — неортогональное пространственное 4D-армирование при $K = 4$ [6]. В поперечном направлении x_3 структура армирования считается квазиоднородной. Относительное объемное содержание связующего материала в представительном элементе композиции определяется так [6, 10]:

$$\omega_0 = 1 - \sum_{k=1}^K \omega_k. \quad (1)$$

Для учета возможного (например в случаях ортогональных структур армирования, изображенных на рис. 1, а и б) ослабленного сопротивления КМ-пластины поперечным сдвигам используем кинематические соотношения более высокого порядка, чем принято в теории Редди. При этом предполагаем, что на лицевых поверхностях $x_3 = \pm h$ отсутствуют внешние касательные

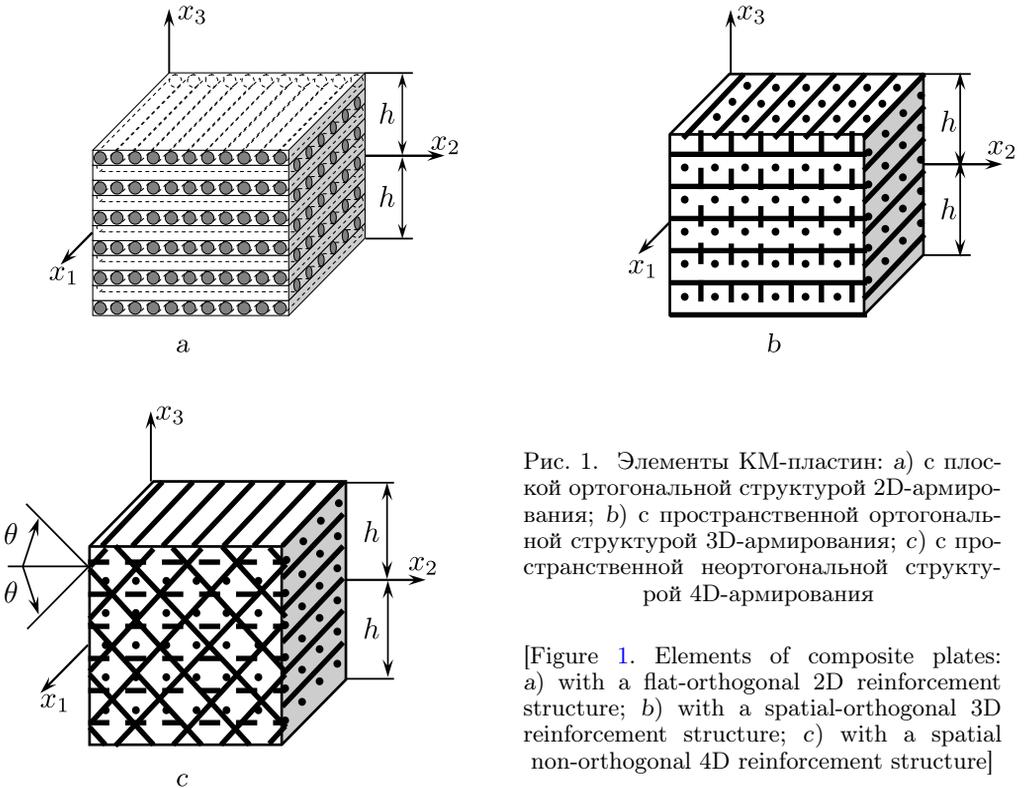


Рис. 1. Элементы КМ-пластин: а) с плоской ортогональной структурой 2D-армирования; б) с пространственной ортогональной структурой 3D-армирования; в) с пространственной неортогональной структурой 4D-армирования

[Figure 1. Elements of composite plates: a) with a flat-orthogonal 2D reinforcement structure; b) with a spatial-orthogonal 3D reinforcement structure; c) with a spatial non-orthogonal 4D reinforcement structure]

нагрузки. Тогда, согласно [23], средние деформации в композиции ε_{ij} и перемещения точек КМ-пластины U_i при учете геометрической нелинейности в приближении Кармана аппроксимируются так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \\ &+ \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) (\partial_i \varepsilon_{j3}^{(m)} + \partial_j \varepsilon_{i3}^{(m)}) + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w, \\ \varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) &= \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \sum_{m=0}^M x_3^m \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x} &= \{x_1, x_2\}, \quad \mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad j = 1, 2; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} U_i(t, \mathbf{r}) &= u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + 2 \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \\ U_3(t, \mathbf{r}) &= w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (3)$$

где w — прогиб; u_i — тангенциальные перемещения точек отсчетной плоскости ($x_3 = 0$) в направлениях x_i ; t_0 — начальный момент времени t ; ∂_i — оператор дифференцирования по x_i ($i = 1, 2$); M — целое число, задающее количество слагаемых, которые удерживаются в степенных разложениях по x_3 ; G — область, занимаемая КМ-пластиной в плане. Последнее равенство (3) соответствует традиционной для тонких пластин кинематической гипотезе, согласно которой изменямостью поперечного смещения $U_3(t, \mathbf{r})$ по переменной x_3 можно пренебречь [13–23]. При $M = 0$ из равенств (2), (3) следуют кинематические допущения теории Редди [14, 19–22].

Таким образом, в соотношениях (2), (3) неизвестными являются функции w , u_i и $\varepsilon_{i3}^{(m)}$ ($i = 1, 2, 0 \leq m \leq M$), которые зависят от двух пространственных переменных x_1, x_2 и времени t .

В силу того что установить действительное распределение полей деформаций и напряжений в КМ, в котором связующее содержит многочисленные армирующие включения достаточно произвольной ориентации (см. рис. 1), весьма затруднительно [21] (особенно при упругопластическом деформировании компонентов композиции), для построения практически приемлемых в инженерных приложениях определяющих уравнений неупругого деформирования КМ-среды используем исходные предпосылки, аналогичные принятым в [14, 21].

1. В пределах представительного элемента КМ можно рассматривать как макроскопически анизотропное квазиоднородное тело. (При равномерном и достаточно густом наполнении связующего тонкими армирующими элементами это допущение вполне приемлемо [21].)
2. Между волокнами и связующим реализуется идеальный механический контакт.
3. В пределах репрезентативной ячейки, выделенной из КМ-среды на микроуровне, напряжения и деформации во всех компонентах и в композиции в целом кусочно-постоянны. Эффекты более высоких порядков, характеризующие изменение напряжений и деформаций на микроуровне в окрестностях границ контакта волокон и связующего, не учитываем.

4. Поля деформаций и напряжений в КМ-среде осредняем по объему представительного элемента, т. е. согласно гипотезе 3 пропорционально ω_k , $0 \leq k \leq K$ (см. (1)).
5. Компоненты композиции однородны и изотропны, а их упругопластическое деформирование описывается соотношениями теории Прандтля—Рейсса—Хилла (теории течения с изотропным упрочнением) [25, 26]:

$$\dot{\sigma}_k = \mathbf{B}_k \dot{\varepsilon}_k \quad (\mathbf{B}_k = \mathbf{A}_k - \mathbf{P}_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, K, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_k &= \{\dot{\sigma}_1^{(k)}, \dot{\sigma}_2^{(k)}, \dot{\sigma}_3^{(k)}, \dot{\sigma}_4^{(k)}, \dot{\sigma}_5^{(k)}, \dot{\sigma}_6^{(k)}\}^\top \equiv \{\dot{\sigma}_{11}^{(k)}, \dot{\sigma}_{22}^{(k)}, \dot{\sigma}_{33}^{(k)}, \dot{\sigma}_{23}^{(k)}, \dot{\sigma}_{31}^{(k)}, \dot{\sigma}_{12}^{(k)}\}^\top, \\ \dot{\varepsilon}_k &= \{\dot{\varepsilon}_1^{(k)}, \dot{\varepsilon}_2^{(k)}, \dot{\varepsilon}_3^{(k)}, \dot{\varepsilon}_4^{(k)}, \dot{\varepsilon}_5^{(k)}, \dot{\varepsilon}_6^{(k)}\}^\top \equiv \{\dot{\varepsilon}_{11}^{(k)}, \dot{\varepsilon}_{22}^{(k)}, \dot{\varepsilon}_{33}^{(k)}, 2\dot{\varepsilon}_{23}^{(k)}, 2\dot{\varepsilon}_{31}^{(k)}, 2\dot{\varepsilon}_{12}^{(k)}\}^\top; \end{aligned} \quad (5)$$

$\sigma_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ — компоненты тензоров напряжений и деформаций в k -той фазе композиции; $\mathbf{B}_k = (b_{ij}^{(k)})$, $\mathbf{A}_k = (a_{ij}^{(k)})$, $\mathbf{P}_k = (p_{ij}^{(k)})$ — симметричные 6×6 -матрицы.

