Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. № 1 (30). С. 15–23

Уравнения математической физики

УДК 517.954

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В. А. СТЕКЛОВА ВТОРОГО КЛАССА ДЛЯ ПРОСТЕЙШИХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А. А. Алиханов

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова
360004, Россия, Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

E-mail: alikhanov-tom@yandex.ru

Для простейших уравнений математической физики исследуется нелокальная краевая задача В. А. Стеклова второго класса. Методом энергетических неравенств получены априорные оценки для решений рассматриваемых задач. Из полученных оценок следует единственность и непрерывная зависимость решения от входных данных задачи.

Ключевые слова: *нелокальная краевая задача, уравнения математической физики, априорные оценки для решения.*

Введение. В работе В. А. Стеклова [1, стр. 67] изучалась нелокальная краевая задача

$$u(b,t) = \rho u(a,t), \quad u_x(b,t) = \sigma u_x(a,t) + \tau u(a,t),$$

названная задачей с условиями второго класса. В ней были получены результаты для случая $\rho\sigma - 1 = 0$, $\rho\tau \leqslant 0$. Внимание к нелокальным краевым задачам было привлечено в известной работе А. В. Бицадзе и А. А. Самарского [2]. Для оператора Штурма—Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках изучены нелокальные краевые задачи первого и второго родов в работах [3–5]. В работе [5] изучена также и нелокальная краевая задача первого рода для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами в разностной трактовке. В работе [6] изучена нелокальная краевая задача второго рода для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами. В этой работе получены двусторонние априорные оценки для решения задачи по начальным данным и правой части в норме $L_2(0,l)$, а также априорные оценки в нормах $C(0,l)$ и $C(\bar{D}_T)$. В работах [7–9] изучалась устойчивость разностных схем для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами и нелокальным условием второго рода. В работах [10, 11] получены априорные оценки для решений дифференциальных и разностных уравнений с нелокальными краевыми условиями.

В данной работе получены априорные оценки решений простейших уравнений математической физики с нелокальными краевыми условиями

[1] *Анатолий Алиевич Алиханов* (к.ф.-м.н.), декан, математический факультет.

В. А. Стеклова второго класса. Отличительной особенностью данной работы от работ [10,11] является то, что константа полученной априорной оценки для решения уравнения теплопроводности не зависит от временной переменной.

1. Нелокальная краевая задача В. А. Стеклова второго класса для стационарного уравнения теплопроводности. Рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$\frac{d}{dx}\Big(k(x)\frac{du}{dx}\Big) - q(x)u(x) = -f(x), \tag{1}$$

$$u(0) = \alpha u(1), \quad k(1)u'(1) = \beta k(0)u'(0) + \gamma u(1), \tag{2}$$

где коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют следующим условиям: $k(x) \in C^{(1)}[0,1]$, $q(x)$, $f(x) \in C[0,1]$, $k(x) \geqslant c_1 > 0$, $q(x) \geqslant 0$, $k(x) = k(1-x)$, $q(x) = q(1-x)$ всюду на $[0,1]$, α, β, γ — заданные действительные числа.

Теорема 1. *Если выполняются условия $\alpha = \beta \neq 1$, $\gamma \leqslant 0$, то для решения задачи* (1), (2) *справедлива априорная оценка*

$$\|u(x)\|_{W_2^2(0,1)} \leqslant M\|f(x)\|_{L_2(0,1)}, \tag{3}$$

где $M > 0$ — известная постоянная.

