Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23, № 1. С. 186–194
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1666

Краткие сообщения

УДК 517.956.3

Задача типа Гурса для гиперболического уравнения и для одной системы гиперболических уравнений третьего порядка

А. А. Андреев, Ю. О. Яковлева

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Исследована корректность по Адамару постановки задачи типа Гурса для гиперболического уравнения третьего порядка с некратными характеристиками. Приведен пример, иллюстрирующий некорректность классической постановки задачи Гурса для гиперболического уравнения третьего порядка. В явном виде получено регулярное решение задачи типа Гурса для гиперболического уравнения третьего порядка с некратными характеристиками.

Исследована корректность по Адамару постановки задачи типа Гурса для одной системы дифференциальных гиперболических уравнений третьего порядка. Регулярное решение задачи типа Гурса для системы гиперболических уравнений третьего порядка получено в явном виде.

В результате исследований сформулированы теоремы о корректности по Адамару постановки задачи типа Гурса для гиперболического уравнения и для одной системы гиперболических уравнений третьего порядка.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение третьего порядка, некратные характеристики, задача типа Гурса, система гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка, корректность по Адамару.

Получение: 14 декабря 2018 г. / Исправление: 14 февраля 2019 г. / Принятие: 4 марта 2019 г. / Публикация онлайн: 25 марта 2019 г.

Краткое сообщение

Образец для цитирования

Андреев А. А., Яковлева Ю. О. Задача типа Гурса для гиперболического уравнения и для одной системы гиперболических уравнений третьего порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 1. С. 186–194. doi: 10.14498/vsgtu1666.

Сведения об авторах

Александр Анатольевич Андреев https://orcid.org/0000-0002-6611-6685
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: andre01071948@yandex.ru

Юлия Олеговна Яковлева https://orcid.org/0000-0002-9839-3740
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. высшей математики; e-mail: julia.yakovleva@mail.ru

Введение. Известно, что в некоторых случаях решение начально-краевых задач для дифференциальных гиперболических уравнений от двух независимых переменных с некратными характеристиками может быть построено без вспомогательных функций (функций Римана, Римана—Адамара). Так, решение краевых задач для гиперболических уравнений третьего порядка с некратными характеристиками может быть получено методом общих решений [1]. В этом случае естественным образом возникает вопрос о корректности постановки по Адамару [2] краевой задачи для гиперболических уравнений и систем уравнений гиперболического типа от двух независимых переменных с некратными характеристиками.

Корректность постановки начально-краевых задач для гиперболических уравнений и систем уравнений гиперболического типа с двумя независимыми переменными порядка выше второго является темой исследования многих отечественных и зарубежных ученых [3–9].

В настоящей работе приведен пример, иллюстрирующий некорректность классической постановки задачи Гурса в плоскости независимых переменных

$$\{(x,\, y) : x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}\} \tag{1}$$

для гиперболического уравнения третьего порядка [10]. Кроме того, сформулированы и исследованы на корректность по Адамару задачи типа Гурса для гиперболического уравнения третьего порядка и системы дифференциальных уравнений гиперболического типа третьего порядка, не содержащих производных порядка ниже третьего, в плоскости независимых переменных (1).

Предварительные сведения. Рассмотрим в плоскости независимых переменных (1) гиперболическое уравнение третьего порядка, не содержащее производных порядка ниже третьего:

$$u_{xxy} + u_{xyy} = 0. \tag{2}$$

Прямые $x = C_1$, $y = C_2$, $y = x + C_3$, где C_1, C_2, C_3 — произвольные константы из $\mathbb{R}$, являются характеристиками уравнения (2)[11].

Общее решение уравнения (2) из класса трижды непрерывно дифференцируемых функций $C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ представляется в виде суммы любых трех функций $f_1,\, f_2,\, f_3 \in C^3(\mathbb{R})$:

$$u(x,y) = f_1(x) + f_2(y) + f_3(x-y).$$

Однородное уравнение (2), удовлетворяющее однородным условиям на характеристиках:

$$u(x,0) = 0, \quad u(0,y) = 0, \quad u(x,x) = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

имеет нетривиальное решение

$$u(x,y) = f_3(x-y) - f_3(x) - f_3(y), \tag{4}$$

где $f_3 \in C^3(\mathbb{R})$ — любая нечетная функция.

Следовательно, нетривиальное решение (4) уравнения (2) удовлетворяет однородным граничным условиям (3) на трех характеристиках из различных семейств. В приведенной постановке задача Гурса является некорректной по Адамару.