Ненулевые компоненты матриц \mathbf{A}_k , \mathbf{P}_k в (4) вычисляются по формулам [26]:

$$\begin{aligned} a_{ii}^{(k)} &= 2\mu^{(k)} + \lambda^{(k)}, \quad a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)} = \lambda^{(k)}, \quad a_{rr}^{(k)} = \mu^{(k)}, \quad p_{nl}^{(k)} = A^{(k)} s_n^{(k)} s_l^{(k)} \\ &\quad (j \neq i, i, j = \overline{1, 3}, r = \overline{4, 6}, l, n = \overline{1, 6}); \\ A^{(k)} &= \frac{\mu^{(k)} c^{(k)}}{J_2^{(k)}} (1 - \kappa^{(k)}), \quad 2\mu^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{1 + \nu^{(k)}}, \\ \lambda^{(k)} &= \frac{\nu^{(k)} E^{(k)}}{(1 + \nu^{(k)})(1 - 2\nu^{(k)})}, \quad \kappa^{(k)} = \frac{\bar{\mu}^{(k)}}{\mu^{(k)}}, \\ J_2^{(k)} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (s_i^{(k)})^2 + \sum_{i=4}^6 (s_i^{(k)})^2, \\ c^{(k)} &= \begin{cases} 0 & \text{при } J_2^{(k)} < J_{2*}^{(k)} \text{ или } J_2^{(k)} = J_{2*}^{(k)}, \quad W^{(k)} \leq 0, \\ 1 & \text{при } J_2^{(k)} = J_{2*}^{(k)}, \quad W^{(k)} > 0, \end{cases} \\ W^{(k)} &= \sum_{i=1}^6 s_i^{(k)} \dot{\varepsilon}_i^{(k)}, \quad s_j^{(k)} = \sigma_j^{(k)} - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sigma_i^{(k)}, \quad s_l^{(k)} = \sigma_l^{(k)}, \\ e_j^{(k)} &= \varepsilon_j^{(k)} - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i^{(k)}, \\ e_l^{(k)} &= \varepsilon_l^{(k)}, \quad J_{2*}^{(k)} = \max\{J_{2p}^{(k)}, J_{2m}^{(k)}\}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad l = \overline{4, 6}; \end{aligned} \quad (6)$$

$\nu^{(k)}$, $E^{(k)}$ — коэффициент Пуассона и модуль Юнга k -того компонента композиции; $\bar{\mu}^{(k)}$ — касательный модуль на диаграмме чистого сдвига для того же материала; $c^{(k)}$ — функция переключения, задающая активное упругопластическое нагружение или разгрузку элемента k -той фазы композиции; $J_{2p}^{(k)}$ — значение второго инварианта тензора-девиатора напряжений $J_2^{(k)}$, при котором k -той компонент композиции начинает впервые деформироваться пла-

стически; $J_{2m}^{(k)}$ — наибольшее значение $J_2^{(k)}$, которое достигнуто за предыдущую историю нагружения элемента k -той фазы композиции; точка — дифференцирование по времени. Равенства (5) задают соответствия между шестью элементами $f_i^{(k)}$ ($i = \overline{1, 6}$) некоторого вектор-столбца \mathbf{f}_k и компонентами симметричного тензора второго ранга $f_{jl}^{(k)}$ ($j, l = \overline{1, 3}, 0 \leq k \leq K$). В соответствии с (6) $s_i^{(k)}$ и $e_i^{(k)}$ ($i = \overline{1, 6}$) — компоненты (возможно, удвоенные) девиаторов напряжений и деформаций в k -той фазе композиции.

С каждым k -тым семейством волокон свяжем локальную ортогональную систему координат $x_i^{(k)}$ таким образом, чтобы $x_1^{(k)}$ совпадала с траекторией армирования, а оси $x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$ были перпендикулярны этим траекториям. При этом направление волокна k -того семейства можно задать углами сферической системы координат θ_k и φ_k (рис. 2). Направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ между $x_i^{(k)}$ и x_j ($i, j = \overline{1, 3}$) в этом случае определяются так:

$$\begin{aligned} l_{11}^{(k)} &= \sin \theta_k \cos \varphi_k, & l_{12}^{(k)} &= \sin \theta_k \sin \varphi_k, & l_{13}^{(k)} &= \cos \theta_k, \\ l_{21}^{(k)} &= -\sin \varphi_k, & l_{22}^{(k)} &= \cos \varphi_k, & l_{23}^{(k)} &= 0, \\ l_{31}^{(k)} &= -\cos \theta_k \cos \varphi_k, & l_{32}^{(k)} &= -\cos \theta_k \sin \varphi_k, & l_{33}^{(k)} &= \sin \theta_k, \end{aligned} \quad 1 \leq k \leq K. \quad (7)$$

При переходе от глобальной x_j к локальной $x_i^{(k)}$ ($i, j = \overline{1, 3}$) системе координат для векторов-столбцов, аналогичных (5), выполняются преобразования

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_k &= \mathbf{G}_k \sigma_k \quad \left(\bar{\sigma}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^6 g_{ij}^{(k)} \sigma_j^{(k)} \right), \\ \bar{\varepsilon}_k &= \mathbf{Q}_k \varepsilon_k \quad \left(\bar{\varepsilon}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^6 q_{ij}^{(k)} \varepsilon_j^{(k)} \right), \quad i = \overline{1, 6}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\mathbf{G}_k = (g_{ij}^{(k)})$ и $\mathbf{Q}_k = (q_{ij}^{(k)})$ — 6×6 -матрицы, элементы которых вычисляются

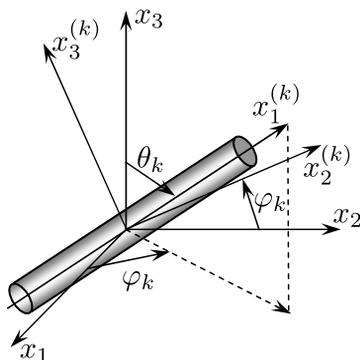


Рис. 2. Локальная система координат, связанная с арматурой k -того семейства [Figure 2. Local coordinate system associated with k -th family of armature]

ся по формулам (см. (7))

$$\begin{aligned}
 g_{11}^{(k)} &= q_{11}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{11}^{(k)}, & g_{12}^{(k)} &= q_{12}^{(k)} = l_{12}^{(k)} l_{12}^{(k)}, & \dots, \\
 g_{16}^{(k)} &= 2q_{16}^{(k)} = 2l_{12}^{(k)} l_{11}^{(k)}, & \dots, & & 2g_{61}^{(k)} &= q_{61}^{(k)} = 2l_{21}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \\
 & & \dots, & & & \\
 g_{66}^{(k)} &= q_{66}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{12}^{(k)} l_{21}^{(k)}, & 1 \leq k \leq K.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Остальные элементы матриц \mathbf{G}_k и \mathbf{Q}_k , не выписанные в (9), приведены в [21, табл. 21.40 и 21.44]. Чертой сверху в (8) обозначены величины, заданные в системе координат $x_i^{(k)}$ ($i = \overline{1, 3}$).

Согласно условиям сопряжения полей напряжений и перемещений на границах контакта связующего с волокнами, при учете второго и третьего допущений имеем (см. (8))

$$\sum_{j=1}^6 q_{1j}^{(k)} \varepsilon_j^{(k)} = \sum_{j=1}^6 q_{1j}^{(k)} \varepsilon_j^{(0)}, \quad \sum_{j=1}^6 g_{ij}^{(k)} \sigma_j^{(k)} = \sum_{j=1}^6 g_{ij}^{(k)} \sigma_j^{(0)}, \quad i = \overline{2, 6}, \quad 1 \leq k \leq K. \tag{10}$$

Здесь первое соотношение характеризует равенство удлинений арматуры k -того семейства и связующего материала вдоль волокна; остальные равенства — условия контакта между арматурой и связующей матрицей в напряжениях на боковой поверхности волокна.

Исходные предположения 1–5 аналогичны допущениям, которые ранее были приняты в [14], поэтому, повторяя рассуждения из [14] и учитывая соотношения (1), (4), (6) и (10), окончательно в матричном виде получим следующее определяющее уравнение упругопластического деформирования КМ-среды с пространственной структурой армирования:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= \left(\omega_0 \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^K \omega_k \mathbf{B}_k \mathbf{E}_k \right) \mathbf{H}, \\
 \mathbf{H} &= \left(\omega_0 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^K \omega_k \mathbf{E}_k \right)^{-1}, \\
 \mathbf{E}_k &= \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{C}_k, \quad 1 \leq k \leq K;
 \end{aligned} \tag{12}$$

$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ — шестикомпонентные векторы-столбцы скоростей средних напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ и деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ в КМ, по структуре подобные (5); \mathbf{I} — единичная 6×6 -матрица; \mathbf{B} , \mathbf{H} , \mathbf{E}_k , \mathbf{C}_k , \mathbf{D}_k — 6×6 -матрицы; \mathbf{D}_k^{-1} — 6×6 -матрица, обратная \mathbf{D}_k .