Доказательство. Умножим уравнение (1) на $u(x)$ и проинтегрируем по x от 0 до 1:

$$-\int_0^1 (k(x)u_x(x))_x u(x)dx + \int_0^1 q(x)u^2(x)dx = \int_0^1 u(x)f(x)dx. \tag{4}$$

Из тождества (4) и нелокальных граничных условий следует равенство

$$\int_0^1 k(x)u_x^2(x)dx + \int_0^1 q(x)u^2(x)dx - \gamma u^2(1) = \int_0^1 u(x)f(x)dx. \tag{5}$$

Так как $\alpha \neq 1$, справедливо неравенство

$$u^2(1) = \left(\frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 u_x(x)dx\right)^2 \leqslant \frac{1}{(1-\alpha)^2 c_1}\int_0^1 k(x)u_x^2(x)dx.$$

Оценим величину $\int_0^1 u(x)f(x)dx$. В силу равенства $u(x) = u(1) - \int_x^1 u_s(s)ds$, имеем

$$\int_0^1 u(x)f(x)dx = \int_0^1 f(x)\left(u(1) - \int_x^1 u_s(s)ds\right)dx =$$
$$= u(1)\int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 u_x(x)dx\int_0^x f(s)ds \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}u^2(1) + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^1 f^2(x)dx + \int_0^1 |u_x(x)|dx\int_0^1 |f(s)|ds \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}u^2(1) + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^1 f^2(x)dx + \frac{\varepsilon}{2c_1}\int_0^1 k(x)u_x^2(x)dx + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^1 f^2(x)dx \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\left(\frac{1}{2(1-\alpha)^2 c_1}+\frac{1}{2c_1}\right)\int_0^1 k(x)u_x^2(x)dx+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 f^2(x)dx.$$

С учётом приведённых неравенств из (5) получим

$$\left(1-\varepsilon\Big(\frac{1}{2(1-\alpha)^2 c_1}+\frac{1}{2c_1}\Big)\right)\int_0^1 k(x)u_x^2(x)dx \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 f^2(x)dx. \qquad (6)$$

Из неравенства (6) при $\varepsilon=(1-\alpha)^2(1+(1-\alpha)^2)^{-1}c_1$ следует оценка

$$\|u_x(x)\|_{L_2(0,1)} \leqslant M_1\|f(x)\|_{L_2(0,1)}, \quad M_1=|1-\alpha|^{-1}\sqrt{2(1+(1-\alpha)^2)}. \qquad (7)$$

Из уравнения (1) следует оценка

$$\|u_{xx}\|_{L_2(0,1)} \leqslant M_2\left(\|u_x\|_{L_2(0,1)}+\|u\|_{L_2(0,1)}+\|f(x)\|_{L_2(0,1)}\right). \qquad (8)$$

Из оценки (7) в силу неравенства (8) и теоремы вложения

$$\|u\|_{L_2(0,1)} \leqslant M_3(\|u_x\|_{L_2(0,1)}+u^2(1,t)) \leqslant M_3(1+(1-\alpha)^{-2}c_1^{-1})\|u_x\|_{L_2(0,1)}$$

следует справедливость априорной оценки (3). □

Заметим, что если $\alpha=\beta=1$, $\gamma=0$, $q(x)\equiv 0$, то задача (1) некорректно поставлена, так как соответствующая ей однородная задача имеет ненулевое решение $u(x)=1$.

Функция $v(x)=\delta u(x)+u(1-x)$ при $\delta\neq \pm 1,-\alpha,\beta$, является решением следующей нелокальной задачи:

$$\frac{d}{dx}\Big(k(x)\frac{dv}{dx}\Big)-q(x)v(x)=-f_1(x), \qquad (9)$$

$$v(0)=\alpha_1 v(1), \quad k(1)v'(1)=\beta_1 k(0)v'(0)+\gamma_1 v(1), \qquad (10)$$

где

$$\alpha_1=\frac{\delta\alpha+1}{\delta+\alpha}, \quad \beta_1=\frac{\delta\beta-1}{\delta-\beta}, \quad \gamma_1=\frac{\gamma(\delta^2-1)}{(\delta+\alpha)(\delta-\beta)}, \quad f_1(t)=\delta f(x)+f(1-x).$$

