



УДК 521.182

Сравнение различных математических моделей на примере решения уравнений движения больших планет и Луны



А. Ф. Заусаев, М. А. Романюк

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Проведено исследование точности решения различных дифференциальных уравнений, описывающих движение больших планет, Луны и Солнца. На интервале времени с 31 года до нашей эры по 3969 год нашей эры проведено численное интегрирование ньютоновых, релятивистских дифференциальных уравнений и уравнений, полученных на основе взаимодействия окружающего пространства с движущимися материальными телами. Выявлена область применимости рассмотренных дифференциальных уравнений для исследуемых объектов. Путем сравнения координат Луны, найденных с помощью решения различных дифференциальных уравнений и банка данных DE405, показано, что наибольшая точность в элементах орбит больших планет и Луны достигается путем решения дифференциальных уравнений, полученных на основе взаимодействия окружающего пространства с движущимися материальными телами. Решение релятивистских уравнений обеспечивает высокую точность элементов орбит для Меркурия и внешних планет на всем интервале интегрирования. Однако для остальных внутренних планет и Луны точность элементов орбит, полученных с помощью решения релятивистских уравнений, сопоставима с точностью, полученной путем решения ньютоновых уравнений. Полагается, что использование гармонической системы координат является обоснованным лишь для Меркурия с точки зрения скорости векового смещения долготы его перигелия, однако для других внутренних планет (Венеры, Земли+Луны и Марса) скорости вековых смещений долгот перигелиев оказываются завышенными. Показано, что решение дифференциальных уравнений, полученных на основе взаимодействия окружающего пространства с движущимися материальными телами, обеспечивает более высокую точность по сравнению с решениями ньютоновых и релятивистских уравнений получения

Научная статья

  Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Заусаев А. Ф., Романюк М. А. Сравнение различных математических моделей на примере решения уравнений движения больших планет и Луны // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 1. С. 152–185. doi: [10.14498/vsgtu1663](https://doi.org/10.14498/vsgtu1663).

Сведения об авторах

Анатолий Федорович Заусаев  <https://orcid.org/0000-0002-5035-9615>

доктор физико-математических наук; профессор; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: zausaev_af@mail.ru

Мария Анатольевна Романюк  <https://orcid.org/0000-0003-0796-2061>

кандидат технических наук; доцент; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: zausmasha@mail.ru

элементов орбит для всех рассматриваемых объектов на исследуемом интервале времени.

Ключевые слова: элементы орбит, численное интегрирование, дифференциальные уравнения движения.

Получение: 6 декабря 2018 г. / Исправление: 27 февраля 2019 г. /
Принятие: 4 марта 2019 г. / Публикация онлайн: 15 марта 2019 г.

Целью данной работы является сравнение различных математических моделей, описывающих движение небесных тел в Солнечной системе. К таким моделям относятся: дифференциальные уравнения движения в ньютоновой форме, релятивистские уравнения движения и уравнения, основанные на взаимодействии окружающего пространства с движущимися материальными телами.

Дифференциальные уравнения движения в ньютоновой форме в задаче n тел в прямоугольных координатах с началом в центре масс всей системы n материальных точек имеют следующий вид [1,2]:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dt^2} = \sum_i k^2 m_i \left(\frac{X_i - X}{\Delta_i^3} \right), \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} = \sum_i k^2 m_i \left(\frac{Y_i - Y}{\Delta_i^3} \right), \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} = \sum_i k^2 m_i \left(\frac{Z_i - Z}{\Delta_i^3} \right), \end{cases} \quad (1)$$

где $\Delta_i^2 = (X_i - X)^2 + (Y_i - Y)^2 + (Z_i - Z)^2$; X, Y, Z — барицентрические координаты возмущаемого тела, а m_i, X_i, Y_i, Z_i — массы и барицентрические координаты возмущающих тел.

Дифференциальные уравнения движения в барицентрической системе координат с учетом релятивистских членов представляются в виде [3]

$$\begin{aligned} \ddot{r}_i = \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j (r_j - r_i)}{r_{ij}^3} \left\{ 1 - \frac{2(\beta + \gamma)}{c^2} \sum_{k \neq i} \frac{\mu_k}{r_{ik}} - \frac{2\beta - 1}{c^2} \sum_{k \neq j} \frac{\mu_k}{r_{jk}} + \gamma \left(\frac{v_i}{c} \right)^2 + \right. \\ \left. + (1 + \gamma) \left(\frac{v_j}{c} \right)^2 - \frac{2(1 + \gamma)}{c^2} \dot{r}_i \dot{r}_j - \frac{3}{2c^2} \left[\frac{(r_i - r_j) \dot{r}_i}{r_{ij}} \right]^2 + \frac{1}{2c^2} (r_j - r_i) \ddot{r}_j \right\} + \\ + \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} (r_i - r_j) [(2 + 2\gamma) \dot{r}_i - (1 + 2\gamma) \dot{r}_j] (\dot{r}_i - \dot{r}_j) + \\ + \frac{3 + 4\gamma}{2c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j \ddot{r}_j}{r_{ij}} + \sum_{m=1}^n \frac{\mu_m (r_m - r_i)}{r_{im}^3}, \quad (2) \end{aligned}$$

где $r_i, \dot{r}_i, \ddot{r}_i$ — координаты, скорости, ускорения в барицентрической системе координат i -того тела; $\mu_j = k^2 m_j$, k^2 — гравитационная постоянная, m_j — масса j -того тела; $r_{ij} = |r_j - r_i|$; релятивистские параметры β и γ в заданной

системе координат принимают следующие значения: $\beta = \gamma = 1$, $v_i = |\dot{r}_i|$; c — скорость света.

При вычислении координат Луны наряду с гравитационными и релятивистскими эффектами учитывается влияние несферичности фигур Земли и Луны в математической модели. Дифференциальные уравнения для учета ускорения Луны в геоцентрической системе координат $(\xi\eta\zeta)$ имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{bmatrix} = -\frac{\mu}{r^2} \left\{ \sum_{n=1}^{n_1} J_n \left(\frac{a}{r} \right)^n \begin{bmatrix} (n+1) P_n(\sin \varphi) \\ 0 \\ -\cos \theta P'_n(\sin \varphi) \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{n_2} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=1}^n \begin{bmatrix} -(n+1) P_n^m(\sin \varphi) [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] \\ m \sec \varphi P_n^m(\sin \varphi) [-C_{nm} \sin m\lambda + S_{nm} \cos m\lambda] \\ \cos \varphi P_n^m(\sin \varphi) [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] \end{bmatrix} \right\}, \quad (3) \end{aligned}$$

где ось ξ направлена из начала координат в центр Луны; ось η перпендикулярна оси ξ и направлена на восток; ось ζ перпендикулярна плоскости $\xi\eta$ и направлена на север; μ — гравитационная постоянная, умноженная на массу Земли; r — расстояние между центрами масс двух тел; n_1 и n_2 — максимальные степени зональных и тессеральных гармоник несферичных тел соответственно; $P_n(\sin \varphi)$ — полином Лежандра степени n ; $P_n^m(\sin \varphi)$ — присоединенный полином Лежандра степени n и порядка m ; J_n — зональные гармоники от несферичности тела; C_{nm} , S_{nm} — коэффициенты тессеральных гармоник; φ — широта притягиваемого тела в фиксированной системе координат $\xi\eta\zeta$; λ — восточная долгота притягиваемого тела.

Дифференциальные уравнения движения, основанные на взаимодействии окружающего пространства с движущимися материальными телами в барицентрической системе координат, имеют следующий вид [4–7]:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dt^2} = \sum_i \left(\frac{X_i - X}{\Delta_i} \right) \frac{3a_{0i} r_{0i}^2}{\Delta_i^2 + \Delta_i \sqrt{\Delta_i^3 - r_{0i}^3} + \sqrt{(\Delta_i^3 - r_{0i}^3)^2}}, \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} = \sum_i \left(\frac{Y_i - Y}{\Delta_i} \right) \frac{3a_{0i} r_{0i}^2}{\Delta_i^2 + \Delta_i \sqrt{\Delta_i^3 - r_{0i}^3} + \sqrt{(\Delta_i^3 - r_{0i}^3)^2}}, \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} = \sum_i \left(\frac{Z_i - Z}{\Delta_i} \right) \frac{3a_{0i} r_{0i}^2}{\Delta_i^2 + \Delta_i \sqrt{\Delta_i^3 - r_{0i}^3} + \sqrt{(\Delta_i^3 - r_{0i}^3)^2}}, \end{cases} \quad (4)$$

где Δ_i — расстояние от начала координат до материального объекта; r_{0i} — эффективный радиус i -того тела; a_{0i} — соответствующее ускорение для i -того тела на расстоянии r_{0i} от центра массы; X , Y , Z — барицентрические координаты возмущаемого тела; X_i , Y_i , Z_i — барицентрические координаты возмущающих тел.

В настоящее время разработан ряд высокоточных численных теорий движения больших планет [8–17]. Наиболее известной из них является численная теория [3], созданная сотрудниками НАСА Ньюхалом (X. X. Newhall), Стендиншем (E. M. Standish), Вильямсом (J. G. Williams). Ими создан банк данных координат больших планет, Луны и Солнца — DE405 на интервале

времени с 2305424.5 J.D. (1599 Dec 9) по 2525008.5 J.D. (2201 Feb 20). Координаты планет в банке данных хранятся в форме коэффициентов полиномов Чебышева, которые обеспечивают достаточно плотную форму записи на диске. Координаты и скорости внутренних планет, полученные с помощью банка данных DE405, согласованы с радиолокационными наблюдениями, а все планеты согласованы с оптическими наблюдениями.

Под эффективностью математической модели в дальнейшем понимается быстрдействие и точность результатов решения, полученных на основе использования данной модели.

Проверка эффективности математических моделей, описываемых дифференциальными уравнениями (1)–(4), проводилась путем сравнения результатов вычисления, полученных на их основе, с банком данных DE405.

С целью проверки эффективности математической модели, описывающей движение больших планет, Луны и Солнца системой дифференциальных уравнений (4), нами проведены исследования движения этих объектов на интервале времени с 1602 по 2193 гг. и результаты вычислений сопоставлены с банком данных DE405. Для исследования развития погрешностей математических моделей методом Эверхарта проведено численное интегрирование уравнений движения данных объектов на более длительный период времени, охватывающий интервал с 7 марта 31 г. до н.э. по 21 октября 3969 г. н.э. [18].

Важно знать, насколько результаты вычислений координат и компонент скоростей планет, Луны и Солнца, полученные с помощью описанных здесь математических моделей, согласуются друг с другом.

Наиболее сложным объектом для исследования движения являются Меркурий и Луна, поэтому из рассматриваемых математических моделей следует отдать предпочтение модели, с помощью которой лучше всего представлено движение этих объектов.

В табл. 1 на интервале времени с 1602 по 2193 гг. представлены координаты и компоненты скоростей Меркурия. Данные координат и компонент скоростей приведены на 0 часов гринвичского времени соответствующей даты, при этом в первой строке — данные банка DE405, во второй строке таблицы — координаты и компоненты скоростей, полученные путем решения уравнений (4).