Таким образом, приведен пример, иллюстрирующий некорректность классической постановки задачи Гурса в плоскости независимых переменных (1) для гиперболического уравнения третьего порядка.

Введем следующие обозначения. Пусть

$$I_\xi = [\xi_1, \xi_2], \quad \xi = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}.$$

Отрезок I_ξ имеет центральную симметрию: $\forall x \in I_\xi$, $2\xi - x \in I_\xi$.

Если $x \in I_\xi$, то для любой функции $f(x)$ справедливо

$$f^{\xi,\,\mathrm{od}}(x) = \frac{f(x) - f(2\xi - x)}{2}, \quad f^{\xi,\,\mathrm{ev}}(x) = \frac{f(x) + f(2\xi - x)}{2},$$

$$f(x) = f^{\xi,\,\mathrm{od}}(x) + f^{\xi,\,\mathrm{ev}}(x).$$

Здесь и далее при $\xi = 0$ через $f^{\mathrm{od}}(x)$ и $f^{\mathrm{ev}}(x)$ будем обозначать нечетную и четную части функции $f(x)$ соответственно.

Задача типа Гурса для строго гиперболического уравнения третьего порядка. В плоскости независимых переменных (1) рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка

$$u_{xxy} + \lambda u_{xyy} = 0, \quad \lambda = \mathrm{const}, \quad \lambda \neq 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) является строго гиперболическим по Петровскому [12] и имеет три различные характеристики $x = C_1$, $y = C_2$, $\lambda x - y = C_3$, где C_1, C_2, C_3 — произвольные константы из $\mathbb{R}$.

Общее решение уравнения (5) имеет следующий вид:

$$u(x, y) = f_1(x) + f_2(y) + f_3(\lambda x - y).$$

Характеристическая задача типа Гурса. *Найти регулярное решение* $u\,(x,\,y) \in C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ *уравнения* (5) *в плоскости независимых переменных* (1), *удовлетворяющее условиям*

$$u(x, 0) = \alpha(x), \quad u(0, y) = \beta(y), \quad u(x, \lambda x) = \gamma(x), \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

где α, β, $\gamma \in C^3(\mathbb{R})$.

Регулярным в плоскости (1) *решением* [10,13] задачи (5), (6) будем называть функцию $u(x, y) \in C^3(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, имеющую в плоскости (1) все непрерывные частные производные, входящие в уравнение (5), и удовлетворяющую уравнению (5) и условиям задачи (6) в обычном смысле.

Теорема 1. *Если* $\gamma^{\mathrm{od}}(x) = \alpha^{\mathrm{od}}(x) + \beta^{\mathrm{od}}(\lambda x)$, *где* $\alpha^{\mathrm{od}}(x)$, $\beta^{\mathrm{od}}(x)$, $\gamma^{\mathrm{od}}(x)$ — *нечетные части функций* $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $x \in \mathbb{R}$ *соответственно, то задача* (5), (6) *корректна по Адамару.*

Докажем существование корректного по Адамару решения задачи (5), (6) в плоскости (1) конструктивным путем.

Определим функции f_1, f_2 и f_3 так, чтобы они удовлетворяли условиям задачи типа Гурса (5):

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \alpha(x) - f_3(\lambda x) - f_2(0), \\ f_2(x) &= \beta(x) - f_3(-x) - f_1(0), \\ f_3(\lambda x) + f_3(-\lambda x) &= \alpha(x) + \beta(\lambda x) - \gamma(x) + 2f_3(0). \end{aligned} \tag{7}$$

Справедливо следующее равенство:

$$f_3(-\lambda x) + f_3(\lambda x) = \alpha(-x) + \beta(-\lambda x) - \gamma(-x) + 2f_3(0). \tag{8}$$

Из равенств (7), (8) следует, что

$$f_3(\lambda x) = \frac{1}{2}\big[\alpha^{\mathrm{ev}}(x) + \beta^{\mathrm{ev}}(\lambda x) - \gamma^{\mathrm{ev}}(x) + 2f_3(0)\big].$$

Таким образом,

$$f_3(x) = \frac{1}{2}\Big[\alpha^{\mathrm{ev}}\Big(\frac{x}{\lambda}\Big) + \beta^{\mathrm{ev}}(x) - \gamma^{\mathrm{ev}}\Big(\frac{x}{\lambda}\Big) + 2f_3(0)\Big].$$