Найдём такое значение δ, что для задачи (9), (10) будут выполняться условия теоремы 1. Условие $\alpha_1=\beta_1$ приводит к квадратному уравнению

$$\delta^2-2\frac{\alpha\beta-1}{\alpha-\beta}\delta+1=0,$$

которое при $(\alpha^2-1)(\beta^2-1)>0$ имеет два действительных различных корня:

$$\delta_1=\frac{\alpha\beta-1-\sqrt{(\alpha^2-1)(\beta^2-1)}}{\alpha-\beta}, \quad \delta_2=\frac{\alpha\beta-1+\sqrt{(\alpha^2-1)(\beta^2-1)}}{\alpha-\beta}.$$

При $\alpha^2-1<0$ и $\beta^2-1<0$ будем брать $\delta=\delta_1$, а при $\alpha^2-1>0$ и $\beta^2-1>0$ возьмём $\delta=\delta_2$. Это обеспечит выполнение условия $\delta\neq-\alpha,\beta$.

Рассмотрим эти два случая по отдельности:

1) $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$ и $\delta = \delta_1$; в этом случае второе условие теоремы 1 ($\gamma_1 \leqslant 0$) имеет вид

$$\gamma\frac{(\sqrt{1-\alpha^2}+\sqrt{1-\beta^2})^2+(\alpha-\beta)^2}{(\sqrt{1-\alpha^2}+\sqrt{1-\beta^2})^2} \leqslant 0$$

и эквивалентно условию $\gamma \leqslant 0$ при $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$;

2) $|\alpha| > 1$, $|\beta| > 1$ и $\delta = \delta_2$; в этом случае неравенство $\gamma_1 \leqslant 0$ имеет вид

$$\gamma\frac{(\sqrt{\alpha^2-1}+\sqrt{\beta^2-1})^2-(\alpha-\beta)^2}{(\sqrt{\alpha^2-1}+\sqrt{\beta^2-1})^2} \leqslant 0$$

и эквивалентно условию $\alpha\beta\gamma \leqslant 0$ при $|\alpha| > 1$, $|\beta| > 1$.

Теорема 2. *Если выполняются условия* **1)** $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$ *и* $\gamma \leqslant 0$ *или условия* **2)** $|\alpha| > 1$, $|\beta| > 1$ *и* $\alpha\beta\gamma \leqslant 0$, *то для решения задачи* (1), (2) *справедлива априорная оценка*

$$\|u(x)\|_{W_2^2(0,1)} \leqslant M\|f(x)\|_{L_2(0,1)}. \tag{11}$$

Доказательство. При указанных условиях для задачи (9), (10) выполняются условия теоремы 1. Следовательно, для её решения справедлива априорная оценка

$$\|v(x)\|_{W_2^2(0,1)} \leqslant M\|f_1(x)\|_{L_2(0,1)}. \tag{12}$$

Так как $v(x) = \delta u(x) + u(1-x)$, $f_1(t) = \delta f(x) + f(1-x)$, справедливо

$$u(x) = \frac{\delta}{\delta^2-1}v(x) - \frac{1}{\delta^2-1}v(1-x), \quad \|u(x)\|_{W_2^2(0,1)} \leqslant \frac{\sqrt{2(\delta^2+1)}}{|\delta^2-1|}\|v(x)\|_{W_2^2(0,1)},$$

$$\|f_1(x)\|_{L_2(0,1)} \leqslant \sqrt{2(\delta^2+1)}\|f(x)\|_{L_2(0,1)}.$$

Из (12), учитывая приведённые выше неравенства, где $\delta = \delta_1$ для первого случая и $\delta = \delta_2$ для второго, получим априорную оценку (11). □

Из априорной оценки (11) следует единственность и непрерывная зависимость решения задачи (1) от входных данных.

2. Нелокальная краевая задача В. А. Стеклова второго класса для уравнения теплопроводности. В прямоугольнике $\bar{Q}_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) - q(x,t)u(x,t) + f(x,t), \quad 0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T, \tag{13}$$

$$\begin{gathered} u(0,t) = \alpha u(1,t), \quad k(1,t)u_x(1,t) = \beta k(0,t)u_x(0,t) + \gamma u(1,t) + \mu(t), \\ u(x,0) = u_0(x), \end{gathered} \tag{14}$$

где коэффициенты уравнения (13) удовлетворяют следующим условиям: $k_x(x,t)$, $q(x,t)$, $f(x,t) \in C(\bar{Q}_T)$, $k(x,t) \geqslant c_1 > 0$, $q(x,t) \geqslant 0$, $k(x,t) = k(1-x,t)$, $q(x,t) = q(1-x,t)$ всюду на $\bar{Q}_T$, α, β, γ — заданные действительные числа.

