УДК 517.956.3

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ СИСТЕМАМИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. А. Андреев, Е. А. Козлова, С. В. Лексина

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mails: andre01071948@yandex.ru, leni2006@mail.ru, lesveta@rambler.ru

Рассмотрена задача граничного управления для системы гиперболических уравнений, содержащей смешанную производную. Управление осуществляется смещением, то есть в условиях первой краевой задачи. Рассмотрены различные варианты структуры матриц, входящих в систему уравнений. Существенным условием является их коммутативность. В случае, когда матрицы нельзя одновременно привести к диагональному виду, решения необходимых задач для уравнений системы представлены с помощью специальных дифференциальных операторов.

Ключевые слова: *граничное управление, система гиперболических уравнений, смешанная производная, жорданова нормальная форма, жорданова клетка.*

Решение задачи управления для системы уравнений, содержащей смешанную производную. Задачи граничного управления для гиперболических уравнений и систем представляют интерес как с теоретической, так и с практической точки зрения (в теории краевых задач, см. [1]), поскольку возникают при управлении колебаниями различного типа [2]. Рассмотренная далее система уравнений представляет обобщение на матричный случай уравнения $u_{tt}+2bu_{xt}+cu_{xx}=0$ $(b^2-c>0)$, описывающего малые колебания движущегося гибкого стержня [3, 4]. Задачи управления для уравнений с матричными коэффициентами исследовались в работах [5, 6].

Рассмотрим систему уравнений второго порядка

$$u_{tt}+2Bu_{xt}+Cu_{xx}=0, \tag{1}$$

где B, C — постоянные коммутирующие матрицы размерности n, $u(x,t)$ — n-мерная вектор-функция.

Для системы (1) в прямоугольнике $Q=[0,l]\times[0,T]$ поставим задачу управления с начальными условиями

$$u(x,0)=\varphi^0(x),\quad u_t(x,0)=\psi^0(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l \tag{2}$$

и финальными условиями

$$u(x,T)=\varphi^1(x),\quad u_t(x,T)=\psi^1(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l. \tag{3}$$

Требуется построить функции граничного управления

$$\mu(t)=u(0,t),\quad \nu(t)=u(l,t),\quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

Александр Анатольевич Андреев (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. прикладной математики и информатики. *Елена Александровна Козлова*, аспирант, каф. прикладной математики и информатики. *Светлана Валентиновна Лексина* (к.ф.-м.н.), заместитель начальника, управление информатизации и телекоммуникации.

Здесь $\varphi^0(x)$, $\psi^0(x)$, $\varphi^1(x)$, $\psi^1(x)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$ — вектор-функции размерности n.

Введём матрицу S, $\det S \neq 0$. В системе (1) сделаем замену $u = Sw$, затем умножим её слева на S^{-1}:

$$w_{tt} + 2\widetilde{B}w_{xt} + \widetilde{C}w_{xx} = 0, \tag{4}$$
$$\widetilde{B} = S^{-1}BS, \quad \widetilde{C} = S^{-1}CS, \quad \widetilde{B}\widetilde{C} = \widetilde{C}\widetilde{B}.$$

Соответствующую замену сделаем в начальных, финальных условиях и в искомых граничных управлениях:

$$\begin{array}{lll} w(x{,}0) = S^{-1}\varphi^0(x) = \tilde{\varphi}^0(x), & w_t(x{,}0) = S^{-1}\psi^0(x) = \tilde{\psi}^0(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ w(x,T) = S^{-1}\varphi^1(x) = \tilde{\varphi}^1(x), & w_t(x,T) = S^{-1}\psi^1(x) = \tilde{\psi}^1(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ \tilde{\mu}(t) = w(0,t) = S^{-1}\mu(t), & \tilde{\nu}(t) = w(l,t) = S^{-1}\nu(t), & 0 \leqslant t \leqslant T. \end{array}$$

Пусть J_B, J_C — нормальные жордановы формы матриц B и C. Выделим в нормальной жордановой форме матрицы B различные блоки:

1) собственные значения кратности 1;
2) собственные значения, у которых алгебраическая кратность равна геометрической кратности (> 1) [7];
3) собственные значения, каждому из которых соответствует только одна жорданова клетка (размерности > 1);
4) собственные значения, каждому из которых соответствуют несколько жордановых клеток (хотя бы одна из которых размерности > 1).