В табл. 2 приведены элементы орбит Меркурия. Здесь M — средняя аномалия (в градусах), a — большая полуось (в а.е.), e — эксцентриситет, ω — аргумент перигелия (в градусах), Ω — долгота восходящего узла (в градусах), i — наклонение (в градусах). В первой строке табл. 2 — элементы орбит Меркурия, найденные по данным банка DE405, во второй и третьей строках — полученные путем решения уравнений (4) и (1).

Из сопоставления элементов орбит, найденных с помощью решения уравнений (4) и банка данных DE405, следует, что различие в элементах орбит находится в пределах ошибок наблюдений.

В табл. 3 представлены элементы орбит Меркурия на интервале времени 4000 лет с 7 марта 31 г. до н.э. по 21 октября 3969 г. н.э. В первой, второй и третьей строках — элементы орбит Меркурия, полученные путем решения уравнений (4), (2) и (1) соответственно.

Сравнение координат и элементов орбит Меркурия, полученных с помощью решения уравнений (2) и (4) (см. табл. 1–3), указывает на удовлетво-

Координаты и компоненты скоростей Меркурия, вычисленные по DE405 и с помощью решения уравнений (4)
 Coordinates and velocity components of the Mercury calculated by the DE405 and the Eqs. (4)

Таблица 1

Current date	Data sources (calculated by)	X (in au)	Y (in au)	Z (in au)	\dot{X} (in au/day)	\dot{Y} (in au/day)	\dot{Z} (in au/day)
1602 08 11	by the DE405	-0.0198081	0.4068445	-0.2148856	0.0224551	0.0007397	-0.0019606
JD 2306400.5	by the Eqs. (4)	-0.0198088	0.4068449	-0.2148857	0.0224551	0.0007397	-0.0019606
1701 03 05	by the DE405	0.3366723	-0.1437933	-0.1127282	0.0074835	0.0235400	0.0117803
JD 2342400.5	by the Eqs. (4)	0.3366719	-0.1437940	-0.1127284	0.0074835	0.0235400	0.0117803
1799 09 27	by the DE405	0.0472475	0.2651303	0.1373714	-0.0334593	0.0033352	0.0052703
JD 2378400.5	by the Eqs. (4)	0.0472477	0.2651301	0.1373713	-0.0334593	0.0033352	0.0052703
1898 04 21	by the DE405	-0.3878790	-0.0595675	0.0087525	-0.0020408	-0.023652	-0.0012419
JD 2414400.5	by the Eqs. (4)	-0.3878791	-0.0595675	0.0087525	-0.0020408	-0.023652	-0.0012419
1996 11 13	by the DE405	-0.1550256	-0.3899433	-0.1932507	0.0209929	-0.0059767	-0.0053699
JD 2450400.5	by the Eqs. (4)	-0.1550256	-0.3899433	-0.1932507	0.0209929	-0.0059767	-0.0053699
2095 06 07	by the DE405	0.2786154	-0.2713622	-0.1732480	0.0153830	0.0183374	0.0082076
JD 2486400.5	by the Eqs. (4)	0.2786156	-0.2713622	-0.1732480	0.0153830	0.0183374	0.0082076
2193 06 07	by the DE405	0.2222982	0.2095351	0.0892206	-0.0258345	0.0173614	0.0119439
JD 2522400.5	by the Eqs. (4)	0.2222987	0.2095352	0.0892205	-0.0258345	0.0173614	0.0119439

Таблица 2

Элементы орбит Меркурия, вычисленные по DE405 и формулам (4), (1)
 [The elements of the orbits of the Mercury calculated by the DE405, and by the Eqs. (4), (1)]

Current date	Data sources (calculated by)	M (in degrees)	a (in au)	e	ω (in degrees)	Ω (in degrees)	i (in degrees)
1602 08 11 JD 2306400.5	by the DE405	194.9607	0.3870977	0.2055527	27.9945	48.8278	7.0287
	by the Eqs. (4)	194.9605	0.3870977	0.2055527	27.9945	48.8278	7.0287
	by the Eqs. (1)	194.9745	0.3870977	0.2055527	28.0382	48.8279	7.0287
1701 03 05 JD 2342400.5	by the DE405	278.9902	0.3870983	0.2055658	28.2804	48.7047	7.0227
	by the Eqs. (4)	278.9901	0.3870984	0.2055658	28.2804	48.7047	7.0227
	by the Eqs. (1)	279.0003	0.3870984	0.2055658	28.3124	48.7047	7.0227
1799 09 27 JD 2378400.5	by the DE405	3.0384	0.3870987	0.2055913	28.5565	48.5818	7.0169
	by the Eqs. (4)	3.0383	0.3870988	0.2055915	28.5566	48.5818	7.0169
	by the Eqs. (1)	3.0448	0.3870988	0.2055915	28.5768	48.5818	7.0169
1898 04 21 JD 2414400.5	by the DE405	87.0813	0.3870991	0.2056005	28.8334	48.4581	7.0111
	by the Eqs. (4)	87.0812	0.3870992	0.2056005	28.8334	48.4581	7.0111
	by the Eqs. (1)	87.0840	0.3870992	0.2056005	28.8419	48.4581	7.0111
1996 11 13 JD 2450400.5	by the DE405	171.1156	0.3870975	0.2056409	29.1179	48.3353	7.0051
	by the Eqs. (4)	171.1155	0.3870975	0.2056408	29.1179	48.3353	7.0051
	by the Eqs. (1)	171.1145	0.3870975	0.2056408	29.1147	48.3353	7.0051
2095 06 07 JD 2486400.5	by the DE405	255.1597	0.3870976	0.2056549	29.3959	48.2110	6.9993
	by the Eqs. (4)	255.1598	0.3870977	0.2056549	29.3959	48.2110	6.9993
	by the Eqs. (1)	255.1550	0.3870977	0.2056549	29.3809	48.2110	6.9993
2193 12 30 JD 2522400.5	by the DE405	339.1927	0.3870977	0.2056674	29.6797	48.0869	6.9934
	by the Eqs. (4)	339.1928	0.3870979	0.2056676	29.6797	48.0869	6.9934
	by the Eqs. (1)	339.1842	0.3870979	0.2056675	29.6529	48.0870	6.9934

Таблица 3

Элементы орбит Меркурия, полученные по формулам (4), (2) и (1)
 [The elements of the orbits of the Mercury calculated by the Eqs. (4), (2), and (1)]

Current date	Data sources (calculated by)	M (in degrees)	a (in au)	e	ω (in degrees)	Ω (in degrees)	i (in degrees)
-31 03 07 JD 1709800.5	by the Eqs. (4) by the Eqs. (2) by the Eqs. (1)	228.2249 228.2258 228.3007	0.3870983 0.3870976 0.3870977	0.2052108 0.2052109 0.2052109	23.3831 23.3827 23.6205	50.8434 50.8434 50.8449	7.1258 7.1258 7.1258
969 04 26 JD 2075100.5	by the Eqs. (4) by the Eqs. (2) by the Eqs. (1)	78.0028 78.0032 78.0408	0.3870983 0.3870982 0.3870983	0.2054204 0.2054204 0.2054204	26.2004 26.2002 26.3194	49.6146 49.6146 49.6149	7.0664 7.0664 7.0664
2969 08 24 JD 2805700.5	by the Eqs. (4) by the Eqs. (2) by the Eqs. (1)	137.5432 137.5432 137.5050	0.3871001 0.3871001 0.3871001	0.2058252 0.2058253 0.2058252	31.8915 31.8916 31.7719	47.1066 47.1066 47.1070	6.9473 6.9473 6.9473
3969 10 21 JD 3171000.5	by the Eqs. (4) by the Eqs. (2) by the Eqs. (1)	347.3278 347.3276 347.2510	0.3870987 0.3870987 0.3870988	0.2060198 0.2060196 0.2060202	34.7546 34.7549 34.5150	45.8246 45.8246 45.8261	6.8884 6.8884 6.8884

рительное согласие координат и элементов орбит на всем рассматриваемом интервале интегрирования.

Наибольшие расхождения в элементах орбит Меркурия имеет место 7 марта 31 г. до н.э. В средней аномалии оно составляет 0.0009° (градусов), что соответствует $3''$ (секундам дуги); в большой полуоси — 0.0000007 а.е., что соответствует 104.7 км; в аргументе перигелия — 0.0004° , что соответствует $1''$; остальные элементы орбит практически совпадают. Невязка векового смещения долготы перигелия Меркурия, найденная путем решения уравнений (4) и (1) составляет $42.92''$, а при решении уравнений (2) и (1) $42.99''$. Подобные расхождения в элементах орбит и в вековом смещении перигелия Меркурия, полученных при решении дифференциальных уравнений (4) и (2), не могут быть выявлены с помощью наблюдений, поэтому их можно считать вполне удовлетворительными.

Точность решения релятивистских уравнений существенным образом зависит от выбора системы координат. Для релятивистских уравнений часто используется гармоническая система координат, которая является наиболее подходящей для согласования векового смещения долготы перигелия Меркурия [19–25]. Как показывают проведенные исследования, решение релятивистских уравнений (2) для Меркурия согласуется с решением уравнений (4) на всем исследуемом интервале времени с 31 г. до н.э. по 3969 г. н.э. (см. табл. 1–3). Подобного совпадения решений уравнений (2) и (4) следовало ожидать и для планет Венеры, Земли+Луны и Марса, поскольку их орбиты являются более удаленными от Солнца, чем орбита Меркурия. Однако этого не происходит по причине завышенных скоростей смещения долгот перигелиев этих планет, полученных на основании решения уравнений (2) по сравнению со скоростями, полученными на основании решения уравнений (4).

В табл. 4–9 на интервале времени с 31 г. до н.э. по 3969 г. н.э. представлены элементы орбит и расхождения в элементах для Венеры, Земли+Луны и Марса, найденные с использованием уравнений (4), уравнений (2), путем совместного решения уравнений (2) и (3) и уравнений (1) на четыре момента времени.

Как следует из проведенных вычислений (см. табл. 4–9), расхождения вековых смещений долгот перигелиев Венеры, Земли+Луны и Марса, полученных с помощью решения уравнений (4) и (1), составляют $2.14''$, $0.53''$, $0.07''$. Расхождения, найденные с помощью решения уравнений (2) и (1), составляют $8.58''$, $3.87''$, $1.33''$ соответственно.

В работе [23] отмечается, что ошибки релятивистских поправок в вековом движении перигелиев Венеры и Земли велики и составляют для Венеры $\pm 5.28''$, для Земли $\pm 1.79''$, для Марса $\pm 0.025''$. Расхождения в смещении перигелиев этих планет, найденные с помощью решения уравнений (2) и (4), составляют $6.44''$, $3.34''$, $1.26''$ соответственно. Как следует из результатов вычислений, вековые смещения долгот перигелиев Венеры, Земли+Луны и Марса, найденных путем решения уравнений (4) и (2), различаются на $6.44''$, $3.34''$, $1.26''$ соответственно. Хотя эти различия незначительные и на ограниченных интервалах времени в пределах столетия их трудно обнаружить с помощью наблюдений, с течением времени в силу векового характера движения перигелиев Венеры, Земли+Луны и Марса, имеют место заметные различия элементов орбит, найденных с помощью решений уравнений (4) и (2).