Теорема 3. *Если выполняются условия $\alpha = \beta \neq 1$, $\gamma \leqslant 0$, то для решения задачи* (13), (14) *справедлива априорная оценка*

$$\|u(x,t))\|_0^2 + \int_0^t \|u_x(x,\tau)\|_0^2 d\tau \leqslant$$
$$\leqslant M\left(\int_0^t \|f(x,\tau)\|_0^2 d\tau + \int_0^t \mu^2(\tau)d\tau + \|u_0(x)\|_0^2\right), \quad (15)$$

где

$$\|u\|_0^2 = \int_0^1 u^2(x,t)dx,$$

$M > 0$ — *известная постоянная, не зависящая от* T.

Доказательство. Умножим уравнение (13) на $u(x,t)$ и проинтегрируем по x от 0 до 1:

$$\int_0^1 u_t(x,t)u(x,t)dx - \int_0^1 (k(x,t)u_x(x,t))_x u(x,t)dx + \int_0^1 q(x,t)u^2(x,t)dx =$$
$$= \int_0^1 f(x,t)u(x,t)dx. \quad (16)$$

Из тождества (16) и нелокальных граничных условий (14) при $\alpha = \beta$ следует равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2(x,t)dx + \int_0^1 k(x,t)u_x^2(x,t)dx + \int_0^1 q(x,t)u^2(x,t)dx =$$
$$= \int_0^1 f(x,t)u(x,t)dx + \gamma u^2(1,t) + u(1,t)\mu(t). \quad (17)$$

Так как $\alpha \neq 1$, справедливо неравенство

$$u^2(1,t) = \left(\frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 u_x(x,t)dx\right)^2 \leqslant \frac{1}{(1-\alpha)^2 c_1}\int_0^1 k(x,t)u_x^2(x,t)dx.$$

Как и для стационарного случая, имеем

$$\int_0^1 u(x,t)f(x,t)dx \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\Big(\frac{1}{2(1-\alpha)^2 c_1} + \frac{1}{2c_1}\Big)\int_0^1 k(x,t)u_x^2(x,t)dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 f^2(x,t)dx.$$

Проведём оценку:

$$u(1,t)\mu(t) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}u^2(1,t) + \frac{1}{2\varepsilon}\mu^2(1,t) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2(1-\alpha)^2 c_1}\int_0^1 k(x,t)u_x^2(x,t)dx + \frac{1}{2\varepsilon}\mu^2(1,t), \quad \varepsilon > 0.$$

С учётом приведенных неравенств из (17) получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_0^2+\|\sqrt{k}u_x\|_0^2\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon\Big(\frac{1}{(1-\alpha)^2c_1}+\frac{1}{2c_1}\Big)\|\sqrt{k}u_x\|_0^2+\gamma u^2(1,t)+\frac{1}{\varepsilon}\|f\|_0^2+\frac{1}{2\varepsilon}\mu^2(t). \quad (18)$$

Проинтегрировав неравенство (18) по τ от 0 до t при

$$\varepsilon=c_1(1-\alpha)^2(2+(1-\alpha)^2)^{-1},$$

получим априорную оценку (15). □

Теорема 4. *Если выполняются условия* **1)** $|\alpha|<1$, $|\beta|<1$ *и* $\gamma\leqslant 0$ *или условия* **2)** $|\alpha|>1$, $|\beta|>1$ *и* $\alpha\beta\gamma\leqslant 0$, *то для решения задачи* (13), (14) *справедлива априорная оценка*

$$\|u(x,t))\|_0^2+\int_0^t\|u_x(x,\tau)\|_0^2d\tau\leqslant$$
$$\leqslant M\left(\int_0^t\|f(x,\tau)\|_0^2d\tau+\int_0^t\mu^2(\tau)d\tau+\|u_0(x)\|_0^2\right), \quad (19)$$

где $M>0$ *— известная постоянная, не зависящая от* T.