Элементы $c_{ij}^{(k)}$ и $d_{ij}^{(k)}$ матриц \mathbf{C}_k и \mathbf{D}_k с учетом (4), (6), (7), (9), (10) имеют следующие выражения:

$$c_{1j}^{(k)} = d_{1j}^{(k)} = q_{1j}^{(k)}, \quad c_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(0)}, \quad d_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(k)}, \quad i = \overline{2, 6}, \quad j = \overline{1, 6}.$$

При выводе соотношений (11) и (12), как и в [14], попутно получаются дополнительные матричные равенства

$$\dot{\epsilon}_0 = \mathbf{H}\dot{\epsilon}, \quad \dot{\epsilon}_k = \mathbf{E}_k\dot{\epsilon}_0, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (13)$$

Первое соотношение (13) определяет скорости деформаций в связующей матрице $\dot{\epsilon}_0$ через скорости осредненных деформаций композиции $\dot{\epsilon}$, а второе равенство выражает скорости деформаций волокон k -того семейства $\dot{\epsilon}_k$ через скорости деформаций связующего материала $\dot{\epsilon}_0$, т. е. в конечном итоге опять же через $\dot{\epsilon}$.

В настоящем исследовании рассматривается механическое поведение КМ-пластины как гибкой тонкостенной системы, поэтому напряжение $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ с приемлемой для инженерных приложений точностью можно линейно аппроксимировать по толщине [18]:

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) \equiv \sigma_3(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad (14)$$

где $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$ — нормальные напряжения на нижней (–) и верхней (+) лицевых поверхностях конструкции, известные из соответствующих граничных условий.

Матричное соотношение (11) — система шести алгебраических уравнений. Из третьего равенства этой системы при учете условий соответствия, аналогичных (5), можем выразить скорость поперечной линейной деформации КМ-пластины:

$$\dot{\epsilon}_{33} \equiv \dot{\epsilon}_3 = \frac{1}{b_{33}} \left(\dot{\sigma}_3 - \sum_{i=1}^6 (1 - \delta_{3i}) b_{3i} \dot{\epsilon}_i \right), \quad (15)$$

где b_{3i} — компоненты матрицы \mathbf{B} в (11); δ_{3i} ($i = \overline{1,6}$) — символ Кронекера; $\dot{\sigma}_3$ определяется путем дифференцирования (14) по времени. В правой части (15) скорости деформаций $\dot{\epsilon}_i$ можно получить за счет дифференцирования по t соотношений (2), т. е. можно выразить их через двумерные функции w , \dot{w} , \dot{u}_l , $\dot{\epsilon}_{l3}^{(m)}$ ($l = 1, 2, 0 \leq m \leq M$).

Как и в [23], для понижения размерности уравнений движения гибкой КМ-пластины применим метод взвешенных невязок [27]. В качестве весовых функций используем полиномы x_3^l . Тогда с учетом (14) и последнего равенства (3) будем иметь [23]

$$\begin{aligned} 2h\rho\ddot{w} &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(M_{j3}^{(0)} + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^{(0)} \partial_i w \right) + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} + X_3^{(0)}, \\ \rho\ddot{u}_i^{(l)} &= \sum_{j=1}^2 \partial_j (M_{ij}^{(l)} - M_{j3}^{(l)} \partial_i w) - lM_{i3}^{(l-1)} + lM_{33}^{(l-1)} \partial_i w - \\ &\quad - h^l [\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)}] \partial_i w + X_i^{(l)}, \\ i &= 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M + 1, \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \rho &\equiv \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^K \rho_k \omega_k, & X_i^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h X_i(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \\ M_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, & u_s^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_s(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \\ lM_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) &\equiv l \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) x_3^{l-1} dx_3 = \\ &= \frac{h^l}{2} \left[(\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)}) (1 - (-1)^l) + \frac{l}{l+1} (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) (1 + (-1)^l) \right], \\ & \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad s = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1; \end{aligned} \quad (17)$$

ρ_0, ρ_k — объемные плотности материалов связующего и арматуры k -того семейства; X_i — объемные нагрузки, действующие на КМ и определяемые по правилу смеси аналогично ρ . Из третьего равенства (17) следует, что $M_{ij}^{(0)} \equiv F_{ij}$, $M_{ij}^{(1)} \equiv M_{ij}$ — тангенциальные силы и изгибающие и крутящие моменты в пластине; $M_{i3}^{(0)} \equiv F_{i3}$ ($i, j = 1, 2$) — перерезывающие силы; остальные силовые факторы в (16) — моменты высших порядков [27].

Для однозначного интегрирования исследуемой задачи нужно задать граничные и начальные условия. Для понижения размерности этих условий вновь применим метод взвешенных невязок, используя те же весовые функции. Тогда на части кромки пластины (обозначим ее Γ_σ), где заданы силовые граничные условия, получим следующие равенства в силовых факторах (17) [23]:

$$\begin{aligned} n_1 (M_{i1}^{(l)} - M_{13}^{(l)} \partial_i w) + n_2 (M_{i2}^{(l)} - M_{23}^{(l)} \partial_i w) &= P_i^{(l)}(t, \mathbf{x}), \\ \sum_{j=1}^2 n_j \left(M_{j3}^{(0)} + \sum_{l=1}^2 M_{jl}^{(0)} \partial_l w \right) &= P_3^{(0)}(t, \mathbf{x}), \\ i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (18)$$

а на остальной части кромки (обозначим ее Γ_u), где заданы перемещения, получим граничные условия в кинематических переменных (см. (3) и (17)) [23]:

$$\begin{aligned} w(t, \mathbf{x}) &= U_{*3}(t, \mathbf{x}), & u_i^{(l)}(t, \mathbf{x}) &= u_{*i}^{(l)}(t, \mathbf{x}), \\ i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} P_j^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h p_j(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, & u_{*i}^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_{*i}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3 \\ (j = \overline{1, 3}, \quad i = 1, 2), \quad n_1 &= \cos \gamma, \quad n_2 = \sin \gamma; \end{aligned} \quad (20)$$

p_j ($j = \overline{1, 3}$) — приложенные к торцевой поверхности пластины внешние нагрузки; U_{*3} — известный на Γ_u прогиб; U_{*i} — заданные на торцевой поверхности пластины тангенциальные перемещения; γ — угол, определяющий направление внешней нормали к кромке Γ_σ ; $u_{*i}^{(l)}$ ($i = 1, 2$) — известные на Γ_u функции.

В момент времени t_0 нужно использовать начальные условия (см. (3), (17)) [23]:

$$\begin{aligned} w(t_0, \mathbf{x}) &= U_{03}(\mathbf{x}), \quad \dot{w}(t_0, \mathbf{x}) = V_{03}(\mathbf{x}), \quad u_i^{(l)}(t_0, \mathbf{x}) = u_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}), \\ \dot{u}_i^{(l)}(t_0, \mathbf{x}) &= v_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M + 1, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$u_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_{0i}(\mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad v_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h V_{0i}(\mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad (22)$$

$$i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M + 1;$$

U_{0j}, V_{0j} ($j = \overline{1, 3}$) — заданные при t_0 перемещения и скорости точек КМ-пластины; $u_{0i}^{(l)}, v_{0i}^{(l)}$ ($i = 1, 2$) — известные в области G функции.

Согласно выражениям (20), $P_i^{(0)}$ и $P_3^{(0)}$ — известные на кромке Γ_σ усилия, приложенные в направлениях x_i и x_3 , а $P_i^{(1)}$ ($i = 1, 2$) — известные механические моменты; остальные величины, стоящие в правых частях (18), — известные моменты высших порядков от внешних сил, заданных на торцевой поверхности.

Таким образом, чтобы однозначно проинтегрировать исследуемую задачу, в каждой точке области G при $t = t_0$ нужно задать начальные условия (21) с учетом выражений (22), а на кромках пластины — силовые (18) или кинематические (19) граничные условия с учетом обозначений (20). Допускается задание и смешанных из (18), (19) граничных условий.

Проинтегрируем первые соотношения (3) по толщине пластины с весами x_3^l ($0 \leq l \leq M + 1$), тогда при учете четвертого соотношения (17) получим матричные равенства

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{u}_i + \mathbf{w}\partial_i w, \quad i = 1, 2, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= \{u_i^{(0)}, u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \dots, u_i^{(M)}, u_i^{(M+1)}\}^\top, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i &= \{u_i, \varepsilon_{i3}^{(0)}, \varepsilon_{i3}^{(1)}, \dots, \varepsilon_{i3}^{(M-1)}, \varepsilon_{i3}^{(M)}\}^\top; \end{aligned} \quad (24)$$

$\mathbf{w} = \{w_i\}$ — $(M + 2)$ -компонентный вектор-столбец, $\mathbf{C} = (c_{ij})$ — матрица размерности $(M + 2) \times (M + 2)$, элементы которых определяются так:

$$\begin{aligned} w_{l+1} &= \frac{h^{l+2}}{l+2} (1 - (-1)^l), \\ c_{l+1,1} &= \frac{h^{l+1}}{l+1} (1 + (-1)^l), \\ c_{l+1,m+2} &= 2h^{l+m+2} (1 - (-1)^{l+m}) \left[\frac{1}{(m+1)(l+m+2)} - \frac{1}{(m+3)(l+m+4)} \right], \\ 0 \leq l \leq M + 1, \quad 0 \leq m \leq M. \end{aligned} \quad (25)$$

Из равенств (25) видно, что компоненты матрицы \mathbf{C} и вектора-столбца \mathbf{w} рассчитываются один раз, поэтому уравнения (23) целесообразно преобразовать к виду

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}_i + \bar{\mathbf{w}} \partial_i w, \quad i = 1, 2, \quad (26)$$

где

$$\bar{w} = C^{-1}w; \quad (27)$$

C^{-1} — матрица, обратная C .