Таблица 4

Элементы орбит Венеры, полученные с помощью различных методов вычисления
[The elements of the orbits of the Venus obtained using various calculation methods]

Current date	Data sources (calculated by)	M (in degrees)	a (in au)	e	ω (in degrees)	Ω (in degrees)	i (in degrees)
-31 03 07 JD 1709800.5	by the Eqs. (4)	39.5049	0.7233359	0.0077807	48.7763	82.2686	3.3985
	by the Eqs. (2)	39.5016	0.7233359	0.0077805	48.7421	82.2686	3.3985
	by the Eqs. (2), (3) by the Eqs. (1)	39.5016 39.5072	0.7233359 0.7233359	0.0077805 0.0077805	48.7421 48.7905	82.2686 82.2685	3.3985 3.3985
969 04 26 JD 2075100.5	by the Eqs. (4)	297.1664	0.7233352	0.0072777	52.0940	79.5320	3.4001
	by the Eqs. (2)	297.1648	0.7233351	0.0072777	52.0770	79.5320	3.4001
	by the Eqs. (2), (3) by the Eqs. (1)	297.1648 297.1679	0.7233351 0.7233352	0.0072777 0.0072777	52.0770 52.1007	79.5320 79.5320	3.4001 3.4001
2969 08 24 JD 2805700.5	by the Eqs. (4)	93.6422	0.7233264	0.0063359	57.6692	73.9732	3.3834
	by the Eqs. (2)	93.6434	0.7233263	0.0063359	57.6867	73.9732	3.3834
	by the Eqs. (2), (3) by the Eqs. (1)	93.6434 93.6398	0.7233263 0.7233264	0.0063359 0.0063358	57.6867 57.6634	73.9732 73.9732	3.3834 3.3834
3969 10 21 JD 3171000.5	by the Eqs. (4)	352.6807	0.7233292	0.0058937	59.7003	71.1451	3.3653
	by the Eqs. (2)	352.6810	0.7233291	0.0058935	59.7376	71.1452	3.3653
	by the Eqs. (2), (3) by the Eqs. (1)	352.6810 352.6745	0.7233291 0.7233292	0.0058935 0.0058935	59.7376 59.6907	71.1452 71.1451	3.3653 3.3653

Таблица 5

Элементы орбит Земли+Луны, полученные с помощью различных методов вычисления

[The elements of the orbits of the Earth & the Moon obtained using various calculation methods]

Current date	Data sources (calculated by)	M (in degrees)	a (in au)	e	ω (in degrees)	Ω (in degrees)	i (in degrees)
-31 03 07 JD 1709800.5	by the Eqs. (4)	93.8283	1.0000063	0.0175522	96.7164	359.7943	0.2687
	by the Eqs. (2)	93.8300	1.0000063	0.0175523	96.6981	359.7948	0.2687
	by the Eqs. (2), (3)	93.8301	1.0000063	0.0175523	96.6985	359.7943	0.2687
	by the Eqs. (1)	93.8293	1.0000063	0.0175522	96.7195	359.7941	0.2687
969 04 26 JD 2075100.5	by the Eqs. (4)	133.7662	1.0000027	0.0171054	102.2445	357.3343	0.1355
	by the Eqs. (2)	133.7672	1.0000026	0.0171055	102.2350	357.3347	0.1355
	by the Eqs. (2), (3)	133.7673	1.0000026	0.0171055	102.2354	357.3343	0.1355
	by the Eqs. (1)	133.7666	1.0000027	0.0171054	102.2461	357.3341	0.1355
2969 08 24 JD 2805700.5	by the Eqs. (4)	213.3090	1.0000168	0.0162732	113.4665	352.5708	0.1256
	by the Eqs. (2)	213.3076	1.0000167	0.0162732	113.4756	352.5712	0.1256
	by the Eqs. (2), (3)	213.3075	1.0000167	0.0162732	113.4760	352.5708	0.1256
	by the Eqs. (1)	213.3085	1.0000168	0.0162732	113.4650	352.5709	0.1256
3969 10 21 JD 3171000.5	by the Eqs. (4)	252.9511	0.9999924	0.0158194	119.2571	350.1358	0.2534
	by the Eqs. (2)	252.9481	0.9999923	0.0158194	119.2759	350.1362	0.2534
	by the Eqs. (2), (3)	252.9480	0.9999923	0.0158194	119.2763	350.1358	0.2534
	by the Eqs. (1)	252.9502	0.9999924	0.0158193	119.2539	350.1360	0.2534

Таблица 6

Элементы орбит Марса, полученные с помощью различных методов вычисления
[The elements of the orbits of the Mars obtained using various calculation methods]

Current date	Data sources (calculated by)	M (in degrees)	a (in au)	e	ω (in degrees)	Ω (in degrees)	i (in degrees)
-31 03 07 JD 1709800.5	by the Eqs. (4)	130.0035	1.5237190	0.0914539	271.6744	55.2973	2.0061
	by the Eqs. (2)	130.0053	1.5237190	0.0914512	271.6673	55.2973	2.0061
	by the Eqs. (2), (3) by the Eqs. (1)	130.0050 130.0057	1.5237190	0.0914538 0.0914539	271.6673 271.6748	55.2973 55.2973	2.0061
969 04 26 JD 2075100.5	by the Eqs. (4)	34.7303	1.5236170	0.0933231	278.8837	52.5377	1.9314
	by the Eqs. (2)	34.7300	1.5236170	0.0933231	278.8802	52.5377	1.9314
	by the Eqs. (2), (3) by the Eqs. (1)	34.7300 34.7304	1.5236170	0.0933231 0.0933231	278.8801 278.8839	52.5377	1.9314
2969 08 24 JD 2805700.5	by the Eqs. (4)	204.1224	1.5236338	0.0942530	293.7593	46.6349	1.7685
	by the Eqs. (2)	204.1226	1.5236337	0.0942542	293.7627	46.6348	1.7685
	by the Eqs. (2), (3) by the Eqs. (1)	204.1227 204.1223	1.5236337 1.5236338	0.0942530 0.0942530	293.7628 293.7591	46.6349 46.6349	1.7685
3969 10 21 JD 3171000.5	by the Eqs. (4)	109.0052	1.5236700	0.0951984	301.2539	43.4829	1.6802
	by the Eqs. (2)	109.0058	1.5236700	0.0952007	301.2607	43.4829	1.6802
	by the Eqs. (2), (3) by the Eqs. (1)	109.0058 109.0050	1.5236700 1.5236700	0.0951983 0.0951984	301.2609 301.2535	43.4829 43.4829	1.6802

Таблица 7

Расхождения в элементах орбит Венеры при численном интегрировании уравнений движения, полученных с помощью различных методов вычисления, от найденных с помощью решения уравнений (4)
 [Discrepancies in the elements of the orbits of the Venus in the numerical integration of the equations of motion obtained using various calculation methods from those found by solving Eqs. (4)]

Current date	Data sources (calculated by)	ΔM (in degrees)	Δa (in au)	Δe	$\Delta \omega$ (in degrees)	$\Delta \Omega$ (in degrees)	Δi (in degrees)
-31 03 07 JD 1709800.5	by the Eqs. (2)	-0.0033	0	-0.0000002	-0.0342	0	0
	by the Eqs. (2), (3)	-0.0033	0	-0.0000002	-0.0342	0	0
	by the Eqs. (1)	0.0023	0	-0.0000002	0.0142	-0.0001	0
969 04 26 JD 2075100.5	by the Eqs. (2)	-0.0016	-0.0000001	0	-0.0170	0	0
	by the Eqs. (2), (3)	-0.0016	-0.0000001	0	-0.0170	0	0
	by the Eqs. (1)	0.0015	0	0	0.0067	0	0
2969 08 24 JD 2805700.5	by the Eqs. (2)	0.0012	-0.0000001	0	0.0175	0	0
	by the Eqs. (2), (3)	0.0012	-0.0000001	0	0.0175	0	0
	by the Eqs. (1)	-0.0024	0	-0.0000001	-0.0058	0	0
3969 10 21 JD 3171000.5	by the Eqs. (2)	0.0003	-0.0000001	-0.0000002	0.0373	0.0001	0
	by the Eqs. (2), (3)	0.0003	-0.0000001	-0.0000002	0.0373	0.0001	0
	by the Eqs. (1)	-0.0062	0	-0.0000002	-0.0096	0	0

Таблица 8

Расхождение в элементах орбит Земли+Луны при численном интегрировании уравнений движения, полученных с помощью различных методов вычисления, от найденных с помощью решения уравнений (4) [Discrepancies in the elements of the orbits of the Earth & the Moon in the numerical integration of the equations of motion obtained using various calculation methods from those found by solving Eqs. (4)]

Current date	Data sources (calculated by)	ΔM (in degrees)	Δa (in au)	Δe	$\Delta \omega$ (in degrees)	$\Delta \Omega$ (in degrees)	Δi (in degrees)
-31 03 07 JD 1709800.5	by the Eqs. (2)	0.0017	0	0.0000001	-0.0183	0.0005	0
	by the Eqs. (2), (3)	0.0018	0	0.0000001	-0.0179	0	0
969 04 26 JD 2075100.5	by the Eqs. (1)	0.0010	0	0	0.0031	-0.0002	0
	by the Eqs. (2)	0.0010	-0.0000001	0.0000001	-0.0095	0.0004	0
2969 08 24 JD 2805700.5	by the Eqs. (2), (3)	0.0011	-0.0000001	0.0000001	-0.0091	0	0
	by the Eqs. (1)	0.0004	0	0	0.0016	-0.0002	0
3969 10 21 JD 3171000.5	by the Eqs. (2)	-0.0014	-0.0000001	0	0.0091	0.0004	0
	by the Eqs. (2), (3)	-0.0015	-0.0000001	0	0.0095	0	0
3969 10 21 JD 3171000.5	by the Eqs. (1)	-0.0005	0	0	-0.0015	0.0001	0
	by the Eqs. (2)	-0.0030	-0.0000001	0	0.0188	0.0004	0
3969 10 21 JD 3171000.5	by the Eqs. (2), (3)	-0.0031	-0.0000001	0	0.0192	0	0
	by the Eqs. (1)	-0.0009	0	-0.0000001	-0.0032	0.0002	0

Таблица 9
 Расхождения в элементах орбит Марса при численном интегрировании уравнений движения, полученных с помощью различных методов вычисления, от найденных с помощью решения уравнений (4)
 [Discrepancies in the elements of the orbits of the Mars in the numerical integration of the equations of motion obtained using various calculation methods from those found by solving Eqs. (4)]