Доказательство. Как и для стационарного случая, функция $v(x,t)=\delta u(x,t)+u(1-x)$ является решением следующей нелокальной краевой задачи:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(k(x,t)\frac{\partial v}{\partial x}\Big)-q(x,t)v(x,t)+f(x,t),\quad 0<x<1,\ 0<t\leqslant T, \quad (20)$$

$$\begin{gathered}v(0,t)=\alpha_1v(1,t),\quad k(1,t)v_x(1,t)=\beta_1k(0,t)v_x(0,t)+\gamma_1v(1,t)+\mu_1(t),\\ v(x,0)=v_0(x),\end{gathered} \quad (21)$$

где

$$\alpha_1=\frac{\delta\alpha+1}{\delta+\alpha},\quad \beta_1=\frac{\delta\beta-1}{\delta-\beta},\quad \gamma_1=\frac{\gamma(\delta^2-1)}{(\delta+\alpha)(\delta-\beta)},\quad \mu_1(t)=\frac{\delta^2-1}{\delta-\beta}\mu(t),$$
$$f_1(x,t)=\delta f(x,t)+f(1-x,t),\quad v_0(x)=\delta u_0(x)+u_0(1-x).$$

Если выполняются условия теоремы 4, то для задачи (20), (21) выполняются условия теоремы 3 и для её решения $v(x,t)$ справедлива оценка (15). Из равенства

$$u(x,t)=\frac{\delta}{\delta^2-1}v(x,t)-\frac{1}{\delta^2-1}v(1-x,t)$$

следует, что для решения $u(x,t)$ задачи (13), (14) справедлива априорная оценка (19). □

Из априорной оценки (19) следует единственность и непрерывная зависимость решения задачи (13), (14) от входных данных.

3. Нелокальная краевая задача В. А. Стеклова второго класса для уравнения колебания струны. В прямоугольнике $\bar{Q}_T$ рассматривается нелокальная краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + f(x,t), \quad 0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T, \tag{22}$$

$$u(0,t) = \alpha u(1,t), \quad k(1,t)u_x(1,t) = \beta k(0,t)u_x(0,t) + \gamma u(1,t) + \mu(t), \tag{23}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \tag{24}$$

где коэффициенты уравнения (22) удовлетворяют следующим условиям: $k_x(x,t),\ f(x,t) \in C(\bar{Q}_T)$, $k(x,t) \geqslant c_1 > 0$, $k_t(x,t) \leqslant 0$, $k(x,t) = k(1-x,t)$ всюду на $\bar{Q}_T$, α, β, γ — заданные действительные числа.

Теорема 5. *Если $\alpha = \beta \neq 1$ и $\gamma \leqslant 0$, то для решения задачи* (22)–(24) *справедлива априорная оценка*

$$\|u_t(x,t))\|_0^2 + \|u_x(x,t)\|_0^2 \leqslant$$
$$\leqslant M(T)\bigg(\int_0^t (\|f(x,\tau)\|_0^2 d\tau + \mu_\tau^2(\tau) + \mu^2(\tau))d\tau + \mu^2(t) +$$
$$+ \|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)} + \|u_1(x)\|_0^2\bigg), \tag{25}$$

где $M(T) > 0$ — известная постоянная, причём $\sqrt{M(T)}$ имеет линейный рост.