Если из каких-либо соображений в текущий момент времени известны значения функций w и $u_i^{(l)}$ ($0 \leq l \leq M+1$), то из (26) с учетом (24), (27) получаем значения функций u_i и $\varepsilon_{i3}^{(m)}$ ($0 \leq m \leq M$), определяющие осредненные деформации композиции (2) и тангенциальные перемещения U_i ($i = 1, 2$) точек КМ-пластины (см. (3)).

2. Численный метод расчета. Для построения численного решения исследуемой задачи используем алгоритм шагов по времени [14, 17, 23, 26, 28], т. е. будем определять значения неизвестных функций в дискретные моменты времени $t_{n+1} = t_n + \tau$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где $\tau = \text{const} > 0$ — заданный шаг по времени. Предполагаем, что в два предшествующих момента времени t_s уже известны значения следующих функций:

$$\begin{aligned} \overset{s}{w}(\mathbf{x}) &\equiv w(t_s, \mathbf{x}), & \overset{s(l)}{u}_i(\mathbf{x}) &\equiv u_i^{(l)}(t_s, \mathbf{x}), \\ \overset{s(\pm)}{\sigma}_{33}(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_s, \mathbf{x}), & \overset{s(\pm)}{\dot{\sigma}}_{33}(\mathbf{x}) &\equiv \dot{\sigma}_{33}^{(\pm)}(t_s, \mathbf{x}), \\ \overset{s}{\sigma}_{ij}(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}(t_s, \mathbf{r}), & \overset{s(k)}{\dot{\sigma}}_{ij}(\mathbf{r}) &\equiv \dot{\sigma}_{ij}^{(k)}(t_s, \mathbf{r}), \\ \overset{s}{X}_j(\mathbf{r}) &\equiv X_j(t_s, \mathbf{r}), & i &= 1, 2, \quad j = \overline{1, 3}, \\ & & s &= n-1, n, \quad 0 \leq l \leq M+1, \\ & & & 0 \leq k \leq K, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \end{aligned} \quad (28)$$

поэтому, согласно (17), в момент времени t_n известны и все силовые факторы $M_{ij}^{(l)}$, которые входят в (18) и в правые части уравнений (16).

Чтобы получить явную численную схему, аппроксимируем встречающиеся производные по времени их центральными конечными разностями на трехточечных шаблонах [14, 23]. Согласно этому, конечно-разностные аналоги уравнений движения (16) при учете обозначений (28) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{2h\rho}{\tau^2} (w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1}) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(M_{j3}^{(0)} + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^{(0)} \partial_i w^n \right) + \overset{n(+)}{\sigma}_{33} - \overset{n(-)}{\sigma}_{33} + X_3^{(0)}, \\ \frac{\rho}{\tau^2} (u_i^{n+1(l)} - 2u_i^{n(l)} + u_i^{n-1(l)}) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j (M_{ij}^{(n)} - M_{j3}^{(n)} \partial_i w^n) - \\ &- l M_{i3}^{(l-1)} + l M_{33}^{(l-1)} \partial_i w^n - h^l [\overset{n(+)}{\sigma}_{33} - (-1)^l \overset{n(-)}{\sigma}_{33}] \partial_i w^n + X_i^{(l)}, \\ i &= 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (29)$$

Правые части в (29) при $t = t_n$ известны, поэтому из этих уравнений, учитывая соответствующие граничные условия (18) и (19), вычисляем w^{n+1} и $u_i^{n+1(l)}$ в следующий момент времени t_{n+1} . На основании (26) по уже известным w^n и $u_i^{n+1(l)}$ ($0 \leq l \leq M+1$) определяем u_i^{n+1} и $\varepsilon_{i3}^{n+1(m)}$ ($i = 1, 2, 0 \leq m \leq M$), а затем — деформации ε_{ij}^{n+1} (см. (2)). При $t = t_{n-1}$ деформации ε_{ij}^{n-1} предполагаются уже известными (см. (2) при учете (28)), поэтому, используя (15)

и формулы численного дифференцирования по времени, можем вычислить и скорости средних деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^n$. После чего по формулам (13) последовательно определяем скорости деформаций в составляющих композиции $\dot{\varepsilon}_k^n$, а из (4) — скорости напряжений в компонентах композиции $\dot{\sigma}_k^n$ ($0 \leq k \leq K$). Дальнейшее решение рассматриваемой задачи строится совершенно так же, как это подробно описано в [14, 23].

Согласно структуре левых частей уравнений (29), для начала проведения расчетов по разработанной явной численной схеме необходимо использовать значения функций w^0 и $u_i^{(l)}$, известные из начальных условий (21) при учете (22), и требуется предварительно определить значения функций w^1 и $u_i^{(l)}$ (см. (29) при $n = 1$). Эти величины можно вычислить по формуле Тейлора, учитывая начальные условия (21) и уравнения движения (16) при $t = t_0$ [23]:

$$\begin{aligned} w^1(\mathbf{x}) &= w^0(\mathbf{x}) + \tau \dot{w}(\mathbf{x}) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{w}(\mathbf{x}) + O(\tau^3) \approx 0, \\ u_i^{(l)}(\mathbf{x}) &= u_i^{(l)0}(\mathbf{x}) + \tau \dot{u}_i^{(l)}(\mathbf{x}) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{u}_i^{(l)}(\mathbf{x}) + O(\tau^3) \approx 0, \\ \mathbf{x} \in G, \quad i &= 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M + 1. \end{aligned}$$

Здесь приближенные равенства выполняются с точностью порядка τ^3 , причем нулевые значения получаются, когда в начальный момент времени пластина покоится в естественном состоянии (см. (21) и (22) при $U_{0i} \equiv 0$, $V_{0i} \equiv 0$), а внешние нагрузки отсутствуют (см. (14), (16) и (17) при $\sigma_{33}^{(\pm)}(t_0, \mathbf{x}) \equiv 0$, $X_i(t_0, \mathbf{r}) \equiv 0$, $i = \overline{1, 3}$).

В случае прямоугольной области G , заменяя в равенствах (18) и (29) производные $\partial_i(\cdot)$ их конечно-разностными аналогами, в конечном итоге получим явную схему «крест» [14, 17, 23]. Если область G неканоническая, то дискретизация соотношений (18), (29) по пространственным переменным x_i ($i = 1, 2$) может быть осуществлена путем применения вариационно-разностного подхода [17]. Необходимые условия устойчивости явной схемы «крест» вытекают из условий Куранта—Фридрикса—Леви [17] и для КМ-пластины характеризуются неравенствами (60) из [14].

3. Обсуждение результатов расчетов. В качестве примеров рассмотрим динамическое упругопластическое деформирование КМ-пластин толщиной $2h = 2$ см, имеющих прямоугольную форму в плане ($G : |x_1| \leq a$, $|x_2| \leq b$, $a = 4b$). По всем кромкам пластины жестко закреплены (см. (19) и (20) при $U_{*i} \equiv 0$), а в начальный момент времени $t_0 = 0$ находятся в естественном состоянии покоя (см. (21) и (22) при $U_{0i} \equiv 0$ и $V_{0i} \equiv 0$). Объемными нагрузками пренебрегаем (см. (16), (17) и (29) при $X_i \equiv 0$, $i = \overline{1, 3}$). Конструкции нагружаются со стороны нижней лицевой поверхности давлением, соответствующим воздушной взрывной волне [28] (см. (14), (16), (17), (28) и (29)):

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(+)}(t) &\equiv 0, \\ -\sigma_{33}^{(-)}(t) &\equiv p(t) = \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \end{aligned}$$

где

$$\alpha = -\ln(0.01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}, \quad (30)$$

t_{\max} — момент времени, при котором нагрузка $p(t) > 0$ достигает наибольшего значения p_{\max} ; t_{\min} — момент времени, при котором $p(t)$ становится пренебрежимо малым по сравнению с p_{\max} (так, (30) соответствует предположению $p(t_{\min}) = 0.01p_{\max}$). Согласно экспериментальным данным [28], в расчетах принято $t_{\max} = 0.1$ мс и $t_{\min} = 2$ мс. Следовательно, при $t > 2$ мс колебания исследуемых ниже пластин можно рассматривать как свободные.

Пластины изготовлены либо из эпоксидной смолы и армированы стекловолокнами марки S-994 [29, 30] (стеклопластики), либо из алюминиевого сплава АДМ и усилены стальной проволокой У8А [29] (металлокомпозиции). Упругопластическое поведение компонентов этих композиций на стадии их активного нагружения описывается идеализированной диаграммой с линейным упрочнением:

$$\sigma = \begin{cases} E^{(k)}\varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_e^{(k)} \equiv \sigma_e^{(k)}/E^{(k)}, \\ \text{sign}(\varepsilon)\sigma_e^{(k)} + E_e^{(k)}(\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon)\varepsilon_e^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_e^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq K, \end{cases}$$

где σ , ε — осевые напряжение и деформация при растяжении и сжатии; $\sigma_e^{(k)}$, $E_e^{(k)}$ — условный предел текучести и модуль линейного упрочнения материала k -той фазы композиции. Физико-механические характеристики компонентов указанных композиций приведены в таблице, где $a = \sqrt{E/\rho}$ — скорость звука в соответствующем материале.