Исходную систему (1) можно разделить на независимые подсистемы, соответствующие данным блокам. Для этого в замене $u = Sw$ нужно считать S невырожденной матрицей, приводящей B к нормальной жордановой форме, содержащей блоки вида 1–4. При этом блоки матрицы $S^{-1}CS$ будут соответствовать блокам J_B [7] ввиду их коммутативности. Это позволяет решать отдельные системы уравнений. Поэтому далее будем рассматривать матрицу B одного из четырёх описанных видов.

1. Случай различных собственных значений матрицы B**.** Предположим, что все собственные значения матрицы B различны, то есть матрица B простая. Поскольку B и C коммутативны, C также является простой [8] (при этом ее собственные значения не обязательно различные). Тогда матрицы B и C можно привести к диагональному виду одним преобразованием подобия, то есть $S^{-1}BS = \widetilde{B} = J_B$, $S^{-1}CS = \widetilde{C} = J_C$, где

$$J_B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix}, \quad J_C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_n \end{pmatrix}.$$

Здесь b_k — собственные значения матрицы B, c_k — собственные значения матрицы C, $k = 1, 2, \dots, n$, и $b_i \neq b_j$, $i \neq j$. В этом случае преобразованная система (4) распадается на n отдельных уравнений вида

$$(w_k)_{tt} + 2b_k(w_k)_{xx} + c_k(w_k)_{xx} = 0, \tag{5}$$

каждому из которых соответствуют начальные условия, финальные условия и искомые управления:

$$w_k(x,0) = \tilde{\varphi}_k^0(x), \quad (w_k)_t(x,0) = \tilde{\psi}_k^0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{6}$$

$$w_k(x,T) = \tilde{\varphi}_k^1(x), \quad (w_k)_t(x,T) = \tilde{\psi}_k^1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{7}$$

$$\tilde{\mu}_k(t) = w_k(0,t), \quad \tilde{\nu}_k(t) = w_k(l,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Потребуем, чтобы для любого $k = 1, 2, \ldots, n$ выполнялось условие $b_k^2 > c_k$. Тогда каждое из уравнений (5) является гиперболическим [9]. Характеристиками уравнения (5) являются линии $x + p_k t = C_1$, $x + q_k t = C_2$, где $p_k = b_k - \sqrt{(b_k)^2 - c_k}$, $q_k = b_k + \sqrt{(b_k)^2 - c_k}$.

Решение задачи управления (5), (6), (7) было построено в работах [10, 11]. Для различных соотношений между p и q при различных T были найдены условия, при которых управление возможно, и приведён вид полученных управляющих функций $\mu(t)$, $\nu(t)$. Зная все компоненты вектор-функций $\tilde{\mu}(t)$, $\tilde{\nu}(t)$, после обратной замены найдём $\mu(t) = S\tilde{\mu}(t)$, $\nu(t) = S\tilde{\nu}(t)$.

2. Матрица $\boldsymbol{B}$ вида $\boldsymbol{bE}$. Если предположить, что все собственные значения b_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, равны между собой ($b_k = b$) и им соответствует полный набор собственных векторов, то матрица $B = bE$ и коммутирует с любой матрицей C. Поэтому выберем S как преобразование, приводящее C к нормальной жордановой форме J_C. Если при этом C окажется матрицей простой структуры, то случай сведется к предыдущему — обе матрицы B и C приводимы одним преобразованием к диагональному виду.

Далее рассмотрим случай, когда J_C — жорданова клетка порядка n (если J_C имеет более сложную структуру, её следует разделить на блоки), поэтому $c_k = c$, $p_k = p$, $q_k = q$ для $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$J_B = B = bE, \quad J_C = \begin{pmatrix} c & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & c & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & c \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система уравнений примет вид

$$\begin{cases} (w_1)_{tt} + 2b(w_1)_{xt} + c(w_1)_{xx} = 0, \\ (w_2)_{tt} + 2b(w_2)_{xt} + c(w_2)_{xx} = -(w_1)_{xx}, \\ \qquad\vdots \\ (w_n)_{tt} + 2b(w_n)_{xt} + c(w_n)_{xx} = -(w_{n-1})_{xx}. \end{cases}$$

Каждое уравнение этой системы (начиная со второго) является неоднородным. Его правая часть зависит от функции w_{k-1} из предыдущего шага.