Current date	Data sources (calculated by)	ΔM (in degrees)	Δa (in au)	Δe	$\Delta \omega$ (in degrees)	$\Delta \Omega$ (in degrees)	Δi (in degrees)
-31 03 07 JD 1709800.5	by the Eqs. (2)	0.0018	0	-0.0000027	-0.0071	0	0
	by the Eqs. (2), (3)	0.0015	0	-0.0000001	-0.0071	0	0
	by the Eqs. (1)	0.0022	0	0	0.0004	0	0
969 04 26 JD 2075100.5	by the Eqs. (2)	-0.0003	0	0	-0.0035	0	0
	by the Eqs. (2), (3)	-0.0003	0	0	-0.0036	0	0
	by the Eqs. (1)	0.0001	0	0	0.0002	0	0
2969 08 24 JD 2805700.5	by the Eqs. (2)	0.0002	-0.0000001	0.0000012	-0.0034	-0.0001	0
	by the Eqs. (2), (3)	0.0003	-0.0000001	0	-0.0035	0	0
	by the Eqs. (1)	-0.0001	0	0	-0.0002	0	0
3969 10 21 JD 3171000.5	by the Eqs. (2)	0.0006	0	0.0000023	0.0068	0	0
	by the Eqs. (2), (3)	0.0006	0	-0.0000001	0.0070	0	0
	by the Eqs. (1)	-0.0002	0	0	-0.0004	0	0

Наибольшие отклонения наблюдаются в средних аномалиях и аргументах перигелиев. Как показывают результаты вычислений (см. табл. 4–6 и 7–9), расхождения в средней аномалии у Венеры, Земли+Луны и Марса составляют, соответственно, $\Delta M = 12''$, $6''$ и $6''$, а в аргументах перигелиев — $\Delta\omega = -0.0342^\circ$, -0.0183° и -0.0071° в 31 г. до н.э. В 3969 г. расхождения в средней аномалии у Венеры, Земли+Луны и Марса достигнут $\Delta\omega = 0.0373^\circ$, 0.0188° и 0.0068° соответственно. С увеличением интервала интегрирования эти отклонения будут увеличиваться, что непосредственно отразится на расхождении элементов орбит планет, найденных с помощью решения уравнений (4) и (2).

Проведенные исследования показывают, что решение релятивистских уравнений не обеспечивает одинаковой точности для всех объектов. По этой причине прогнозирование движений Венеры, Земли+Луны и Марса путем решения уравнений (2) не является таким же точными, как для Меркурия. Для обоснования данного предположения необходимо показать преимущество использования уравнений (4) по сравнению с уравнениями (2) при исследовании движения этих небесных тел. Для сравнения эффективности использования уравнений (4) и (2) наиболее подходящим объектом для исследования является Луна.

Геоцентрические координаты и компоненты скоростей Луны, найденные путем решения уравнений (4) и с помощью банка данных DE405, приведены в табл. 10.

Следует отметить, что для согласования геоцентрических координат Луны с наблюдениями при создании DE405 ее авторы наряду с уравнениями (2) решают совместно уравнения, учитывающие форму Луны и Земли, а также земные приливы. Подобный прием, учитывающий форму небесных тел и приливные взаимодействия, не является строго обоснованным, т.к. эти уравнения получены на основе ньютоновой теории. Кроме того, данные уравнения содержат много свободных параметров, значения которых определены с невысокой точностью. При согласовании численной теории движения больших планет и Луны DE405 с наблюдениями происходит существенное усложнение релятивистской модели движения небесных тел по сравнению с ньютоновой моделью.

Из результатов вычислений, представленных в табл. 10, следует, что координаты и скорости Луны, полученные путем решения уравнений (4), в основе которых лежит принцип взаимодействия окружающего пространства с движущимся материальным телом, отличаются от данных DE405 несущественно на интервале времени ± 100 лет от начального момента интегрирования. Например (см. табл. 10), 21 апреля 1898 г. и 13 ноября 1996 г. максимальное отклонение в координатах, найденных с помощью DE405 и полученных с помощью решения уравнений (4), составляет 0.0000003 а.е., что соответствует 45 км. Отклонение компонент скоростей также незначительное, не превышающее 0.0000001 а.е./сут. или $1.7 \cdot 10^{-4}$ км/сек. Максимальное расхождение двух методов для геоцентрических координат Луны имеет место 11 августа 1602 г. При этом различия в вычислениях составляют следующие величины: $\Delta X = 0.0000003$ а.е., $\Delta Y = 0.0000006$ а.е. $\Delta Z = -0.0000021$ а.е., что соответствует $\Delta X = 45$ км, $\Delta Y = 90$ км и $\Delta Z = -314$ км. Максимальное расхождение компонент скоростей — 0.0000002 а.е./сут. Полученные отклонения

Таблица 10
 Геоцентрические координаты и компоненты скоростей Луны, вычисленные по DE405 и с помощью решения уравнений (4)
 [Geocentric coordinates and velocity components of the Moon calculated by the DE405 and the Eqs. (4)]

Current date	Data sources (calculated by)	X (in au)	Y (in au)	Z (in au)	\dot{X} (in au/day)	\dot{Y} (in au/day)	\dot{Z} (in au/day)
1602 08 11	by the DE405	0.0014164	0.0018818	0.0009088	-0.0005116	0.0003020	0.0000764
JD 2306400.5	by the Eqs. (4)	0.0014167	0.0018824	0.0009067	-0.0005116	0.0003021	0.0000763
1701 03 05	by the DE405	0.0012062	-0.0022376	-0.0008259	0.0005148	0.0002315	0.0000541
JD 2342400.5	by the Eqs. (4)	0.0012055	-0.0022374	-0.0008275	0.0005148	0.0002314	0.0000539
1799 09 27	by the DE405	-0.0022184	0.0008843	0.0006053	-0.0002337	-0.0005126	-0.0002511
JD 2378400.5	by the Eqs. (4)	-0.0022181	0.0008850	0.0006051	-0.0002339	-0.0005125	-0.0002513
1898 04 21	by the DE405	0.0022073	0.0012309	0.0007815	-0.0002965	0.0004566	0.0001902
JD 2414400.5	by the Eqs. (4)	0.0022074	0.0012307	0.0007813	-0.0002965	0.0004567	0.0001901
1996 11 13	by the DE405	-0.0006733	-0.0022780	-0.0007632	0.0005917	-0.0001430	-0.0000404
JD 2450400.5	by the Eqs. (4)	-0.0006732	-0.0022780	-0.0007635	0.0005917	-0.0001430	-0.0000403
2095 06 07	by the DE405	-0.0017538	0.0017107	0.0009556	-0.0004465	-0.0003460	-0.0001137
JD 2486400.5	by the Eqs. (4)	-0.0017538	0.0017108	0.0009551	-0.0004465	-0.0003460	-0.0001136
2193 06 07	by the DE405	0.0024990	-0.0004538	-0.0001083	0.0000779	0.0005201	0.0002783
JD 2522400.5	by the Eqs. (4)	0.0024990	-0.0004540	-0.0001100	0.0000781	0.0005200	0.0002784

в геоцентрических координатах и компонентах скоростей Луны находятся в пределах ошибок как оптических, так и радиолокационных наблюдений, поэтому можно сказать, что при определении геоцентрических координат и компонент скоростей Луны с помощью банка данных DE405 и путем решения уравнений (4) результаты на всем интервале интегрирования получаются практически с одинаковой точностью.

В табл. 11 приведены геоцентрические координаты и скорости Луны, вычисленные с учетом релятивистских эффектов и ньютоновых уравнений, но без учета фигуры Земли, т.е. получены путем решения дифференциальных уравнений движения (2) и уравнений (1). Сопоставление данных, приведенных в табл. 10 и 11, показывает, что на интервале времени ± 100 лет от начального момента интегрирования расхождения координат, найденных путем решения уравнений (2) и с помощью банка данных DE405, значительно превышают расхождения координат, полученных с помощью решения уравнений (4) и банка данных DE405. Так, на момент 21 апреля 1898 г. максимальное отклонение в координатах, найденных с помощью DE405 и полученных с помощью решения уравнений (2), составляет 0.0000035 а.е., что соответствует 554 км. Отклонение компонент скоростей также значительное и равно 0.0000008 а.е./сут., или $6.9 \cdot 10^{-4}$ км/сек.

Из сравнения данных, приведенных в табл. 12 и 13, следует, что наибольшие расхождения координат, найденных путем решения уравнений (2) и с помощью банка данных DE405, имеют место 11 августа 1602 г. и составляют $\Delta X = -0.000019$ а.е., $\Delta Y = 0.0000128$ а.е. и $\Delta Z = 0.0000012$ а.е., что соответствует $\Delta X = -2887$ км, $\Delta Y = 1915$ км и $\Delta Z = 180$ км. Аналогичные расхождения координат, найденных с помощью решения уравнений (1) и DE405 (см. табл. 12 и 13), составляют $\Delta X = -0.0000267$ а.е., $\Delta Y = -0.0000174$ а.е. и $\Delta Z = -0.0000023$ а.е., что соответствует $\Delta X = -3994$ км, $\Delta Y = 2603$ км и $\Delta Z = 344$ км.

Из проведенного сопоставления следует, что расхождения координат Луны, полученные на основе банка данных DE405 и путем решения дифференциальных уравнений движения (1) и (2), превышают более чем на порядок аналогичные расхождения координат Луны, полученные с помощью DE405 и на основании решения уравнений (4). Проведенные исследования указывают на ограниченную возможность ньютоновых и релятивистских уравнений без совместного решения дополнительных уравнений (3) для исследования движения Луны на интервале времени порядка нескольких столетий.

В табл. 14 приведены геоцентрические координаты Луны, полученные с помощью решения дифференциальных уравнений (4) и путем совместного решения уравнений (2) и (3), а также уравнений (2) и (1). В первой строке табл. 14 находятся координаты Луны, найденные с помощью совместного решения уравнений (2) и (3), во второй, третьей и четвертой — координаты, полученные с помощью решения уравнений (4), (2) и (1).