При этом функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ удовлетворяют соотношению

$$\gamma^{\mathrm{od}}(x) = \alpha^{\mathrm{od}}(x) + \beta^{\mathrm{od}}(\lambda x). \tag{9}$$

Регулярным решением задачи (5), (6) в плоскости (1) является функция

$$\begin{aligned} u(x,y) = \alpha(x) + \beta(y) - \alpha(0) + \frac{1}{2}\Big[\alpha^{\mathrm{ev}}\Big(x - \frac{y}{\lambda}\Big) - \alpha^{\mathrm{ev}}(x) - \alpha^{\mathrm{ev}}\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)\Big] + \\ + \frac{1}{2}\Big[\beta^{\mathrm{ev}}(\lambda x - y) - \beta^{\mathrm{ev}}(\lambda x) - \beta^{\mathrm{ev}}(y)\Big] - \\ - \frac{1}{2}\Big[\gamma^{\mathrm{ev}}\Big(x - \frac{y}{\lambda}\Big) - \gamma^{\mathrm{ev}}(x) - \gamma^{\mathrm{ev}}\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Регулярное решение $u(x,\, y)$ задачи (5), (6) получено в явном виде с учетом условия согласования

$$\alpha(0) = f_1(0) + f_2(0) + f_3(0).$$

Отметим, что в задаче типа Гурса с условиями (6) для уравнения (5) выбор характеристики, на которой задается видоизмененное условие (9), не является существенным.

Задача типа Гурса для одной системы гиперболических уравнений третьего порядка. Определенный интерес представляет исследование корректности постановки характеристической задачи для систем уравнений гиперболического типа порядка выше второго.

Рассмотрим систему гиперболических уравнений третьего порядка, имеющую две кратные характеристики и две некратные:

$$U_{xxy} + LU_{xyy} = 0, \tag{10}$$

где $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $U(x,y) = (u_1(x,y), u_2(x,y))^\top$ — двумерная вектор-функция, L — постоянная матрица второго порядка с различными действительными собственными значениями λ_1, $\lambda_2 \neq 0$.

Так как матрица L имеет различные ненулевые собственные значения, существует такая квадратная матрица T второго порядка, которая приводит исходную матрицу L к ее диагональной форме:

$$T^{-1}LT = \Lambda_L,$$

где

$$\Lambda_L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, система (10) эквивалентна системе

$$U_{xxy} + \Lambda_L U_{xyy} = 0, \tag{11}$$

которая распадается на уравнения:

$$\begin{cases} u_{1xxy} + \lambda_1 u_{1xyy} = 0, \\ u_{2xxx} + \lambda_2 u_{2xyy} = 0. \end{cases}$$

Система (11) имеет кратные характеристики $x = 0$, $y = 0$ и некратные — $y - \lambda_1 x = 0$, $y - \lambda_2 x = 0$.

Характеристическая задача типа Гурса для системы (10). *Найти регулярное решение $U(x,y) \in C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ системы уравнений* (10), *удовлетворяющее условиям*

$$\begin{aligned} &U(x,0) = A(x), \quad U(0,y) = B(y), \\ &l_i U(x,y)|_{y=\lambda_i x} = C(x), \quad i = 1,2, \end{aligned} \tag{12}$$

где $A(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x))^\top$, $B(y) = (\beta_1(y), \beta_2(y))^\top$, $C(x) = (\gamma_1(x), \gamma_2(x))^\top$; $\alpha_i(x)$, $\beta_i(y)$, $\gamma_i(x) \in C^3(\mathbb{R})$; l_i — собственные векторы матрицы L, соответствующие собственным значениям λ_i, $i = 1,2$.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Если функции $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$, $\gamma_i(x)$ таковы, что удовлетворяют условиям*

$$\gamma_i^{\mathrm{od}}(x) = \alpha_i^{\mathrm{od}}(x) + \beta_i^{\mathrm{od}}(\lambda_i x),$$

где $\alpha_i^{\mathrm{od}}(x)$, $\beta_i^{\mathrm{od}}(x)$, $\gamma_i^{\mathrm{od}}(x)$ — нечетные части функций $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$, $\gamma_i(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$, то задача (10), (12) корректна по Адамару.

Каждое уравнение системы (11) имеет некратные характеристики.