Для более удобного представления решений рассматриваемой системы воспользуемся дифференциальным оператором следующего типа [12]:

$$\delta_c f = \frac{1}{q-p}\left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial q}\right), \quad \delta_c^0 f \equiv f.$$

Тогда решения задач для уравнений рассматриваемой системы можно выразить через решения задач для первого (однородного) уравнения, полученные в [10, 11]:

$$\begin{cases} w_1 = f_1, \\ w_2 = f_2 + \delta_c f_1, \\ \quad\vdots \\ w_n = \sum_{j=1}^{n} \delta_c^{n-j} f_j. \end{cases}$$

Соответственно, граничные управления $\tilde{\mu}_k(t)$, $\tilde{\nu}_k(t)$ можно выписать в виде

$$\begin{cases} \tilde{\mu}_1 = f_1(0,t), \\ \tilde{\mu}_2 = f_2(0,t) + \delta_c f_1(0,t), \\ \quad\vdots \\ \tilde{\mu}_n = \sum_{j=1}^{n} \delta_c^{n-j} f_j(0,t), \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{\nu}_1 = f_1(l,t), \\ \tilde{\nu}_2 = f_2(l,t) + \delta_c f_1(l,t), \\ \quad\vdots \\ \tilde{\nu}_n = \sum_{j=1}^{n} \delta_c^{n-j} f_j(l,t). \end{cases}$$

Обратный переход к функциям $\mu(t)$, $\nu(t)$ осуществляется аналогично предыдущему случаю.

3. Жорданова клетка порядка n. Если жорданова нормальная форма матрицы B — жорданова клетка порядка n, воспользуемся тем, что общий вид коммутирующей с J_B матрицы $\widetilde{C}$ известен [7]:

$$J_B = \begin{pmatrix} b & 0 & \dots & 0 \\ 1 & b & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & b \end{pmatrix}, \quad \widetilde{C} = \begin{pmatrix} c & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & c & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_n & \dots & c_2 & c \end{pmatrix}.$$

В общем случае две рассматриваемые матрицы не приводятся одним преобразованием к диагональному или двухдиагональному виду. Система имеет вид

$$\begin{cases} (w_1)_{tt} + 2b(w_1)_{xt} + c(w_1)_{xx} = 0, \\ (w_1)_{tt} + 2b(w_1)_{xt} + c(w_1)_{xx} = -2(w_1)_{xt} - c_2(w_1)_{xx}, \\ \qquad\vdots \\ (w_n)_{tt} + 2b(w_n)_{xt} + c(w_n)_{xx} = -2(w_{n-1})_{xt} - \sum_{j=1}^{n-1} c_{n-j+1}(w_j)_{xx}. \end{cases}$$

Видно, что уравнения снова получились неоднородными. Воспользуемся дифференциальным оператором, действующим по правилу

$$\delta_b f = -\frac{2}{q-p}\left(p\frac{\partial f}{\partial p} - q\frac{\partial f}{\partial q}\right),$$

и получим представление решений необходимых задач для приведенной выше системы

$$\begin{cases} w_1 = f_1, \\ w_2 = f_2 + \delta_b w_1 + c_2\delta_c w_1, \\ \quad\vdots \\ w_n = f_n + \delta_b w_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} c_{n-j+1}\delta_c w_j. \end{cases}$$

То есть

$$\begin{cases} \tilde{\mu}_1 = f_1(0,t), \\ \tilde{\mu}_2 = f_2(0,t) + \delta_b w_1(0,t) + c_2\delta_c w_1(0,t), \\ \quad\vdots \\ \tilde{\mu}_n = f_n(0,t) + \delta_b w_{n-1}(0,t) + \sum_{j=1}^{n} c_{n-j+1}\delta_c w_j(0,t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{\nu}_1 = f_1(l,t), \\ \tilde{\nu}_2 = f_2(l,t) + \delta_b w_1(l,t) + c_2\delta_c w_1(l,t), \\ \quad\vdots \\ \tilde{\nu}_n = f_n(l,t) + \delta_b w_{n-1}(l,t) + \sum_{j=1}^{n} c_{n-j+1}\delta_c w_j(l,t). \end{cases}$$

Обратный переход, как и ранее, осуществляется по формулам $\mu(t) = S\tilde{\mu}$, $\nu(t) = S\tilde{\nu}$.