В табл. 15 и 16 представлены расхождения геоцентрических координат и компонент скоростей Луны, полученных с помощью математических моделей (4), (2) и (1), от координат, найденных путем совместного решения уравнений (2) и (3). В первой строке табл. 15 и 16 находятся расхождения координат Луны, найденных с помощью совместного решения уравнений (2) и (3), во второй строке — координат, полученных с помощью решения диффе-

Таблица 11

Геоцентрические координаты и компоненты скоростей Луны, вычисленные по формулам (1) и (2)
 [Geocentric coordinates and velocity components of the Moon calculated by the Eq. (1), and (2)]

Current date	Data sources (calculated by)	X (in au)	Y (in au)	Z (in au)	\dot{X} (in au/day)	\dot{Y} (in au/day)	\dot{Z} (in au/day)
1602 08 11	by the Eqs. (1)	0.0013974	0.0018946	0.0009100	-0.0005146	0.0002977	0.0000742
JD 2306400.5	by the Eqs. (2)	0.0013894	0.0018992	0.0009111	-0.0005158	0.0002961	0.0000734
1701 03 05	by the Eqs. (1)	0.0012215	-0.0022295	-0.0008256	0.0005132	0.0002347	0.0000551
JD 2342400.5	by the Eqs. (2)	0.0012273	-0.0022269	-0.0008249	0.0005126	0.0002359	0.0000555
1799 09 27	by the Eqs. (1)	-0.0022229	0.0008756	0.0006006	-0.0002313	-0.0005134	-0.0002519
JD 2378400.5	by the Eqs. (2)	-0.0022246	0.0008719	0.0005988	-0.0002304	-0.0005138	-0.0002522
1898 04 21	by the Eqs. (1)	0.0022047	0.0012344	0.0007828	-0.0002973	0.0004562	0.0001898
JD 2414400.5	by the Eqs. (2)	0.0022038	0.0012358	0.0007834	-0.0002977	0.0004560	0.0001897
1996 11 13	by the Eqs. (1)	-0.0006749	-0.0022775	-0.0007633	0.0005917	-0.0001434	-0.0000405
JD 2450400.5	by the Eqs. (2)	-0.0006756	-0.0022773	-0.0007633	0.0005916	-0.0001436	-0.0000405
2095 06 07	by the Eqs. (1)	-0.0017472	0.0017164	0.0009570	-0.0004477	-0.0003447	-0.0001129
JD 2486400.5	by the Eqs. (2)	-0.0017449	0.0017182	0.0009576	-0.0004482	-0.0003443	-0.0001126
2193 06 07	by the Eqs. (1)	0.0024966	-0.0004660	-0.0001165	0.0000815	0.0005195	0.0002783
JD 2522400.5	by the Eqs. (2)	0.0024958	-0.0004709	-0.0001191	0.0000828	0.0005193	0.0002783

Расхождения геоцентрических координат и компонент скоростей Луны, полученных с помощью различных методов вычисления, от найденных с помощью DE405 Disceraries in the geocentric coordinates and the components of velocities of Moon obtained using various calculation methods from those found by the DE405]

Таблица 12

Current date	Data sources (calculated by)	ΔX (in au)	ΔY (in au)	ΔZ (in au)	$\Delta \dot{X}$ (in au/day)	$\Delta \dot{Y}$ (in au/day)	$\Delta \dot{Z}$ (in au/day)
1602 08 11 JD 2306400.5	by the Eqs. (4) by the Eqs. (2) by the Eqs. (1)	0.0000003 -0.000019 -0.0000267	0.0000006 0.0000128 0.0000174	-0.0000021 0.0000012 0.0000023	0 -0.0000038 -0.0000042	0.0000001 -0.0000043 -0.0000059	-0.0000001 -0.0000022 -0.0000030
1701 03 05 JD 2342400.5	by the Eqs. (4) by the Eqs. (2) by the Eqs. (1)	-0.0000005 0.0000153 0.0000211	0.0000002 0.0000081 0.0000107	-0.0000016 0.0000003 0.0000010	0 -0.0000016 -0.0000022	-0.0000001 0.0000033 0.0000044	-0.0000002 0.0000010 0.0000014
1799 09 27 JD 2378400.5	by the Eqs. (4) by the Eqs. (2) by the Eqs. (1)	0.0000003 0.0000045 0.0000062	0.0000007 -0.0000087 -0.0000124	-0.0000002 -0.0000047 -0.0000065	-0.0000002 0.0000024 0.0000033	0.0000001 -0.0000008 -0.0000012	-0.0000002 -0.0000008 -0.0000011
1898 04 21 JD 2414400.5	by the Eqs. (4) by the Eqs. (2) by the Eqs. (1)	0.0000001 -0.0000026 -0.0000035	-0.0000002 0.0000037 0.0000049	-0.0000002 0.0000015 0.0000019	0 0.0000008 0.0000012	0.0000001 -0.0000004 -0.0000006	-0.0000001 -0.0000004 -0.0000005
1996 11 13 JD 2450400.5	by the Eqs. (4) by the Eqs. (2) by the Eqs. (1)	0.0000001 -0.0000016 -0.0000024	0 0.0000005 0.0000007	0.0000003 -0.0000001 -0.0000001	0.0000001 0 -0.0000001	0 -0.0000004 -0.0000006	0.0000001 -0.0000001 -0.0000001
2095 06 07 JD 2486400.5	by the Eqs. (4) by the Eqs. (2) by the Eqs. (1)	0 0.00000066 0.00000089	0.0000001 0.0000057 0.0000075	-0.0000005 0.0000014 0.0000020	0 0.0000012 0.0000017	0 0.0000013 0.0000017	0.0000001 0.0000008 0.0000011
2193 06 07 JD 2522400.5	by the Eqs. (4) by the Eqs. (2) by the Eqs. (1)	0 -0.0000024 -0.0000032	-0.0000002 -0.0000122 -0.0000171	-0.0000017 -0.0000083 -0.0000108	0.0000002 0.0000036 0.0000047	-0.0000001 -0.0000006 -0.0000008	0.0000001 0 0

Таблица 13

Расхождения геоцентрических координат и компонент скоростей Луны, полученных с помощью различных методов вычисления, от найденных с помощью DE405 [Discrepancies in the geocentric coordinates and the components of velocities of the Moon obtained using various calculation methods from those found by the DE405]

Current date	Data sources (calculated by)	ΔX (in km)	ΔY (in km)	ΔZ (in km)	$\Delta \dot{X}$ (in km/s)	$\Delta \dot{Y}$ (in km/s)	$\Delta \dot{Z}$ (in km/s)
1602 08 11 JD 2306400.5	by the Eqs. (4)	45	90	-314	0	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$-1.7 \cdot 10^{-4}$
	by the Eqs. (2)	-2842	1915	180	$-66 \cdot 10^{-4}$	$-74 \cdot 10^{-4}$	$-38 \cdot 10^{-4}$
	by the Eqs. (1)	-3994	2603	344	$-73 \cdot 10^{-4}$	$-102 \cdot 10^{-4}$	$-52 \cdot 10^{-4}$
1701 03 05 JD 2342400.5	by the Eqs. (4)	-75	30	-239	0	$-1.7 \cdot 10^{-4}$	$-3.4 \cdot 10^{-4}$
	by the Eqs. (2)	2289	1211	45	$-28 \cdot 10^{-4}$	$57 \cdot 10^{-4}$	$17 \cdot 10^{-4}$
	by the Eqs. (1)	3156	1600	150	$-38 \cdot 10^{-4}$	$76 \cdot 10^{-4}$	$24 \cdot 10^{-4}$
1799 09 27 JD 2378400.5	by the Eqs. (4)	45	105	-30	$-3.4 \cdot 10^{-4}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$-3.4 \cdot 10^{-4}$
	by the Eqs. (2)	673	-1301	-703	$42 \cdot 10^{-4}$	$-14 \cdot 10^{-4}$	$-14 \cdot 10^{-4}$
	by the Eqs. (1)	928	-1855	-972	$57 \cdot 10^{-4}$	$-21 \cdot 10^{-4}$	$-19 \cdot 10^{-4}$
1898 04 21 JD 2414400.5	by the Eqs. (4)	15	-30	-30	0	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$-1.7 \cdot 10^{-4}$
	by the Eqs. (2)	-389	554	224	$14 \cdot 10^{-4}$	$-6.9 \cdot 10^{-4}$	$-6.9 \cdot 10^{-4}$
	by the Eqs. (1)	-524	733	284	$21 \cdot 10^{-4}$	$-10 \cdot 10^{-4}$	$-9 \cdot 10^{-4}$
1996 11 13 JD 2450400.5	by the Eqs. (4)	15	0	45	$1.7 \cdot 10^{-4}$	0	$1.7 \cdot 10^{-4}$
	by the Eqs. (2)	-239	75	-15	0	$-6.9 \cdot 10^{-4}$	$-1.7 \cdot 10^{-4}$
	by the Eqs. (1)	-359	105	-15	$-1.7 \cdot 10^{-4}$	$-10 \cdot 10^{-4}$	$-1.7 \cdot 10^{-4}$
2095 06 07 JD 2486400.5	by the Eqs. (4)	0	15	-75	0	0	$1.7 \cdot 10^{-4}$
	by the Eqs. (2)	987	853	209	$21 \cdot 10^{-4}$	$23 \cdot 10^{-4}$	$14 \cdot 10^{-4}$
	by the Eqs. (1)	1331	1122	299	$29 \cdot 10^{-4}$	$29 \cdot 10^{-4}$	$19 \cdot 10^{-4}$
2193 06 07 JD 2522400.5	by the Eqs. (4)	0	-45	-254	$3.4 \cdot 10^{-4}$	$-1.7 \cdot 10^{-4}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$
	by the Eqs. (2)	-359	-1825	-1242	$62 \cdot 10^{-4}$	$-10 \cdot 10^{-4}$	0
	by the Eqs. (1)	-479	-2558	-1616	$81 \cdot 10^{-4}$	$-14 \cdot 10^{-4}$	0

Таблица 14

Геоцентрические координаты и компоненты скорости Луны, полученные с помощью различных методов вычисления

Geocentric coordinates and velocity components of Moon obtained using various calculation methods

Current date	Data sources (calculated by)	X (in au)	Y (in au)	Z (in au)	\dot{X} (in au/day)	\dot{Y} (in au/day)	\dot{Z} (in au/day)
—31 03 07 JD 1709800.5	by the Eqs. (2), (3)	0.0025162	0.0004578	0.0002045	—0.0000901	0.0005577	0.0001852
	by the Eqs. (4)	0.0025079	0.0005171	0.0002114	—0.0001032	0.0005550	0.0001841
	by the Eqs. (2)	0.0024611	0.0006867	0.0002674	—0.0001440	0.0005469	0.0001807
969 04 26 JD 2075100.5	by the Eqs. (1)	0.0024349	0.0007785	0.0002978	—0.0001656	0.0005404	0.0001782
	by the Eqs. (2), (3)	—0.0016082	0.0020328	0.0007352	—0.0004377	—0.0003023	—0.0001768
	by the Eqs. (4)	—0.0016153	0.0020295	0.0007272	—0.0004364	—0.0003044	—0.0001767
JD 2805700.5	by the Eqs. (2)	—0.0016878	0.0019784	0.0006977	—0.0004238	—0.0003190	—0.0001819
	by the Eqs. (1)	—0.0017232	0.0019512	0.0006823	—0.0004171	—0.0003267	—0.0001845
	by the Eqs. (2), (3)	0.0023278	0.0010745	0.0002601	—0.0002101	0.0004922	0.0002423
2969 08 24 JD 2805700.5	by the Eqs. (4)	0.0023195	0.0010938	0.0002653	—0.0002146	0.0004907	0.0002407
	by the Eqs. (2)	0.0023550	0.0010163	0.0002272	—0.0001950	0.0004989	0.0002425
	by the Eqs. (1)	0.0023709	0.0009740	0.0002068	—0.0001845	0.0005034	0.0002435
3969 10 21 JD 3171000.5	by the Eqs. (2), (3)	—0.0019659	0.0016886	0.0006167	—0.0003674	—0.0004171	—0.0001256
	by the Eqs. (4)	—0.0020106	0.0016415	0.0005903	—0.0003561	—0.0004263	—0.0001300
	by the Eqs. (2)	—0.0018832	0.0017749	0.0006306	—0.0003863	—0.0004009	—0.0001209
by the Eqs. (1)	—0.0018170	0.0018413	0.0006506	—0.0004009	—0.0003863	—0.0001157	