Доказательство. Умножим уравнение (22) на $u_t(x,t)$ и проинтегрируем по x от 0 до 1:

$$\int_0^1 u_{tt}(x,t)u_t(x,t)dx - \int_0^1 (k(x,t)u_x(x,t))_x u_t(x,t)dx =$$
$$= \int_0^1 f(x,t)u_t(x,t)dx. \tag{26}$$

Из тождества (26) и нелокальных граничных условий (23) при $\alpha = \beta$ следует равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u_t^2(x,t)dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 k(x,t)u_x^2(x,t)dx - \frac{1}{2}\int_0^1 k_t(x,t)u_x^2(x,t)dx -$$
$$- \frac{d}{dt}\left(\frac{\gamma}{2}u^2(1,t) + \mu(t)u(1,t)\right) = \int_0^1 f(x,t)u_t(x,t)dx - u(1,t)\mu_t(t). \tag{27}$$

Проинтегрировав равенство (27) по τ от 0 до t, с учётом неравенства $u^2(1,t) \leqslant c_1^{-1}(1-\alpha)^{-2}\|\sqrt{k}u_x\|_0^2$ получим

$$\|u_t\|_0^2 + \|\sqrt{k}u_x\|_0^2 \leqslant \varepsilon\int_0^t (\|u_\tau\|_0^2 + \|\sqrt{k}u_x\|_0^2)d\tau +$$
$$+ M_1(\varepsilon)\left(\int_0^t (\|f\|_0^2 + \mu_\tau^2(\tau))d\tau + \mu^2(t) + \|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)} + \|u_1(x)\|_0^2\right). \tag{28}$$

На основании леммы 5.5 из [22, стр. 112], при $\varepsilon = 1/T$ из (28) следует априорная оценка (25). $\square$

Теорема 6. *Если выполняются условия* **1)** $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$ *и* $\gamma \leqslant 0$ *или условия* **2)** $|\alpha| > 1$, $|\beta| > 1$ *и* $\alpha\beta\gamma \leqslant 0$, *то для решения задачи* (22)–(24) *справедлива априорная оценка*

$$\|u_t(x,t))\|_0^2 + \|u_x(x,t)\|_0^2 \leqslant \\ \leqslant M(T)\bigg(\int_0^t (\|f(x,\tau)\|_0^2 d\tau + \mu_\tau^2(\tau) + \mu^2(\tau))d\tau + \mu^2(t) + \\ + \|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)} + \|u_1(x)\|_0^2\bigg), \quad (29)$$

где $M(T) > 0$ — *известная постоянная, причём* $\sqrt{M(T)}$ *имеет линейный рост.*

Теорема 6 доказывается аналогично теореме 4.

В случае, когда $\mu(t) \equiv 0$ и $f(x,t) \equiv 0$, для решения задачи (22)–(24) можно получить оценку с константой $M > 0$, не зависящей от T.

Из априорной оценки (29) следует единственность и непрерывная зависимость решения задачи (22)–(24) от входных данных.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (регистрационный номер НИР 1.6197.2011).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *В. А. Стеклов*, Основные задачи математической физики / ред. В. С. Владимиров. М.: Наука, 1983. 432 с. [*V. A. Steklov*, Fundamental problems in mathematical physics / ed. V. S. Vladimirov. Moscow: Nauka, 1983. 432 pp.]
2. *А. В. Бицадзе, А. А. Самарский*, “О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач” // *Докл. Акад. наук СССР*, 1969. Т. 185, № 4. С. 739–740; англ. пер.: *A. V. Bitsadze, A. A. Samarskii*, “On some simple generalizations of linear elliptic boundary problems” // *Sov. Math., Dokl.*, 1969. Vol. 10. Pp. 398–400.
3. *В. А. Ильин, Е. И. Моисеев*, “Нелокальная задача для оператора Штурма—Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках” // *Докл. Акад. наук СССР*, 1986. Т. 291, № 3. С. 534–539. [*V. A. Il'in, E. I. Moiseev*, “A nonlocal boundary value problem for the Sturm–Liouville operator in a differential and a difference treatment” // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986. Vol. 291, no. 3. Pp. 534–539].
4. *В. А. Ильин, Е. И. Моисеев*, “Нелокальная краевая задача второго рода для оператора Штурма—Лиувилля” // *Диффер. уравн.*, 1987. Т. 23, № 8. С. 1422–1431. [*V. A. Il'in, E. I. Moiseev*, “A nonlocal boundary value problem of the second kind for the Sturm–Liouville operator” // *Differ. Uravn.*, 1987. Vol. 23, no. 8. Pp. 1422–1431].
5. *М. Х. Шхануков*, “Об устойчивости разностных схем, аппроксимирующих нелокальные задачи типа Бицадзе—Самарского” // *Докл. АМАН*, 1994. Т. 1, № 1. С. 38–42. [*M. Kh. Shkhanukov*, “On the stability of difference schemes approximating nonlocal problems of Bitsadze–Samarskii” // *Dokl. AMAN*, 1994. Vol. 1, no. 1. Pp. 38–42].
6. *Н. И. Ионкин*, “Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием” // *Диффер. уравн.*, 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304. [*N. I. Ionkin*, “The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition” // *Differ. Uravn.*, 1977. Vol. 13, no. 2. Pp. 294–304].
7. *A. Gulin, V. Morozova*, “Stability of the two-parameter set of nonlocal difference schemes” // *Comput. Methods Appl. Math.*, 2009. Vol. 9, no. 1. Pp. 79–99.