Физико-механические характеристики компонентов композиций пластин [29, 30]
[Physico-mechanical characteristics of the components of composite plates [29, 30]]

Materials	ρ , kg/m ³	ν	σ_e , МПа	E , ГПа	E_e , ГПа	a , m/s
Еpoxy	1210	0.33	20	2.8	1.114	1521.2
Fiberglass S-994	2520	0.25	4500	86.8	6.230	5868.9
ADM (Aluminum alloy)	2710	0.30	30	71.0	0.143	5118.5
U8A steel wire	7800	0.31	3968	210.0	6.973	5188.7

Структуры армирования считаются однородными и прямолинейными: $\omega_k = \text{const}$, $\theta_k = \text{const}$ и $\varphi_k = \text{const}$, $1 \leq k \leq K$ (см. (1) и (7)). Исследуется динамическое поведение КМ-пластин со следующими структурами:

- 1) ортогональное плоское 2D-армирование (рис. 1, а), когда два семейства волокон ($K = 2$) укладываются в направлениях x_1 и x_2 с интенсивностями армирования $\omega_1 = 0.266$ и $\omega_2 = 0.324$ соответственно;
- 2) ортогональное пространственное 3D-армирование (рис. 1, б), когда три семейства волокон ($K = 3$) укладываются по направлениям x_1 , x_2 и x_3 с интенсивностями $\omega_1 = 0.235$, $\omega_2 = 0.324$ и $\omega_3 = 0.031$ [9];
- 3) неортогональное пространственное 4D-армирование (рис. 1, в), когда первое и второе семейства укладываются по направлениям x_1 и x_2 , а третье и четвертое семейства — по траекториям, задаваемым углами (см. рис. 2 и (7)): $\theta_3 = \pi/4$, $\theta_4 = 3\pi/4$, $\varphi_3 = \varphi_4 = \pi/2$ (т. е. на рис. 1, в $\theta = \pi/4$).

В последнем случае интенсивности армирования имеют значения: $\omega_1 = 0.126$, $\omega_2 = 0.324$ и $\omega_3 = \omega_4 = 0.07$. При всех структурах общий расход арматуры один и тот же.

Для проведения численных расчетов по направлениям x_1 и x_2 введем равномерную сетку с шагом $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 2b/100$, а шаг по времени τ зададим равным 0.25 мкс. Далее рассматриваются пластины с наименьшим размером в плане $2b = 1$ м и $2b = 20$ см, для которых получаем $\Delta x_1/\tau = 40$ км/с и $\Delta x_1/\tau = 8$ км/с соответственно. Эти отношения значительно больше значений a , приведенных в таблице для всех компонентов композиций. Следовательно, необходимые условия устойчивости схемы типа «крест» выполняются для каждого компонента композиции (см. неравенства (60) в [14]), а значит, и для самих композиций, причем с запасом [14].

На рис. 3 изображены поперечные колебания центральных точек металлокомпозитных пластин с разными структурами армирования ($w_0(t) \equiv w(t, 0, 0)$), полученные при $p_{\max} = 16$ МПа и $b = 50$ см. Кривые 1 рассчитаны по уточненной теории при $M = 7$ (см. (2), (3)) для конструкции с 3D-армированием, а кривые 2 — либо по теории Редди ($M = 0$) для пластин с той же структурой 3D-армирования (рис. 3, а), либо по уточненной теории ($M = 7$) для конструкции с плоской структурой 2D-армирования (рис. 3, б). Сравнение кривых 1 и 2 на рис. 3, а показывает, что для 3D-армированных пластин при $t > 60$ мс прогиб, определенный по теории Редди, начинает отличаться от прогиба, рассчитанного по уточненной теории; с увеличением расчетного интервала времени это различие возрастает. В еще большей степени проявляется соответствующее различие при сравнении деформированных состояний

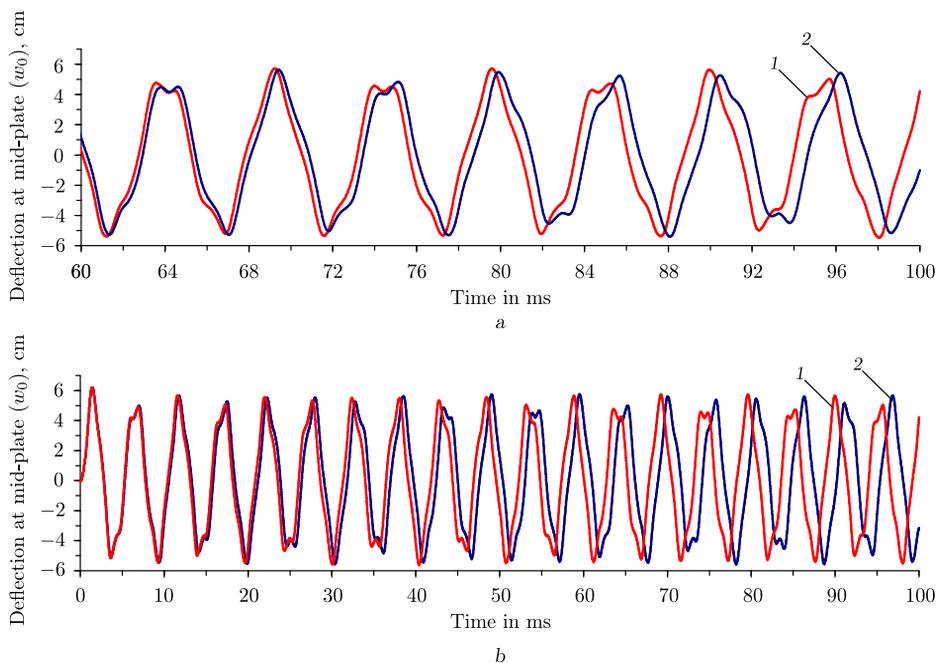


Рис. 3. Осцилляции центральных точек тонких металлокомпозитных пластин с разными структурами: а) 3D-армирование; расчет по уточненной теории и по теории Редди; б) 2D- и 3D-армирование; расчет по уточненной теории

[Figure 3. Oscillations of the central points of thin metal-composite flexible plates with different structures: a) spatial reinforcement; line 1—calculation by refined theory, line 2—calculation Reddy theory; b) line 1—spatial reinforcement, line 2—flat-cross 2D reinforcement; calculation by refined theory]

в компонентах композиции, рассчитанных по этим теориям. Так, на рассматриваемом интервале времени $0 \leq t \leq 100$ мс максимальное (достигаемое на первой осцилляции) значение интенсивности деформаций в связующем, определенное по теории Редди, на 15.1 % меньше аналогичной величины, рассчитанной по уточненной теории.

Сопоставление кривых 1 и 2 на рис. 3, *b* свидетельствует о том, что замена 2D-структуры армирования на 3D-структуру с тем же расходом волокон в случае относительно тонких ($h/b = 1/50$) металлокомпозитных пластин практически не приводит к уменьшению максимального значения прогиба, который достигается на первой осцилляции. Однако такая замена структуры армирования приводит к уменьшению наибольшего значения интенсивности деформаций в связующем на 7.4 %.

Согласно таблице, АДМ-У8А-композиция имеет слабую анизотропию ($E^{(k)}/E^{(0)} \approx 3$, $1 \leq k \leq K$). Традиционно считается, что расчеты упругого изгибного поведения КМ-пластин со слабой анизотропией вполне достаточно проводить по классической теории [19, 21]. Поведение же кривых на рис. 3, *a* демонстрирует, что в случае динамического упругопластического изгибного деформирования 3D-армированных пластин со слабой анизотропией даже неклассическая теория Редди при расчетных временах порядка 0.1 с и более не гарантирует получения надежных результатов определения прогибов. А значит, необходимо использовать более точные теории изгиба.

На рис. 4 приведены зависимости $w_0(t)$ для стеклопластиковых пластин с разными структурами армирования, рассчитанные при $p_{\max} = 5$ МПа и $b = 50$ см. Кривые 1 определены по уточной теории ($M = 7$) для конструкции с 4D-армированием, а линии 2 — по теории Редди для пластины с той же структурой 4D-армирования (рис. 4, *a*) или по уточненной теории для пластины с плоской 2D-структурой (рис. 4, *b*).

Анизотропия стеклопластиковой композиции является сильно выраженной ($E^{(k)}/E^{(0)} = 31$, $1 \leq k \leq K$). Сравнение кривых 1 и 2 на рис. 4, *a* показывает, что и в случае 4D-армирования относительно тонкой пластины зависимость $w_0(t)$, рассчитанная по теории Редди (кривая 2), при $t > 110$ мс существенно отличается от $w_0(t)$, определенной по уточненной теории (кривая 1).