Таблица 15

Расхождения геоцентрических координат и компонент скоростей Луны, полученных с помощью различных методов вычисления, от найденных с помощью решения уравнений (2) и (3) [Discrepancies in the geocentric coordinates and the components of the velocities of the Moon obtained using various calculation methods from those found by solving Eqs. (2), and (3)]

Current date	Data sources (calculated by)	ΔX (in au)	ΔY (in au)	ΔZ (in au)	$\Delta \dot{X}$ (in au/day)	$\Delta \dot{Y}$ (in au/day)	$\Delta \dot{Z}$ (in au/day)
-31 03 07 JD 1709800.5	by the Eqs. (4)	-0.0000083	0.0000593	0.0000069	-0.0000131	-0.0000027	-0.0000011
	by the Eqs. (2)	-0.0000551	0.0002989	0.0000629	-0.0000539	-0.0000081	-0.0000045
	by the Eqs. (1)	-0.0000813	0.0003207	0.0000933	-0.0000755	-0.0000173	-0.0000070
969 04 26 JD 2075100.5	by the Eqs. (4)	-0.0000071	-0.0000033	-0.0000080	0.0000013	-0.0000021	-0.0000001
	by the Eqs. (2)	-0.0000796	-0.0000544	-0.0000375	0.0000099	-0.0000167	-0.0000051
	by the Eqs. (1)	-0.0001150	-0.0000816	-0.0000529	0.0000206	-0.0000244	-0.0000077
2969 08 24 JD 2805700.5	by the Eqs. (4)	-0.0000083	0.0000193	0.0000052	-0.0000045	-0.0000015	-0.0000016
	by the Eqs. (2)	0.0000272	-0.0000582	-0.0000329	-0.0000151	0.0000067	0.0000002
	by the Eqs. (1)	0.0000431	-0.0001005	-0.0000533	0.0000256	0.0000112	0.0000012
3969 10 21 JD 3171000.5	by the Eqs. (4)	-0.0000447	-0.0000471	-0.0000264	0.0000113	-0.0000092	-0.0000044
	by the Eqs. (2)	0.0000827	0.0000863	0.0000139	-0.0000189	0.0000162	0.0000047
	by the Eqs. (1)	0.0001489	0.0001527	0.0000339	-0.0000335	0.0000308	0.0000099

Расхождения геоцентрических координат и компонент скоростей Луны, полученных с помощью различных методов вычисления, от найденных с помощью решения уравнений (2) и (3) [Discrepances in the geocentric coordinates and the components of the velocities of the Moon obtained using various calculation methods from those found by solving Eqs. (2), and (3)]

Таблица 16

Current date	Data sources (calculated by)	ΔX (in km)	ΔY (in km)	ΔZ (in km)	$\Delta \dot{X}$ (in km/s)	$\Delta \dot{Y}$ (in km/s)	$\Delta \dot{Z}$ (in km/s)
-31 03 07 JD 1709800.5	by the Eqs. (4)	-1242	8871	1032	-0.023	-0.005	-0.002
	by the Eqs. (2)	-8243	44715	9410	-0.09	-0.01	-0.008
	by the Eqs. (1)	-12162	47976	13957	-0.13	-0.03	-0.012
969 04 26 JD 2075100.5	by the Eqs. (4)	-1062	-494	-1197	0.002	-0.004	-0.0002
	by the Eqs. (2)	-11908	-8138	-5670	0.017	-0.029	-0.009
	by the Eqs. (1)	-17204	-12207	-7914	0.036	-0.042	-0.013
2969 08 24 JD 2805700.5	by the Eqs. (4)	-1242	2887	778	-0.008	-0.003	-0.003
	by the Eqs. (2)	4069	-8707	-4922	-0.026	0.012	0.0003
	by the Eqs. (1)	6448	-15035	-7974	0.044	0.019	0.002
3969 10 21 JD 3171000.5	by the Eqs. (4)	-6687	-7046	-3949	0.02	-0.016	-0.008
	by the Eqs. (2)	12337	12910	2079	0.032	0.028	0.008
	by the Eqs. (1)	22275	22844	5071	0.058	0.05	0.017

ренциальных уравнений (4), в третьей и четвертой — расхождения координат, полученных с помощью решения уравнений (2) и уравнений (1).

На концах интервала интегрирования различия в координатах X , Y и Z на дату 7 марта 31 г. до н.э., полученных с помощью решения дифференциальных уравнений (4) и найденных с помощью совместного решения уравнений (2) и (3), составляют $\Delta X = 1242$ км, $\Delta Y = -8871$ км и $\Delta Z = 1032$ км соответственно. Полученные различия в геоцентрических координатах Луны, найденных с помощью совместного решения уравнений (2) и (3) и путем решения уравнений (4), являются следствием различных вековых смещений перигелиев Земли+Луны, найденных с помощью решения этих уравнений.

Расхождения геоцентрических координат Луны, найденных путем решения уравнений (2), от координат, найденных с помощью совместного решения уравнений (2) и (3) на дату 7 марта 31 г. до н.э., еще более значительны по сравнению с предыдущим случаем, т.к. по координатам X , Y и Z отклонения составляют минус 8243 км, 44715 км и 9410 км соответственно.

Поскольку точность геоцентрических координат Луны, найденных путем решения уравнений (4), значительно превышает точность координат Луны, найденных с помощью решения уравнений (2), это указывает на то, что решение уравнений (4) обеспечивает более высокую точность при исследовании движения больших планет и Луны по сравнению с решениями уравнений (2).

Как видно из данных, представленных в табл. 4–9, скорости вековых смещений долгот перигелиев Венеры, Земли+Луны и Марса, полученные с помощью решения уравнений (2) и найденные путем совместного решения уравнений (2) и (3), практически совпадают.

Принимая во внимание, что элементы орбит Венеры, Земли+Луны и Марса получены путем решения уравнений (4), точнее — решений уравнений (2), можно сделать следующие выводы:

- а) решение релятивистских уравнений (2) не приводит к повышению точности координат и элементов орбит Венеры, Земли+Луны и Марса по сравнению с решениями уравнений (1);
- б) на интервале времени порядка ± 100 лет от начального момента интегрирования элементы орбит Венеры, Земли+Луны и Марса, найденные с помощью решения уравнений (1), (2) и (4), отличаются друг от друга в пределах погрешности оптических наблюдений;
- в) с увеличением интервала интегрирования различия в координатах Венеры, Земли+Луны, Марса и Луны, найденных с помощью решения уравнений (4) и путем совместного интегрирования уравнений (2) и (3), учитывающих релятивистские эффекты и отклонение фигуры Земли от сфероида, возрастают; это указывает на ограниченные возможности применения современных математических моделей, описываемых уравнениями (1), (2) и (3), для исследования эволюции орбит Венеры, Земли, Марса и Луны на больших интервалах времени порядка 1000 и более лет;
- г) в результате численного интегрирования уравнений (2) и (4) различия в элементах орбит Меркурия на интервале времени с 31 г. до н.э. по 3969 г. н.э. находятся в пределах ошибок наблюдений.

Элементы орбит Юпитера, полученные с помощью различных методов вычисления

Таблица 17

Current date	Data sources (calculated by)	M (in degrees)	a (in au)	e	ω (in degrees)	Ω (in degrees)	i (in degrees)
-31 03 07 JD 1709800.5	by the Eqs. (4)	312.8228	5.2074821	0.04453923	272.1519	97.2532	1.3562
	by the Eqs. (2), (3)	312.8231	5.2074820	0.04453923	272.1516	97.2532	1.3562
969 04 26 JD 2075100.5	by the Eqs. (1)	312.8228	5.2074821	0.04453923	272.1519	97.2532	1.3562
	by the Eqs. (4)	61.5105	5.2081435	0.0479516	275.0554	98.7440	1.3279
2969 08 24 JD 2805700.5	by the Eqs. (2), (3)	61.5107	5.2081434	0.0479516	275.0552	98.7440	1.3279
	by the Eqs. (1)	61.5106	5.2081434	0.0479516	275.0554	98.7440	1.3279
3969 10 21 JD 3171000.5	by the Eqs. (4)	284.8327	5.2075551	0.0498764	274.3641	102.2956	1.2881
	by the Eqs. (2), (3)	284.8325	5.2075551	0.0498764	274.3643	102.2956	1.2881
JD 2805700.5	by the Eqs. (1)	284.8327	5.2075551	0.0498764	274.3641	102.2956	1.2881
	by the Eqs. (4)	35.6250	5.2076037	0.0521614	274.6955	104.2705	1.2777
JD 3171000.5	by the Eqs. (2), (3)	35.6247	5.2076036	0.0521614	274.6960	104.2705	1.2777
	by the Eqs. (1)	35.6250	5.2076037	0.0521614	274.6955	104.2705	1.2777

[The elements of the orbits of the Jupiter obtained using various calculation methods]

Таблица 18

Элементы орбит Сатурна, полученные с помощью различных методов вычисления
 [The elements of the orbits of the Saturn obtained using various calculation methods]

Current date	Data sources (calculated by)	M (in degrees)	a (in au)	e	ω (in degrees)	Ω (in degrees)	i (in degrees)
-31 03 07 JD 1709800.5	by the Eqs. (4)	348.9145	9.5466433	0.0622756	322.9485	118.8305	2.4193
	by the Eqs. (2), (3)	348.9147	9.5466433	0.0622756	322.9484	118.8305	2.4193
	by the Eqs. (1)	348.9145	9.5466433	0.0622756	322.9485	118.8305	2.4193
969 04 26 JD 2075100.5	by the Eqs. (4)	327.5055	9.5903937	0.0610962	330.1549	116.3185	2.4549
	by the Eqs. (2), (3)	327.5056	9.5903937	0.0610962	330.1548	116.3185	2.4549
	by the Eqs. (1)	327.5055	9.5903936	0.0610962	330.1549	116.3185	2.4549
2969 08 24 JD 2805700.5	by the Eqs. (4)	285.8508	9.5626834	0.0496486	343.0988	111.0836	2.5062
	by the Eqs. (2), (3)	285.8507	9.5626835	0.0496486	343.0988	111.0836	2.5062
	by the Eqs. (1)	285.8508	9.5626833	0.0496486	343.0988	111.0836	2.5062
3969 10 21 JD 3171000.5	by the Eqs. (4)	264.3956	9.5781705	0.0486358	350.4100	108.5257	2.5197
	by the Eqs. (2), (3)	264.3954	9.5781703	0.0486358	350.4100	108.5257	2.5197
	by the Eqs. (1)	264.3956	9.5781707	0.0486358	350.4099	108.5257	2.5197