8. *А. В. Гулин, В. А. Морозова*, "Об одном семействе нелокальных разностных схем" // *Диффер. уравн.*, 2009. Т. 45, № 7. С. 1001–1013; англ. пер.: *A. V. Gulin, V. A. Morozova*, "On a family of nonlocal difference schemes" // *Differ. Equ.*, 2009. Vol. 45, no. 7. Pp. 1020–1033.
9. *А. В. Гулин, В. А. Морозова, Н. С. Удовиченко*, "Критерий устойчивости семейства нелокальных разностных схем" // *Диффер. уравн.*, 2010. Т. 46, № 7. С. 966–982; англ. пер.: *A. V. Gulin, V. A. Morozova, N. S. Udovichenko*, "A criterion for the stability of a family of nonlocal difference schemes" // *Differ. Equ.*, 2010. Vol. 46, no. 7. Pp. 973–990.
10. *А. А. Алиханов*, "Нелокальные краевые задачи в дифференциальной и разностной трактовках" // *Диффер. уравн.*, 2008. Т. 44, № 7. С. 924–931; англ. пер.: *A. A. Alikhanov*, "Nonlocal boundary value problems in differential and difference interpretations" // *Differ. Equ.*, 2008. Vol. 44, no. 7. Pp. 952–959.
11. *А. А. Алиханов*, "Об устойчивости и сходимости нелокальных разностных схем" // *Диффер. уравн.*, 2010. Т. 46, № 7. С. 942–954; англ. пер.: *A. A. Alikhanov*, "On the stability and convergence of nonlocal difference schemes" // *Differ. Equ.*, 2010. Vol. 46, no. 7. Pp. 949–961.
12. *О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева*, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с. [*O. A. Ladyzhenskaja, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'ceva*, Linear and quasi-linear equations of parabolic type. Moscow: Nauka, 1967. 736 pp.]

Поступила в редакцию 28/XI/2012;
в окончательном варианте — 12/II/2013.

MSC: 34B10; 35K55, 35L70, 35J60

THE STEKLOV NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE SECOND KIND FOR THE SIMPLEST EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS

A. A. Alikhanov

Kabardino-Balkarian State University,
173, Chernyshevskogo st., Nalchik, 360004, Russia.

E-mail: alikhanov-tom@yandex.ru

The Steklov nonlocal boundary value problem of the second kind for the simplest equations of mathematical physics is studied. A priori estimates for the solutions of the considered problems are obtained by using the method of energy inequalities. Uniqueness and continuous dependence of the solutions on the input data follow from these estimates.

Key words: *nonlocal boundary value problem, equations of mathematical physics, a priori estimates for solutions.*

Original article submitted 28/XI/2012;
revision submitted 12/II/2013.

Anatoliy A. Alikhanov (Ph. D. (Phys. & Math.)), Dean, Faculty of Mathematics.