Сопоставление кривых на рис. 4, *b* свидетельствует о том, что замена плоской структуры 2D-армирования на пространственную 4D-структуру в случае относительно тонких стеклопластиковых пластин также практически не приводит к уменьшению максимального значения прогиба, который по-прежнему достигается на первой осцилляции. Кроме того, такая замена структуры армирования не позволяет заметно уменьшить и максимальное значение интенсивности деформаций в связующем материале.

Выше исследовались относительно тонкие КМ-пластины ($h/b = 1/50$). На рис. 5, 6 изображены зависимости $w_0(t)$ и $\varepsilon_m^{(0)}(t) = \max_{\mathbf{r}} \varepsilon_*^{(0)}(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{x} \in G$, $|x_3| \leq h$, где $\varepsilon_*^{(0)}$ — интенсивность деформаций в связующем, рассчитанные при $p_{\max} = 6$ МПа и $b = 10$ см (относительно толстые пластины из стеклопластика: $h/b = 1/10$). Кривые с номерами 1 получены для конструкций с 4D-армированием, а кривые с номерами 2 — с плоским 2D-армированием. Сплошные кривые, номера которых помечены одним штрихом, определены

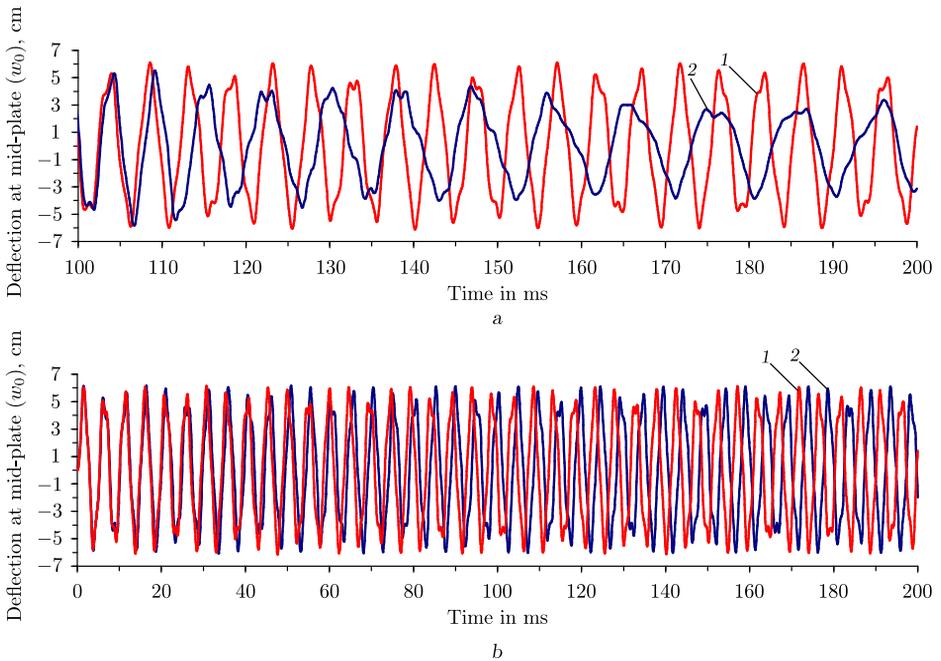


Рис. 4. Осцилляции центральных точек тонких стеклопластиковых пластин с разными структурами: а) 4D-армирование; расчет по уточненной теории и по теории Редди; б) 2D- и 4D-армирование; расчет по уточненной теории

[Figure 4. Oscillations of the central points of thin fiberglass flexible plates with different structures: a) spatial 4D reinforcement; line 1—calculation by refined theory, line 2—calculation Reddy theory; b) line 1—spatial 4D reinforcement, line 2—flat-cross 2D reinforcement; calculation by refined theory]

по уточненной теории ($M = 7$), а штриховые кривые, номера которых помечены двумя штрихами, — по теории Редди ($M = 0$). Сравнение кривых $2'$ и $2''$ на рис. 5, а показывает, что в случае плоского 2D-армирования относительно толстых стеклопластиковых пластин расчеты прогибов по уточненной теории и по теории Редди начинают заметно различаться уже в окрестности начального момента времени (при $t > 2$ мс). Поведение же кривых $1'$ и $1''$ на рис. 5, а свидетельствует о том, что в случае пространственного 4D-армирования это различие не столь заметно, но с увеличением расчетного интервала времени также начинает проявляться и к моменту времени $t = 100$ мс это различие становится существенным (см. рис. 5, б).

В еще большей степени это различие проявляется при сравнении зависимостей $\varepsilon_m^{(0)}(t)$. Действительно, из сравнения кривых $2'$ и $2''$ на рис. 6 видно, что в случае 2D-армирования теория Редди завышает расчетное значение $\max_{t \geq t_0} \varepsilon_m^{(0)} = \max_{t \geq t_0} \varepsilon_m^{(0)}(t)$ (кривая $2''$) по сравнению с аналогичной величиной, определенной по уточненной теории (кривая $2'$), на 18.4%. Наоборот, из сравнения кривых $1'$ и $1''$ на рис. 6 следует, что в случае 4D-армирования теория Редди занижает величину $\max \varepsilon_m^{(0)}$ на 10.8% по сравнению с уточненным расчетом.

Сопоставление кривых $1'$ и $2'$ на рис. 5, а свидетельствует о том, что в случае относительно толстой стеклопластиковой пластины замена плос-

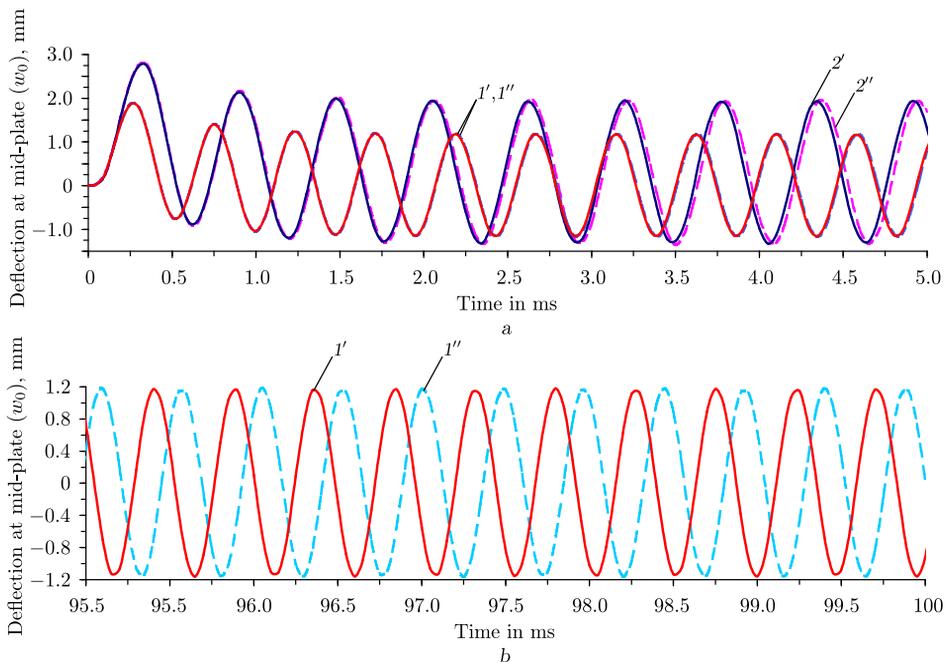


Рис. 5. Зависимости от времени поперечных колебаний центральных точек относительно толстых стеклопластиковых пластин с 2D- и 4D-структурами армирования, рассчитанные по разным теориям в окрестности начального момента времени (a) и $t = 100$ мс (b)

[Figure 5. Oscillations of the central points of thick fiberglass plates with different structures calculated by different theories: a) data for initial moment of time, b) data for moment of time $t = 100$ ms; line 1'—calculation by refined theory for spatial 4D reinforcement, line 1''—calculation by Reddy theory for spatial 4D reinforcement, line 2'—calculation by refined theory for flat-cross 2D reinforcement, line 2''—calculation by Reddy theory for flat-cross 2D reinforcement]

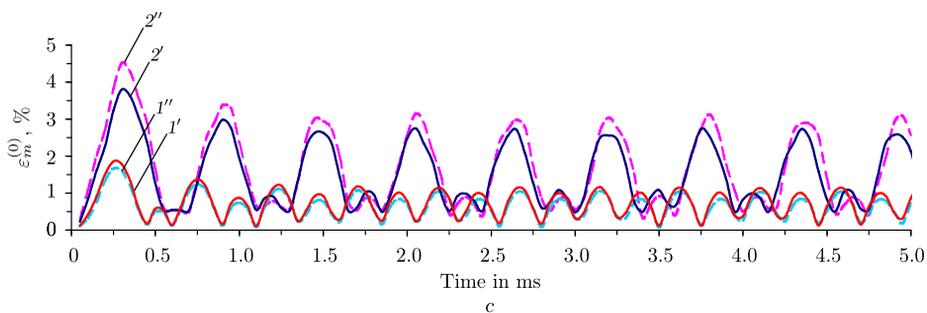


Рис. 6. Зависимости от времени наибольших значений интенсивности деформаций в связующем

[Figure 6. Oscillations of the greatest strain intensity of the binding structure for thick fiberglass plates; line 1'—calculation by refined theory for spatial 4D reinforcement, line 1''—calculation by Reddy theory for spatial 4D reinforcement, line 2'—calculation by refined theory for flat-cross 2D reinforcement, line 2''—calculation by Reddy theory for flat-cross 2D reinforcement]

кой структуры 2D-армирования на пространственную структуру 4D-армирования приводит к уменьшению максимального значения прогиба на 47.3%, а сравнение кривых I' и $2'$ на рис. 6 показывает, что такая замена структуры армирования приводит к уменьшению величины $\max \varepsilon_m^{(0)}$ в два раза.