4. Матрица B, включающая несколько жордановых клеток (хотя бы одна порядка больше 1) для одного собственного значения. Предположим, что матрица B состоит из нескольких жордановых клеток (соответствующих одному и тому же собственному значению b), хотя бы одна из которых имеет размерность больше 1. В этом случае две коммутативные матрицы B и C не всегда можно привести к жордановой нормальной форме с помощью одного преобразованием подобия, однако их можно одновременно привести к треугольному виду преобразованием с унитарной матрицей [13]. Пусть S_1 ($\det S_1 \neq 0$) — матрица перехода:

$$S_1^{-1} B S_1 = \widetilde{B}, \quad S_1^{-1} C S_1 = \widetilde{C},$$

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} b & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n-1} & b \end{pmatrix}, \quad \widetilde{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & \dots & c_{n,n-1} & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система уравнений при этом примет вид

$$\begin{cases} (w_1)_{tt} + 2b(w_1)_{xt} + c_{11}(w_1)_{xx} = 0, \\ (w_2)_{tt} + 2b(w_2)_{xt} + c_{22}(w_2)_{xx} = -b_{21}(w_1)_{xt} - c_{21}(w_1)_{xx}, \\ \quad\vdots \\ (w_n)_{tt} + 2b(w_n)_{xt} + c_{nn}(w_n)_{xx} = -\sum_{j=1}^{n-1} b_{nj}(w_j)_{xt} - \sum_{j=1}^{n-1} c_{nj}(w_j)_{xx}. \end{cases}$$

Уравнения системы (начиная со второго) являются, вообще говоря, неоднородными. Их правая часть зависит от решений предыдущих уравнений. Поэтому в данном случае следует последовательно решать необходимые задачи для каждого из уравнений и подставлять полученные решения в правую часть следующих уравнений. При этом необходимо следить за областями, в которых строятся решения, поскольку характеристики уравнений системы могут различаться.