Учитывая приведенные выше исследования, получим, что вектор-функция $U(x,y) = (u_1(x,y), u_2(x,y))^\top$, являющаяся регулярным решением рассматриваемой задачи с условиями (12), имеет вид

$$\begin{aligned} u_1(x,y) = \alpha_1(x) + \beta_1(y) - \alpha_1(0) + \\ + \frac{1}{2}\Big[\alpha_1^{\mathrm{ev}}\Big(x - \frac{y}{\lambda}\Big) - \alpha_1^{\mathrm{ev}}(x) - \alpha_1^{\mathrm{ev}}\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)\Big] + \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\Big[\beta_1^{ev}(\lambda x-y)-\beta_1^{ev}(\lambda x)-\beta_1^{ev}(y)\Big]- \\ -\frac{1}{2}\Big[\gamma_1^{\mathrm{ev}}\Big(x-\frac{y}{\lambda}\Big)-\gamma_1^{\mathrm{ev}}(x)-\gamma_1^{\mathrm{ev}}\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)\Big], \quad (13)$$

$$u_2(x,y)=\alpha_2(x)+\beta_2(y)-\alpha_2(0)+ \\ +\frac{1}{2}\Big[\alpha_2^{\mathrm{ev}}\Big(x-\frac{y}{\lambda}\Big)-\alpha_2^{\mathrm{ev}}(x)-\alpha_2^{\mathrm{ev}}\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)\Big]+ \\ +\frac{1}{2}\Big[\beta_2^{\mathrm{ev}}(\lambda x-y)-\beta_2^{\mathrm{ev}}(\lambda x)-\beta_2^{\mathrm{ev}}(y)\Big]- \\ -\frac{1}{2}\Big[\gamma_2^{\mathrm{ev}}\Big(x-\frac{y}{\lambda}\Big)-\gamma_2^{\mathrm{ev}}(x)-\gamma_2^{\mathrm{ev}}\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)\Big]. \quad (14)$$

Таким образом, существование регулярного решения задачи (10), (12) доказано конструктивно. При этом решение задачи типа Гурса с условиями (12) получено в явном виде (13), (14).

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Мусхелишвили Н. И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости. Основные уравнения, плоская теория упругости, кручение и изгиб.* М.: Наука, 1966. 707 с.
2. Hadamard J. *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations.* New York: Dover Publications, 1952. v+316 pp.
3. Бицадзе А. В. К вопросу о постановке характеристической задачи для гиперболических систем второго порядка // *Докл. АН СССР*, 1975. Т. 223, № 6. С. 1289–1292.
4. Джохадзе О. М. Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка // *Матем. заметки*, 2003. Т. 74, № 4. С. 517–528. doi: 10.4213/mzm282.
5. Харибегашвили С. С. О разрешимости одной характеристической задачи для вырождающихся гиперболических систем второго порядка // *Дифференц. уравнения*, 1989. Т. 25, № 1. С. 154–162.
6. Зикиров О. С. О разрешимости нелокальной задачи для гиперболического уравнения третьего порядка // *Сиб. журн. чист. и прикл. матем.*, 2016. Т. 16, № 2. С. 16–25. doi: 10.17377/PAM.2016.16.202.
7. Kinoshita T. Gevrey wellposedness of the Cauchy problem for the hyperbolic equations of third order with coefficients depending only on time // *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences.* vol. 34, no. 3. pp. 249–270. doi: 10.2977/prims/1195144695.
8. Nikolov A., Popivanov N. Singular solutions to Protter‘s problem for (3+1)-D degenerate wave equation // *AIP Conf. Proc.*, 2012. vol. 1497. pp. 233–238. doi: 10.1063/1.4766790.
9. Colton D. Pseudoparabolic equations in one space variable // *J. Differ. Equ.*, 1972. vol. 12, no. 3. pp. 559–565. doi: 10.1016/0022-0396(72)90025-3.

10. Андреев А. А., Яковлева Ю. О. Характеристическая задача для одного гиперболического дифференциального уравнения третьего порядка с некратными характеристиками // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2013. Т. 13, № 1(2). С. 3–6.
11. Корзюк В. И., Чеб Е. С., Тху Л. Т. Решение смешанной задачи для биволнового уравнения методом характеристик // *Тр. Ин-та матем.*, 2010. Т. 18, № 2. С. 36–54.
12. Петровский И. Г. *Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия.* М.: Наука, 1986. 504 с.
13. Яковлева Ю. О. Одна характеристическая задача для дифференциального гиперболического уравнения третьего порядка общего вида с некратными характеристиками // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 3(28). С. 180–183. doi: 10.14498/vsgtu1108.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 1, pp. 186–194
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1666

MSC: 74E35, 74K20

The Goursat-type problem for a hyperbolic equation and system of third order hyperbolic equations

A. A. Andreev, J. O. Yakovleva

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

In the first part of this study, the well-posed Goursat-type problem is considered for the hyperbolic differential equation of the third order with non-multiple characteristics. The example illustrating the non-well-posed Goursat-type problem for the hyperbolic differential equation of the third order is discussed. The regular solution of the Goursat-type problem for the hyperbolic differential equation of the third order with the non-multiple characteristics is obtained in an explicit form.