При упругопластическом деформировании КМ-пластины величину $\max \varepsilon_m^{(0)}$ можно рассматривать как меру поврежденности материала связующей матрицы, поэтому чем больше значение $\max \varepsilon_m^{(0)}$, тем больше повреждено связующее. Согласно поведению кривых на рис. 6, существенно меньшую поврежденность связующего имеет относительно толстая пластина с пространственной структурой 4D-армирования, причем она же имеет и наименьшую податливость в поперечном направлении (см. рис. 5, а).

Заключение. Сравнительный анализ изгибного динамического упругопластического деформирования пластин с пространственными и плоскими структурами армирования продемонстрировал, что в случаях относительно толстых КМ-пластин с сильно выраженной анизотропией композиции (стеклопластики) замена плоской структуры 2D-армирования (рис. 1, а) на пространственную структуру 4D-армирования (рис. 1, с) с сохранением общего расхода волокон позволяет уменьшить максимальные значения прогиба такой конструкции почти в 1.5 раза, а максимальные значения интенсивности деформаций в связующем — в два раза. В случаях относительно тонких пластин замена плоской 2D-структуры армирования на пространственные структуры 3D- (рис. 1, b) и 4D-армирования практически не приводит к уменьшению их податливости в поперечном направлении как при использовании композиций со слабой анизотропией (металлокомпозиты), так и при использовании композиций с сильно выраженной анизотропией (стеклопластики). Однако такая замена структуры армирования все-таки может приводить к уменьшению максимальных значений интенсивности деформаций в связующем материале на десятки процентов.

Проведенные расчеты показали, что при исследовании неупругого динамического поведения гибких КМ-пластин как с пространственными, так и плоскими структурами армирования традиционно используемая неклассическая теория Редди может приводить к результатам расчетов, которые существенно отличаются от полученных на основе уточненных теорий изгиба как для относительно тонких, так и для относительно толстых конструкций, причем как в случаях сильно-, так и в случаях слабовыраженной анизотропии композиции. С увеличением расчетных интервалов времени это различие значительно возрастает, поэтому для получения адекватных результатов расчетов неупругого динамического поведения гибких КМ-пластин целесообразно использовать более точные по сравнению с теорией Редди модели изгибного деформирования таких элементов конструкций.

Конкурирующие интересы. У меня нет конфликта интересов в авторстве и публикации этой статьи.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2017–2020 годы (проект № 23.4.1 «Механика деформирования и разрушения материалов, сред при механических нагрузках, воздействии физических полей и химически активных сред»).

Библиографический список

1. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // *Composite Structures*, 2010. vol. 93, no. 1. pp. 14–31. doi: [10.1016/j.compstruct.2010.05.014](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014).
2. Zhu F., Wang Z., Lu G., Nurick G. Some theoretical considerations on dynamic response of sandwich structures under impulsive loading // *Int. J. Impact Eng.*, 2010. vol. 37, no. 6. pp. 625–637. doi: [10.1016/j.ijimpeng.2009.11.003](https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2009.11.003).
3. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // *Int. J. Nonlin. Mech.*, 2011. vol. 46, no. 5. pp. 807–817. doi: [10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011).
4. Gill S. K., Gupta M., Satsangi P. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites // *Front. Mech. Eng.*, 2013. vol. 8, no. 2. pp. 187–200. doi: [10.1007/s11465-013-0262-x](https://doi.org/10.1007/s11465-013-0262-x).
5. Gibson R. F. *Principles of composite material mechanics*. New York: Taylor & Francis Group, 2015. 815 pp.
6. Тарнопольский Ю. М., Жигун И. Г., Поляков В. А. *Пространственно-армированные композиционные материалы*: Справочник. М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
7. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites // *Mech. Compos. Mater.*, 2009. vol. 45, no. 2. pp. 241–254. doi: [10.1007/s11029-009-9072-y](https://doi.org/10.1007/s11029-009-9072-y).
8. Mohamed M. H., Bogdanovich A. E., Dickinson L. C., Singletary J. N., Lienhart R. R. A new generation of 3D woven fabric performs and composites // *SAMPE J.*, 2001. vol. 37, no. 3. pp. 3–17.
9. Тарнопольский Ю. М., Поляков В. А., Жигун И. Г. Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 1. Расчет упругих характеристик // *Механика полимеров*, 1973. № 5. С. 853–860.
10. Жигун И. Г., Душин М. И., Поляков В. А., Якушин В. А. Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 2. Экспериментальное изучение // *Механика полимеров*, 1973. № 6. С. 1011–1018.
11. Крегерс А. Ф., Тетерс Г. А. Структурная модель деформирования анизотропных, пространственно армированных композитов // *Механика композитных материалов*, 1982. № 1. С. 14–22.
12. Янковский А. П. Определение термоупругих характеристик пространственно армированных волокнистых сред при общей анизотропии материалов компонент композиции. 1. Структурная модель // *Механика композитных материалов*, 2010. Т. 46, № 5. С. 663–678.
13. Соломонов Ю. С., Георгиевский В. П., Недбай А. Я., Андриюшин В. А. *Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек*. М.: Физматлит, 2014. 408 с.
14. Янковский А. П. Применение явного по времени метода центральных разностей для численного моделирования динамического поведения упругопластических гибких армированных пластин // *Вычислительная механика сплошных сред*, 2016. Т. 9, № 3. С. 279–297. doi: [10.7242/1999-6691/2016.9.3.24](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.3.24).
15. Reissner E. The effect of transverse shear deformations on the bending of elastic plates // *J. Appl. Mech.*, 1945. vol. 12, no. 2. pp. 69–77.
16. Vasiliev V. V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Amsterdam: Elsevier, 2013. xii+412 pp.
17. Абросимов Н. А., Баженов В. Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций*. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.

18. Богданович А. Е. *Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек*. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
19. Амбарцумян С. А. *Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания*. М.: Наука, 1987. 360 с.
20. Reddy J. N. *Mechanics of laminated composite plates. Theory and analysis*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2004. xxiii+831 pp.
21. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. *Сопротивление жестких полимерных материалов*. Рига: Зинатне, 1972. 500 с.
22. Belkaid K., Tati A., Boumaraf R. A simple finite element with five degrees of freedom based on Reddy's third-order shear deformation theory // *Mech. Compos. Mater.*, 2016. vol. 52, no. 2. pp. 367–384. doi: [10.1007/s11029-016-9578-z](https://doi.org/10.1007/s11029-016-9578-z).
23. Янковский А. П. Построение уточненной модели упругопластического поведения гибких армированных пластин при динамическом нагружении // *Механика композитных материалов и конструкций*, 2017. Т. 23, № 2. С. 283–304. doi: [10.25590/mkmk.ras.2017.23.02.283_304.10](https://doi.org/10.25590/mkmk.ras.2017.23.02.283_304.10).
24. Whitney J., Sun C. A higher order theory for extensional motion of laminated composites // *J. Sound Vibration*, 1973. vol. 30, no. 1. pp. 85–97. doi: [10.1016/S0022-460X\(73\)80052-5](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(73)80052-5).
25. Зубчанинов В. Г. *Механика процессов пластических сред*. М.: Физматлит, 2010. 352 с.
26. Иванов Г. В., Волчков Ю. М., Богульский И. О., Анисимов С. А., Кургузов В. Д. *Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел*. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2002. 352 с.
27. Векуа И. Н. *Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек*. М.: Наука, 1982. 268 с.
28. Houlston R., DesRochers C. G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // *Computers & Structures*, 1987. vol. 26, no. 1–2. pp. 1–15. doi: [10.1016/0045-7949\(87\)90232-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X).
29. *Композиционные материалы*: Справочник / ред. Д. М. Карпинос. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.
30. *Handbook of Composites* / ed. G. Lubin. New York: Springer, 1982. xi+786 pp. doi: [10.1007/978-1-4615-7139-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4615-7139-1).

MSC: 74K20

Modeling of elastoplastic behavior of flexible spatially reinforced plates under refined theory of bending

A. P. Yankovskii

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
4/1, Institutskaya st., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.