Элементы орбит Урана, полученные с помощью различных методов вычисления
 [The elements of the orbits of the Uranus obtained using various calculation methods]

Таблица 19

Current date	Data sources (calculated by)	M (in degrees)	a (in au)	e	ω (in degrees)	Ω (in degrees)	i (in degrees)
-31 03 07 JD 1709800.5	by the Eqs. (4)	78.0027	19.2364366	0.0443000	103.0330	72.6239	0.8089
	by the Eqs. (2), (3)	78.0027	19.2364362	0.0443000	103.0329	72.6239	0.8089
969 04 26 JD 2075100.5	by the Eqs. (1)	78.0027	19.2364366	0.0443000	103.0330	72.6239	0.8089
	by the Eqs. (4)	50.3013	19.1365856	0.0438437	93.8913	73.2938	0.7899
2969 08 24 JD 2805700.5	by the Eqs. (2), (3)	50.3013	19.1365855	0.0438437	93.8913	73.2938	0.7899
	by the Eqs. (1)	50.3013	19.1365857	0.0438437	93.8914	73.2938	0.7899
3969 10 21 JD 3171000.5	by the Eqs. (4)	332.0219	19.1286124	0.0463700	102.2850	74.6454	0.7578
	by the Eqs. (2), (3)	332.0218	19.1286122	0.0463700	102.2850	74.6454	0.7578
JD 2805700.5	by the Eqs. (1)	332.0219	19.1286126	0.0463700	102.2850	74.6454	0.7578
	by the Eqs. (4)	302.5293	19.2618769	0.0452229	96.3033	75.6454	0.7407
JD 3171000.5	by the Eqs. (2), (3)	302.5292	19.2618770	0.0452229	96.3034	75.6454	0.7407
	by the Eqs. (1)	302.5293	19.2618766	0.0452229	96.3033	75.6454	0.7407

Таблица 20

Элементы орбит Нептуна, полученные с помощью различных методов вычисления
 [The elements of the orbits of the Neptune obtained using various calculation methods]

Current date	Data sources (calculated by)	M (in degrees)	a (in au)	e	ω (in degrees)	Ω (in degrees)	i (in degrees)
-31 03 07 JD 1709800.5	by the Eqs. (4)	150.8615	29.9904839	0.0099743	264.2646	131.9497	1.7670
	by the Eqs. (2), (3)	150.8615	29.9904839	0.0099743	264.2646	131.9497	1.7670
	by the Eqs. (1)	150.8616	29.9904835	0.0099743	264.2645	131.9497	1.7670
969 04 26 JD 2075100.5	by the Eqs. (4)	159.9568	29.9674104	0.0120014	280.7737	131.8879	1.7677
	by the Eqs. (2), (3)	159.9568	29.9674102	0.0120015	280.7737	131.8879	1.7677
	by the Eqs. (1)	159.9567	29.9674106	0.0120014	280.7737	131.8879	1.7677
2969 08 24 JD 2805700.5	by the Eqs. (4)	248.3255	30.2247150	0.0079769	242.7389	131.7682	1.7710
	by the Eqs. (2), (3)	248.3256	30.2247150	0.0079769	242.7389	131.7682	1.7710
	by the Eqs. (1)	248.3255	30.2247148	0.0079769	242.7389	131.7682	1.7710
3969 10 21 JD 3171000.5	by the Eqs. (4)	235.2572	30.0160418	0.0120156	280.7905	131.6531	1.7736
	by the Eqs. (2), (3)	235.2571	30.0160416	0.0120156	280.7906	131.6531	1.7736
	by the Eqs. (1)	235.2573	30.0160422	0.0120156	280.7905	131.6531	1.7736

Элементы орбит Плутона, полученные с помощью различных методов вычисления

Таблица 21

[The elements of the orbits of the Pluto obtained using various calculation methods]

Current date	Data sources (calculated by)	M (in degrees)	a (in au)	e	ω (in degrees)	Ω (in degrees)	i (in degrees)
-31 03 07 JD 1709800.5	by the Eqs. (4)	300.4961	39.2452027	0.2467257	114.5391	110.5062	17.1696
	by the Eqs. (2), (3)	300.4961	39.2452034	0.2467257	114.5391	110.5062	17.1696
969 04 26 JD 2075100.5	by the Eqs. (1)	300.4961	39.2452021	0.2467257	114.5391	110.5062	17.1696
	by the Eqs. (4)	317.4043	39.4957303	0.2469954	113.2307	110.3002	17.1190
2969 08 24 JD 2805700.5	by the Eqs. (2), (3)	317.4043	39.4957298	0.2469954	113.2307	110.3002	17.1190
	by the Eqs. (1)	317.4043	39.4957305	0.2469955	113.2307	110.3002	17.1190
3969 10 21 JD 3171000.5	by the Eqs. (4)	341.2172	39.5085346	0.2500633	114.2570	110.3268	17.1474
	by the Eqs. (2), (3)	341.2172	39.5085338	0.2500633	114.2570	110.3268	17.1474
3969 10 21 JD 3171000.5	by the Eqs. (1)	341.2172	39.5085349	0.2500633	114.2570	110.3268	17.1474
	by the Eqs. (4)	350.7798	30.3101881	0.2452006	113.9625	110.0744	17.1527
3969 10 21 JD 3171000.5	by the Eqs. (2), (3)	350.7798	30.3101892	0.2452006	113.9625	110.0744	17.1527
	by the Eqs. (1)	350.7798	30.3101870	0.2452005	113.9625	110.0744	17.1527

Несмотря на ограниченные возможности применения дифференциальных уравнений движения (1) и (2) к вышеуказанным объектам, данные уравнения применимы к исследованию эволюции орбит внешних планет Юпитер–Плутон на интервале времени 4 000 лет. В табл. 17–21 представлены элементы орбит Юпитера–Плутона на интервале времени с 7 марта 31 г. до н.э. по 21 октября 3969 г. н.э. Как показывают результаты вычислений (см. табл. 17–21), для исследования эволюции орбит данных объектов на интервале времени порядка 1 000 лет можно использовать наряду с уравнениями (4) уравнения (1) и (2).

В отличие от ньютоновых и релятивистских уравнений, решение уравнений (4) позволяет получить координаты больших планет и Луны на интервале 600 лет (1600–2200 гг.), полностью согласованные с наблюдениями без привлечения дополнительных уравнений.

В заключение следует отметить, что дифференциальные уравнения (4) свободны от недостатков, свойственных уравнениям (2), т.к. их использование для решения рассмотренных ранее задач приводит к сокращению рабочего времени программы численного интегрирования и повышению точности конечных результатов более чем на порядок. Кроме того, они могут быть эффективно использованы для исследования эволюции орбит больших планет и Луны на длительных интервалах времени порядка 1 000 и более лет.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Чеботарев Г. А. *Аналитические и численные методы небесной механики*. М., Л.: Наука, 1965. 368 с.
2. Субботин М. Ф. *Введение в теоретическую астрономию*. М.: Наука, 1968. 800 с.
3. Newhall X. X., Standish E M., Williams J. G. DE 102: A numerically integrated ephemeris of the Moon and planets spanning forty-four centuries // *Astron. Astrophys.*, 1983. vol. 125, no. 1. pp. 150–167.
4. Заусаев А. Ф., Заусаев А. А. *Математическое моделирование орбитальной эволюции малых тел Солнечной системы*. М.: Машиностроение-1, 2008. 250 с.
5. Заусаев А. Ф. Исследование движения планет, Луны и Солнца, основанное на новом принципе взаимодействия // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 3(36). С. 118–131. doi: [10.14498/vsgtu1304](https://doi.org/10.14498/vsgtu1304).
6. Заусаев А. Ф. Сопоставление координат больших планет, Луны и Солнца, полученных на основе нового принципа взаимодействия и банка данных DE405 // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 1. С. 121–148. doi: [10.14498/vsgtu1458](https://doi.org/10.14498/vsgtu1458).
7. Заусаев А. Ф., Романюк М. А. *Численные методы в задачах математического моделирования движения небесных тел в Солнечной системе*. Самара: СамГТУ, 2017. 265 с.
8. Красинский Г. А., Питьева Е. В., Свешников М. Л., Свешникова Е. С. Уточнение эфемерид внутренних планет и Луны по радиолокационным, лазерным и меридианным измерениям 1961–1980 гг. // *Бюлл. ИТА АН СССР*, 1982. Т. 15, № 3. С. 145–163.

9. Заусаев А. Ф., Заусаев А. А., Ольхин А. Г. Численное интегрирование уравнений движения больших планет (Меркурий–Плутон) и Луны с учетом радиолокационных наблюдений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004. № 26. С. 43–47. doi: [10.14498/vsgtu175](https://doi.org/10.14498/vsgtu175).
10. Заусаев А. Ф. Теория движения n материальных тел, основанная на новом принципе взаимодействия // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006. № 43. С. 132–139. doi: [10.14498/vsgtu463](https://doi.org/10.14498/vsgtu463).
11. Standish E. M. *JPL Planetary and Lunar Ephemerides: DE405/LE405*. Interoffice memorandum: JPL IOM 312. F-98-048, 1998, August 26. 18 pp., [ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/ioms/de405.iom.pdf](http://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/ioms/de405.iom.pdf).
12. Питьева Е. В. Современные численные теории движения Солнца, Луны и больших планет / *Эфемеридная астрономия* / Труды ИПА РАН, Т. 10. М.: Ин-т приклад. астрономии. С. 112–134.
13. Питьева Е. В. Высокоточные эфемериды планет – EPM и определение некоторых астрономических постоянных // *Астрономический вестник*, 2005. Т. 39, № 3. С. 202–213.
14. Pitjeva E. V., Bratseva O. A., Panfilov V. E. EPM — Ephemerides of Planets and the Moon of IAA RAS: Their model, accuracy, availability / *Proc. of the Journées 2010 “Systèmes de Référence Spatio-Temporels” (JSR2010): New challenges for reference systems and numerical standards in astronomy (Observatoire de Paris, 20–22 September 2010)*; ed. N. Capitaine, 2010. pp. 49–54.
15. Pitjeva E. V., Pitjev N. P. Development of planetary ephemerides EPM and their applications // *Celest. Mech. Dyn. Astr.*, 2014. vol. 119, no. 3. pp. 237–256. doi: [10.1007/s10569-014-9569-0](https://doi.org/10.1007/s10569-014-9569-0).
16. Simon J.-L., Franco G., Fienga A., Manche H. New analytical planetary theories VSOP2013 and TOP2013 // *Astron. Astrophys.*, 2013. vol. 557, A49. doi: [10.1051/0004-6361/201321843](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201321843).
17. Folkner W. M., Williams J. G., Boggs D. H., Park R. S., Kuchynka P. *The Planetary and Lunar Ephemerides DE430 and DE431*: IPN Progress Report, 42–196, 2014, February 15. 81 pp., https://ipnpr.jpl.nasa.gov/progress_report/42-196/196C.pdf.
18. Everhart E. Implicit single-sequence methods for integrating orbits // *Celestial Mech.*, 1974. vol. 10, no. 1. pp. 35–55. doi: [10.1007/BF01261877](https://doi.org/10.1007/BF01261877).
19. Визгин В. П. *Релятивистская теория тяготения (истоки и формирование, 1900–1915)*. М.: Наука, 1981. 352 с.
20. Le Verrier U. J. *Theorie du mouvement de Mercure* / *Annales de l’Observatoire imperial de Paris*. vol. 5: *Annales de l’Observatoire de Paris. Memoires*. Paris: Mallet-Bachelier, 1859. 195 pp.
21. Roseveare N. T. *Mercury’s perihelion from Le Verrier to Einstein*. Oxford: Clarendon Press, 1982. viii+208 pp.
22. Богородский А. Ф. *Всемирное тяготение*. Киев: Наукова думка, 1971. 352 с.
23. Брумберг В. А. *Релятивистская небесная механика*. М.: Наука, 1972. 384 с.
24. Кислик М. Д., Колюка Ю. Ф., Котельников В. А., Петров Г. М., Тихонов В. Ф. Единая релятивистская теория движения внутренних планет Солнечной системы // *Докл. АН СССР*, 1980. Т. 255, № 3. С. 545–547; Кислик М. Д., Колюка Ю. Ф., Котельников В. А., Петров Г. М., Тихонов В. Ф. Единая релятивистская теория движения внутренних планет Солнечной системы. Релятивистские эффекты при определении орбит планет по радиолокационным наблюдениям, Научная сессия Отделения общей физики и астрономии и Отделения ядерной физики Академии наук СССР (26–27 ноября 1980 г.) // *УФН*, 1981. Т. 134, № 1. С. 165–166. doi: [10.3367/UFNr.0134.198105j.0165](https://doi.org/10.3367/UFNr.0134.198105j.0165).
25. Кислик М. Д. Релятивистские эффекты при определении орбит планет по радиолокационным наблюдениям // *Письма в Астрономический журнал*, 1981. Т. 7, № 1. С. 56–60.