In the second part, the well-posed Goursat-type problem is considered for a system of the hyperbolic differential equations of the third order. The regular solution of the Goursat-type problem for this system is also obtained in an explicit form.

The theorems for the Hadamard's well-posedness of Goursat-type problem for the hyperbolic differential equation and for a system of the hyperbolic differential equations is formulated as the result of the research.

Keywords: third order hyperbolic equation, non-multiple characteristics, Goursat-type problem, hyperbolic system of third order differential equations, Hadamard correctness.

Received: 14th December, 2018 / Revised: 14th February, 2019 / Accepted: 4th March, 2019 / First online: 25th March, 2019

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interests with the authorship and publication of this article.

Short Communication

Please cite this article in press as:
Andreev A. A., Yakovleva J. O. The Goursat-type problem for a hyperbolic equation and system of third order hyperbolic equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 1, pp. 186–194. doi: 10.14498/vsgtu1666 (In Russian).

Authors' Details:

Aleksandr A. Andreev https://orcid.org/0000-0002-6611-6685
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: andre01071948@yandex.ru

Julia O. Yakovleva https://orcid.org/0000-0002-9839-3740
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics; e-mail: julia.yakovleva@mail.ru

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Muskhelishvili N. I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti. Osnovnye uravneniia, ploskaia teoriia uprugosti, kruchenie i izgib* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Fundamental equations, plane theory of elasticity, torsion and bending]. Moscow, Nauka, 1966, 707 pp. (In Russian)
2. Hadamard J. *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. New York, Dover Publications, 1952, v+316 pp.
3. Bitsadze A. V. On the question of formulating the characteristic problem for second order hyperbolic systems, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1975, vol. 223, no. 6, pp. 1289–1292 (In Russian).
4. Dzhokhadze O. M. Influence of lower terms on the well-posedness of characteristics problems for third-order hyperbolic equations, *Math. Notes*, 2003, vol. 74, no. 4, pp. 491–501. doi: 10.1023/A:1026139709809.
5. Kharibegashvili S. S. Solvability of a characteristic problem for second-order degenerate hyperbolic systems, *Differ. Equ.*, 1989, vol. 25, no. 1, pp. 123–131.
6. Zikirov O. S. On solvability non-local boundary value problem for the hyperbolic equation of the third order, *Sib. J. Pure and Appl. Math.*, 2016, vol. 16, no. 2, pp. 16–25 (In Russian).
7. Kinoshita T. Gevrey wellposedness of the Cauchy problem for the hyperbolic equations of third order with coefficients depending only on time, *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, vol. 34, no. 3, pp. 249–270. doi: 10.2977/prims/1195144695.
8. Nikolov A., Popivanov N. Singular solutions to Protter‘s problem for (3+1)-D degenerate wave equation, *AIP Conf. Proc.*, 2012, vol. 1497, pp. 233–238. doi: 10.1063/1.4766790.
9. Colton D. Pseudoparabolic equations in one space variable, *J. Differ. Equ.*, 1972, vol. 12, no. 3, pp. 559–565. doi: 10.1016/0022-0396(72)90025-3.
10. Andreev A. A., Yakovleva J. O. The characteristic problem for one hyperbolic differentional equation of the third order with nonmultiple characteristics, *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, no. 1(2), pp. 3–6 (In Russian).
11. Korzyuk V. I., Cheb E. S., Thu L. T. Solution of the mixed problem for the biwave equation by the method of characteristics, *Tr. Inst. Mat.*, 2010, vol. 18, no. 2, pp. 36–54 (In Russian).
12. Petrovsky I. G. *Izbrannye trudy. Sistemy uravnenii s chastnymi proizvodnymi. Algebraicheskaia geometriia* [Selected works. Systems of partial differential equations. Algebraic geometry]. Moscow, Nauka, 1986, 504 pp. (In Russian)
13. Yakovleva J. O. One characteristic problem for the general hyperbolic differential equation of the third order with nonmultiple characteristics, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2012, no. 3(28), pp. 180–183 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1108.