Таким образом, для коммутативных матриц B, C построено решение задачи управления (1)–(3). В работе использованы результаты исследований В. А. Ильина и Е. И. Моисеева [14, 15].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Б. И. Пташник*, Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев: Наукова думка, 1984. 264 с. [*B. I. Ptashnik*, Ill-posed boundary value problems for partial differential equations. Kiev: Naukova Dumka, 1984. 264 pp.]
2. *А. Г. Бутковский*, Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с. [*A. G. Butkovskiy*, Theory of optimal control of systems with distributed parameters. Moscow: Nauka, 1965. 474 pp.]
3. *В. А. Светлицкий*, Механика гибких стержней и нитей. М.: Машиностроение, 1978. 224 с. [*V. A. Svetlitskiy*, The mechanics of flexible rods and threads. Moscow: Mashinostroenie, 1978. 224 pp.]
4. *В. Я. Скоробогатько*, Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Киев: Наукова думка, 1980. 244 с. [*V. Ja. Skorobogat'ko*, Investigation in the qualitative theory of partial differential equations. Kiev: Naukova Dumka, 1980. 244 pp.]
5. *А. А. Андреев, С. В. Лексина*, "Задача граничного управления в условиях первой краевой задачи для системы гиперболического типа второго порядка" // *Диффер. уравн.*, 2011. Т. 47, № 6. С. 843–849; англ. пер.: *A. A. Andreev, S. V. Leksina*, "Boundary control problem for the first boundary value problem for a second-order system of hyperbolic type" // *Differ. Equ.*, 2011. Vol. 47, no. 6. Pp. 848–854.
6. *С. А. Авдонин, М. И. Белишев, С. А. Иванов*, "Граничное управление и матричная обратная задача для уравнения $u_{tt} - u_{xx} + V(x)u = 0$" // *Матем. сб.*, 1991. Т. 182, № 3. С. 307–331; англ. пер.: *S. A. Avdonin, M. I. Belishev, S. A. Ivanov*, "Boundary control and a matrix inverse problem for the equation $u_{tt} - u_{xx} + V(x)u = 0$" // *Math. USSR-Sb.*, 1992. Vol. 72, no. 2. Pp. 287–310.
7. *Ф. Р. Гантмахер*, Теория матриц. М.: Наука, 1988. 549 с. [*F. R. Gantmakher*, Theory of matrices. Moscow: Nauka, 1988. 549 pp.]
8. *П. Ланкастер*, Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с. [*P. Lankaster*, Theory of matrices. Moscow: Nauka, 1978. 280 pp.]
9. *А. В. Бицадзе*, Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.; англ. пер.: *A. V. Bitsadze*, Some Classes of Partial Differential Equations / Advanced Studies in Contemporary Mathematics. Vol. 4. New York: Gordon and Breach, 1988. 520 pp.
10. *Е. А. Козлова*, "Задача о полном успокоении для гиперболического уравнения, содержащего смешанную производную" // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 4(25). С. 37–42. [*E. A. Kozlova*, "Damping problem for the hyperbolic equation with mixed derivative" // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2011. no. 4(25). Pp. 37–42].
11. *Е. А. Козлова*, "Задача управления для гиперболического уравнения в случае характеристик с угловыми коэффициентами одного знака" // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 1(26). С. 243–247. [*E. A. Kozlova*, "Control problem for the hyperbolic equation with the characteristics having the angular coefficients of the same sign" // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012. no. 1(26). Pp. 243–247].
12. *А. А. Андреев, С. В. Лексина*, "Задача граничного управления для системы волновых уравнений" // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. № 1(16). С. 5–10. [*A. A. Andreev, S. V. Leksina*, "The boundary control problem for the system of wave equations" // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2008. no. 1(16). Pp. 5–10].
13. *М. Маркус, Х. Минк*, Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972. 232 с. [*M. Marcus, H. Minc*, A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities. Moscow: Nauka, 1972. 232 pp.]
14. *В. А. Ильин*, "Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией" // *Диффер. уравн.*,

2000. Т. 36, № 11. С. 1513–1528; англ. пер.: *V. A. Il'in*, "Boundary control of oscillations on two ends in terms of the generalized solution of the wave equation with finite energy" // *Differ. Equ.*, 2000. Vol. 36, no. 11. Pp. 1659–1675.

15. *В. А. Ильин, Е. И. Моисеев*, "Граничное управление на двух концах процессом, описываемым телеграфным уравнением" // *Докл. Акад. наук*, 2004. Т. 394, № 2. С. 154–158. [*V. A. Il'in, E. I. Moiseev*, "Boundary control at two endpoints of a process described by the telegraph equation" // *Dokl. Akad. Nauk*, 2004. Vol. 394, no. 2. Pp. 154–158].

Поступила в редакцию 19/XI/2012;
в окончательном варианте — 15/I/2013.

MSC: 35L20, 35B37; 35Q93, 35L51

BOUNDARY CONTROL FOR THE PROCESSES, DESCRIBED BY HYPERBOLIC SYSTEMS

A. A. Andreev, E. A. Kozlova, S. V. Lexina

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mails: andre01071948@yandex.ru, leni2006@mail.ru, lesveta@rambler.ru

The boundary control problem for the system of hyperbolic equations with the mixed derivative is considered. The control is provided by the displacement (in the conditions of the first boundary-value problem). The coefficient matrices of different structure are explored for the system. The commutativity of these coefficients is the essential condition. If the matrices couldn't be brought to the diagonal form simultaneously, it's offered to use special differential operators for representation of the necessary problems solutions.

Key words: *boundary control, system of hyperbolic equations, mixed derivative, Jordan canonical form, Jordan cell.*

Original article submitted 19/XI/2012;
revision submitted 15/I/2013.

Alexander A. Andreev (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associated Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Elena A. Kozlova*, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Svetlana V. Lexina* (Ph. D. (Phys. & Math.)), Deputy Chief, Information and Communication Management.