Abstract

On the basis of the time-steps algorithm the structural model is constructed for elastic-plastic deformation of bended plates with spatial reinforcement structures. The inelastic behavior of the composition phase materials is described by equations of the theory of plastic flow with isotropic hardening. The possible weakened resistance of the reinforced plates to the transverse shear is taken into account on the basis of the refined theory, from which the relations of the Reddy theory are obtained in the first approximation. The geometric nonlinearity of the problem is considered in the Karman approximation. The solution of the formulated initial boundary value problems is based on an explicit numerical “cross” scheme. The dynamic inelastic deformation of spatially- and flat-cross-reinforced metal-composite and fiberglass flexible plates of different relative thickness is investigated in the case of the load caused by an air blast wave. It is demonstrated that for relatively thick fiberglass plates, the replacement of the flat-cross reinforcement structure by the spatial structure with the preservation of the total fiber consumption leads to a decrease in the structural flexibility in the transverse direction by almost 1.5 times, as well as to a decrease of the maximum of intensity of deformation in the binder by half. For relatively thin both fiberglass and metal-composite plates, the replacement of flat-cross 2D reinforcement structure with 3D and 4D spatial structures does not lead to a noticeable decrease in their deflections, but allows to reduce the intensity of deformations in the binder by 10% or more. It is shown that the widely used non-classical Reddy theory does not allow obtaining reliable results of calculations of the elastic-plastic dynamic behavior of the bended plates, both with plane and spatial reinforcement structures, even with a small relative thickness of the structures and weak anisotropy of the composition.

Keywords: composite plate, spatial-cross reinforcement, flat-cross reinforcement, Reddy theory, refined theory of bending, elastic-plastic deformation, geometric nonlinearity, explosive load, “cross” scheme.

Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Yankovskii A. P. Modeling of elastoplastic behavior of flexible spatially reinforced plates under refined theory of bending, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 1, pp. 90–112. doi: [10.14498/vsgtu1644](https://doi.org/10.14498/vsgtu1644) (In Russian).

Author’s Details:

Andrei P. Yankovskii  <https://orcid.org/0000-0002-2602-8357>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Leading Research Scientist; Lab. of Fast Processes Physics;
e-mail: lab4nemir@rambler.ru

Received: 18th September, 2018 / Revised: 11th February, 2019 /
 Accepted: 4th March, 2019 / First online: 20th March, 2019

Competing interests. I hereby declare that I have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Author’s Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The research was (partly) carried out within the framework Program of the fundamental scientific research of the state academies of sciences for the years 2017–2020 (project no. 23.4.1 “Mechanics of deformation and destruction of materials, media, under mechanical loads, the influence of physical fields and chemically active media”).

References

1. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009, *Composite Structures*, 2010, vol. 93, no. 1, pp. 14–31. doi: [10.1016/j.compstruct.2010.05.014](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014).
2. Zhu F., Wang Z., Lu G., Nurick G. Some theoretical considerations on dynamic response of sandwich structures under impulsive loading, *Int. J. Impact Eng.*, 2010, vol. 37, no. 6, pp. 625–637. doi: [10.1016/j.ijimpeng.2009.11.003](https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2009.11.003).
3. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses, *Int. J. Nonlin. Mech.*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 807–817. doi: [10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011).
4. Gill S. K., Gupta M., Satsangi P. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites, *Front. Mech. Eng.*, 2013, vol. 8, no. 2, pp. 187–200. doi: [10.1007/s11465-013-0262-x](https://doi.org/10.1007/s11465-013-0262-x).
5. Gibson R. F. *Principles of composite material mechanics*. New York, Taylor & Francis Group, 2015, 815 pp.
6. Tarnopol’skii Yu. M., Zhigun I. G., Polyakov V. A. *Prostranstvenno-armirovannye kompozitsionnye materialy* [Spatially Reinforced Composite Materials]. Moscow, Mashinostroenie, 1987, 224 pp. (In Russian)
7. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites, *Mech. Compos. Mater.*, 2009, vol. 45, no. 2, pp. 241–254. doi: [10.1007/s11029-009-9072-y](https://doi.org/10.1007/s11029-009-9072-y).
8. Mohamed M. H., Bogdanovich A. E., Dickinson L. C., Singletary J. N., Lienhart R. R. A new generation of 3D woven fabric performs and composites, *SAMPE J.*, 2001, vol. 37, no. 3, pp. 3–17.
9. Composite materials reinforced with a system of three straight, mutually orthogonal fibers. I. Calculation of the elastic characteristics, *Polymer Mechanics*, 1973, vol. 9, no. 5, pp. 754–759. doi: [10.1007/BF00856271](https://doi.org/10.1007/BF00856271).
10. Composites reinforced with a system of three straight mutually orthogonal fibers. 2. Experimental study, *Polymer Mechanics*, 1973, vol. 9, no. 6, pp. 895–900. doi: [10.1007/BF00856974](https://doi.org/10.1007/BF00856974).
11. Kregers A. F., Teters G. A. Structural model of deformation of anisotropic three-dimensionally reinforced composites, *Mech. Compos. Mater.*, 1982, vol. 18, no. 1, pp. 10–17. doi: [10.1007/BF00605085](https://doi.org/10.1007/BF00605085).
12. Yankovskii A. P. Determination of the thermoelastic characteristics of spatially reinforced fibrous media in the case of general anisotropy of their components. 1. Structural model, *Mech. Compos. Mater.*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 451–460. doi: [10.1007/s11029-010-9162-x](https://doi.org/10.1007/s11029-010-9162-x).
13. Solomonov Yu. S., Georgievskii V. P., Nedbai A. Ya., Andryushin V. A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek* [Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells]. Moscow, Fizmatlit, 2014, 408 pp. (In Russian)

14. Yankovskii A. P. Using of explicit time-central difference method for numerical simulation of dynamic behavior of elasto-plastic flexible reinforced plates, *Computational Continuum Mechanics*, 2016, vol. 9, no. 3, pp. 279–297 (In Russian). doi: [10.7242/1999-6691/2016.9.3.24](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.3.24).
15. Reissner E. The effect of transverse shear deformations on the bending of elastic plates, *J. Appl. Mech.*, 1945, vol. 12, no. 2, pp. 69–77.
16. Vasiliev V. V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Amsterdam, Elsevier, 2013, xii+412 pp.
17. Abrosimov N. A., Bazhenov V. G. *Nelineinye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksii* [Nonlinear problems of the dynamics of composite structures]. Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod State Univ., 2002, 400 pp. (In Russian)
18. Bogdanovich A. E. *Nelineinye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek* [Nonlinear Problems in the Dynamics of Cylindrical Composite Shells]. Riga, Zinatne, 1987, 295 pp. (In Russian)
19. Ambartsumyan S. A. *Theory of Anisotropic Plates: Strength, Stability, and Vibration*. Stamford, Conn., Technomic Pub., 1970, viii+248 pp.
20. Reddy J. N. *Mechanics of laminated composite plates. Theory and analysis*. Boca Raton, FL, CRC Press, 2004, xxiii+831 pp.
21. Malmeister A. K., Tamuzh V. P., Teters G. A. *Soprotivlenie zhestkikh polimernykh materialov* [Strength of Polymer and Composite Materials]. Riga, Zinatne, 1972, 500 pp. (In Russian)
22. Belkaid K., Tati A., Boumaraf R. A simple finite element with five degrees of freedom based on Reddy's third-order shear deformation theory, *Mech. Compos. Mater.*, 2016, vol. 52, no. 2, pp. 367–384. doi: [10.1007/s11029-016-9578-z](https://doi.org/10.1007/s11029-016-9578-z).
23. Yankovskii A. P. Construction of refined model of elastic-plastic behavior of flexible reinforced plates under dynamic loading, *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2017, vol. 23, no. 2, pp. 283–304 (In Russian). doi: [10.25590/mkmk.ras.2017.23.02.283_304.10](https://doi.org/10.25590/mkmk.ras.2017.23.02.283_304.10).
24. Whitney J., Sun C. A higher order theory for extensional motion of laminated composites, *J. Sound Vibration*, 1973, vol. 30, no. 1, pp. 85–97. doi: [10.1016/S0022-460X\(73\)80052-5](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(73)80052-5).
25. Zubchaninov V. G. *Mekhanika protsessov plasticheskikh sred* [Mechanics Processes of Plastic Media]. Moscow, Fizmatlit, 2010, 352 pp. (In Russian)
26. Ivanov G. V., Volchkov Yu. M., Bogul'skii I. O., Anisimov S. A., Kurguzov V. D. *Chislennoe reshenie dinamicheskikh zadach uprugoplasticheskogo deformirovaniia tverdykh tel* [Solving Numerically Dynamic Problems of Elastoplastic Deformation of Solids]. Novosibirsk, Sib. Univ. Izd-vo, 2002, 352 pp. (In Russian)
27. Vekua I. N. *Shell theory: general methods of construction*, Monographs, Advanced Texts and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 25. New York, John Wiley & Sons. Inc., 1985, xvi+287 pp.
28. Houlston R., DesRochers C. G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading, *Computers & Structures*, 1987, vol. 26, no. 1–2, pp. 1–15. doi: [10.1016/0045-7949\(87\)90232-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X).
29. *Kompozitsionnye materialy* [Composite Materials. Handbook], ed. D. M. Karpinos. Kiev, Naukova Dumka, 1985, 592 pp. (In Russian)
30. *Handbook of Composites*, ed. G. Lubin. New York, Springer, 1982, xi+786 pp. doi: [10.1007/978-1-4615-7139-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4615-7139-1).