MSC: 70F15, 70M20, 65L05



Comparison of various mathematical models on the example of solving the equations of the movement of large planets and the Moon

*A. F. Zausaev, M. A. Romanyuk*Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

In this paper, we study the accuracy of solving various differential equations describing the motion of large planets, the Moon and Sun. On the time interval from 31 years BC to 3969 AD, the numerical integration of Newtonian, relativistic differential equations, and equations obtained on the basis of the interaction of the surrounding space with moving material bodies was carried out. The range of applicability of the considered differential equations for the investigated objects is revealed. By comparing the coordinates of the Moon, found by solving various differential equations and the DE405 data bank, it is shown that the greatest accuracy in the elements of the orbits of large planets is achieved by solving differential equations obtained on the basis of the interaction of the surrounding space with moving material bodies. The solution of relativistic equations provides high accuracy of the orbit elements for Mercury and the outer planets throughout the integration interval. However, for the remaining inner planets and the Moon, the accuracy of the orbital elements obtained by solving relativistic equations is comparable to the accuracy obtained by solving Newton equations. It is believed that the use of the harmonic coordinate system is justified only for Mercury from the point of view of the velocity of the secular longitude displacement of its perihelion, but for other internal planets (the Venus, Earth & Moon, and Mars) the velocities of secular displacements of the longitude of the perihelion's are overstated. It is shown that the solution of differential equations obtained on the basis of the interaction of the surrounding space with moving material bodies ensures a high accuracy of obtaining orbital elements for all objects under consideration on the time interval under study.

Research Article

  The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Zausaev A. F., Romanyuk M. A. Comparison of various mathematical models on the example of solving the equations of the movement of large planets and the Moon, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 1, pp. 152–185. doi: [10.14498/vsgtu1663](https://doi.org/10.14498/vsgtu1663) (In Russian).

Authors' Details:

Anatoliy F. Zausaev  <https://orcid.org/0000-0002-5035-9615>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science;
e-mail: zausaev_af@mail.ru

Mariya A. Romanyuk  <https://orcid.org/0000-0003-0796-2061>

Cand. Tech. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science;
e-mail: zausmasha@mail.ru

Keywords: orbital elements, numerical integration, differential equation of motion.

Received: 6th December, 2018 / Revised: 27th February, 2019 /

Accepted: 4th March, 2019 / First online: 15th March, 2019

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Chebotarev G. A. *Analytical and Numerical Methods of Celestial Mechanics*, Modern Analytic and Computational Methods in Science and Mathematics, vol. 9, American Elsevier Publishing Co., Inc., 1967, xviii+331 pp.
2. Subbotin M. F. *Vvedenie v teoreticheskuiu astronomiiu* [Introduction to theoretical astronomy]. Moscow, Nauka, 1968, 800 pp. (In Russian)
3. Newhall X. X., Standish E M., Williams J. G. DE 102: A numerically integrated ephemeris of the Moon and planets spanning forty-four centuries, *Astron. Astrophys.*, 1983, vol. 125, no. 1, pp. 150–167.
4. Zausaev A. F., Zausaev A. A. *Matematicheskoe modelirovanie orbital'noi evoliutsii malykh tel Solnechnoi sistemy* [Mathematical modelling of orbital evolution of small bodies of the Solar system]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2008, 250 pp. (In Russian)
5. Zausaev A. F. The Investigation of the Motion of Planets, the Moon, and the Sun Based on a New Principle of Interaction, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2014, no. 3(36), pp. 118–131 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1304](https://doi.org/10.14498/vsgtu1304).
6. Zausaev A. F. Comparison of the coordinates of the major planets, the Moon, and the Sun obtained based on a new principle of interaction and of the data bank DE405, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 1, pp. 121–148 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1458](https://doi.org/10.14498/vsgtu1458).
7. Zausaev A. F., Romaniuk M. A. *Chislennyye metody v zadachakh matematicheskogo modelirovaniia dvizheniia nebesnykh tel v Solnechnoi sisteme* [Numerical methods in problems of mathematical modeling of motion of celestial bodies in the Solar system]. Samara, Samara State Technical Univ., 2017, 265 pp. (In Russian)
8. Krasinskii G. A., Piteva E. V., Sveshnikov M. L., Sveshnikova E. S. Improvement of the ephemerides of the inner planets and the moon using radar, laser, and meridian measurements during 1961–1980, *Institut Teoreticheskoi Astronomii, Biulleten*, 1982, vol. 15, no. 3, pp. 145–163 (In Russian).
9. Zausaev A. F., Zausaev A. A., Ol'khin A. G. The numerical integration of the equations of motion for large planets (Mercury and Pluto) and Moon with the radar observations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2004, no. 26, pp. 43–47 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu175](https://doi.org/10.14498/vsgtu175).
10. Zausaev A. F. Theory of motion of n material bodies, based on a new interaction principle, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2006, no. 43, pp. 132–139 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu463](https://doi.org/10.14498/vsgtu463).

11. Standish E. M. *JPL Planetary and Lunar Ephemerides*, DE405/LE405. Interoffice memorandum: JPL IOM 312. F-98-048, 1998, August 26, 18 pp., <ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/ioms/de405.iom.pdf>.
12. Pitjeva E. V. Modern numerical ephemerides of the Sun, the Moon and major planets, In: *Efemeridnaia astronomiia* [Ephemeris Astronomy], Proc. of IPA RAS, 10. Moscow, IPA RAS, pp. 112–134 (In Russian).
13. Pitjeva E. V. High-precision ephemerides of planets-EPM and determination of some astronomical constants, *Solar System Research*, 2005, vol. 39, no. 3, pp. 176–186. doi: [10.1007/s11208-005-0033-2](https://doi.org/10.1007/s11208-005-0033-2).
14. Pitjeva E. V., Bratseva O. A., Panfilov V. E. EPM — Ephemerides of Planets and the Moon of IAA RAS: Their model, accuracy, availability, In: *Proc. of the Journées 2010 “Systèmes de Référence Spatio-Temporels”* (JSR2010): New challenges for reference systems and numerical standards in astronomy (Observatoire de Paris, 20–22 September 2010); ed. N. Capitaine, 2010, pp. 49–54.
15. Pitjeva E. V., Pitjev N. P. Development of planetary ephemerides EPM and their applications, *Celest. Mech. Dyn. Astr.*, 2014, vol. 119, no. 3, pp. 237–256. doi: [10.1007/s10569-014-9569-0](https://doi.org/10.1007/s10569-014-9569-0).
16. Simon J.-L., Francou G., Fienga A., Manche H. New analytical planetary theories VSOP2013 and TOP2013, *Astron. Astrophys.*, 2013, vol. 557, A49. doi: [10.1051/0004-6361/201321843](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201321843).
17. Folkner W. M., Williams J. G., Boggs D. H., Park R. S., Kuchynka P. *The Planetary and Lunar Ephemerides DE430 and DE431*, IPN Progress Report, 42–196, 2014, February 15, 81 pp., https://ipnpr.jpl.nasa.gov/progress_report/42-196/196C.pdf.
18. Everhart E. Implicit single-sequence methods for integrating orbits, *Celestial Mech.*, 1974, vol. 10, no. 1, pp. 35–55. doi: [10.1007/BF01261877](https://doi.org/10.1007/BF01261877).
19. Vizgin V. P. *Relativistskaia teoriia tiagoteniia (istoki i formirovanie, 1900–1915)* [The relativistic theory of gravitation. Sources and formation, 1900–1915]. Moscow, Nauka, 1981, 352 pp. (In Russian)
20. Le Verrier U. J. *Theorie du mouvement de Mercure*, Annales de l’Observatoire imperial de Paris, vol. 5, Annales de l’Observatoire de Paris. Memoires. Paris, Mallet-Bachelier, 1859, 195 pp.
21. Roseveare N. T. *Mercury’s perihelion from Le Verrier to Einstein*. Oxford, Clarendon Press, 1982, viii+208 pp.
22. Bogorodsky A. F. *Vsemirnoe tiagotenie* [Universal Gravitation]. Kiev, Naukova Dumka, 1971, 352 pp. (In Russian)
23. Brumberg V. A. *Relativistskaia nebesnaia mekhanika* [Relativistic Celestial Mechanics]. Moscow, Nauka, 1972, 384 pp. (In Russian)
24. A Unified Relativistic Theory of the Motion of the Inner Planets of the Solar System, *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1980, T. 255, № 3, C. 545–547 (In Russian); Kislik M. D., Kolyuka Yu. F., Kotel’nikov V. A., Tikhonov V. F. A Unified Relativistic Theory of the Motion of the Inner Planets of the Solar System. Relativistic Effects in Determination of the Orbits of the Planets from Radar Observations, *Sov. Phys. Usp.*, 1981, vol. 24, no. 1, pp. 437–438. doi: [10.1070/PU1981v024n05ABEH004807](https://doi.org/10.1070/PU1981v024n05ABEH004807).
25. Kislik M. D. Relativistic effects in radar determinations of planetary orbits, *Soviet Astronomy Letters*, 1981, vol. 7, no. 1, pp. 31–34.