УДК 517.956.6

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ЛАВРЕНТЬЕВА—БИЦАДЗЕ

О. А. Архипова

Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
443001, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

E-mail: www.aolga@mail.ru

Для нагруженного дифференциального уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа второго порядка в прямоугольной области рассмотрена первая граничная задача. Ранее были изучены локальные и нелокальные задачи для нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных отдельных и смешанных типов в области, у которых гиперболическая часть представляет собой характеристический треугольник. В данной работе в отличие от известных работ методом спектрального анализа найдены необходимые и достаточные условия единственности решения поставленной задачи.

Ключевые слова: *нагруженное уравнение смешанного типа, задача Дирихле, спектральный метод, критерий единственности.*

Введение. Рассмотрим нагруженное уравнение смешанного типа

$$Lu = u_{xx} + (\operatorname{sgn} t)\, u_{tt} + a(t)u(x,0) + b(t)u(x,d) = 0 \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t) : 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$, где α, β — заданные положительные действительные числа, $a(t) = a_1(t)$ при $t \geqslant 0$, $a(t) = a_2(t)$ при $t \leqslant 0$, $b(t) = b_1(t)$ при $t \geqslant 0$, $b(t) = b_2(t)$ при $t \leqslant 0$, $d = d_1$, при $t > 0$, $d_1 \in (0,\beta)$, $d = -d_2$ при $t < 0$, $d_2 \in (0,\alpha)$, d_1 и d_2 — заданные положительные числа из указанных промежутков, $a_i(t)$, $b_i(t)$, $i = 1, 2,$ — заданные непрерывные функции. Числа $a_1(0)$ и $a_2(0)$ и соответственно $b_1(0)$ и $b_2(0)$ здесь не связаны никакими условиями.

Задача Дирихле. *Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x, t) \in C^1\left(\overline{D}\right) \cap C^2(D_+ \cup D_-)\,; \tag{2}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0, \quad (x, t) \in D_+ \cup D_-;$$

$$u(0, t) = u(1,t) = 0, \quad -\alpha \leqslant t \leqslant \beta; \tag{3}$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, при этом $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Отметим, что в работе [1] для нагруженного параболо-гиперболического уравнения в прямоугольной области изучена начально-граничная задача, в которой методом спектральных разложений [2] установлен критерий единственности решения этой задачи и само решение построено в виде суммы

Ольга Анатольевна Архипова, аспирант, каф. высшей математики.

ряда по собственным функциям соответствующей одномерной задачи на собственные значения.

Ранее в работах [3–10] изучены краевые задачи (локальные и нелокальные) для нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных отдельных и смешанных типов в классических областях, у которых гиперболическая часть представляет собой характеристический треугольник. В работе [11] изучена задача (2)–(4) для уравнения (1) при $b(t) \equiv 0$ в прямоугольной области D.

В данной работе в соответствии с [1,2,11] установлен критерий единственности решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа с нагруженными слагаемыми (1) при $b(t) \neq 0$ в прямоугольной области D.

1. Единственность. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (2)–(4). Рассмотрим функцию

$$u_k(t) = \sqrt{2}\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x dx, \tag{5}$$

где $\lambda_k = \pi k$, $k \in \mathbb{N}$. На основании (5) введём функцию

$$u_{k,\varepsilon}(t) = \sqrt{2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x,t)\sin\lambda_k x dx, \tag{6}$$

где ε — достаточно малое положительное число. Дифференцируя равенство (6) по t два раза при $t \in (-\alpha,\, 0) \cup (0,\, \beta)$ и учитывая уравнение (1), получим

$$\begin{aligned} u''_{k,\varepsilon}(t) &= \sqrt{2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{tt}\,(x,\,t)\sin\lambda_k x dx = \\ &= \sqrt{2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \left[-u_{xx} - a_1(t)u\,(x,\,0) - b_1\,(t)\,u\,(x,\,d_1)\right]\sin\lambda_k x dx = \\ &= -\sqrt{2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{xx}\sin\lambda_k x dx - \sqrt{2}a_1\,(t)\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u\,(x,\,0)\sin\lambda_k x dx - \\ &\qquad - \sqrt{2}b_1\,(t)\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u\,(x,\,d_1)\sin\lambda_k x dx, \quad t > 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u''_{k,\varepsilon}(t) &= \sqrt{2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{tt}\,(x,\,t)\sin\lambda_k x dx = \\ &= \sqrt{2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \left[u_{xx} + a_2(t)u\,(x,\,0) + b_2(t)u\,(x,\,-d_2)\right]\sin\lambda_k x dx = \\ &= \sqrt{2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{xx}\sin\lambda_k x dx + \sqrt{2}a_2\,(t)\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u\,(x,\,0)\sin\lambda_k x dx + \\ &\qquad + \sqrt{2}b_2\,(t)\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u\,(x,\,-d_2)\sin\lambda_k x dx, \quad t < 0. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям два раза в интегралах, содержащих u_{xx}, и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, с учётом однородных граничных условий (3) получим

$$u''_k(t) - \lambda_k^2 u_k(t) = -a_1(t)u_k\,(0) - b_1(t)u_k\,(d_1)\,, \quad t > 0, \tag{7}$$

$$u''_k(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = a_2(t)u_k\,(0) + b_2(t)u_k\,(-d_2)\,, \quad t < 0. \tag{8}$$

Дифференциальные уравнения (7) и (8) имеют общие решения

$$u_k(t) = \begin{cases} lC_k\Big[e^{\lambda_k t} - \dfrac{a_{1k}(t)}{\lambda_k} - \dfrac{M_{1k}}{\lambda_k}b_{1k}(t)\Big] + \\ \qquad + D_k\Big[e^{-\lambda_k t} - \dfrac{a_{1k}t}{\lambda_k} - \dfrac{M_{2k}}{\lambda_k}b_{1k}(t)\Big], \quad t < 0, \\ A_k\Big[\cos\lambda_k t + \dfrac{a_{2k}(t)}{\lambda_k} + N_{1k}b_{2k}(t)\Big] + \\ \qquad + B_k\left[\sin\lambda_k t - N_{2k}b_{2k}(t)\right], \qquad t > 0, \end{cases} \tag{9}$$

где

$$M_{1k} = \frac{\lambda_k e^{\lambda_k d_1} - a_{1k}(d_1)}{\lambda_k + b_{1k}(d_1)}, \quad M_{2k} = \frac{\lambda_k e^{-\lambda_k d_1} - a_{1k}(d_1)}{\lambda_k + b_{1k}(d_1)},$$

$$N_{1k} = \frac{\lambda_k \cos\lambda_k d_2 + a_{2k}(-d_2)}{\lambda_k - b_{2k}(-d_2)}, \quad N_{2k} = \frac{\lambda_k \sin\lambda_k d_2}{\lambda_k - b_{2k}(-d_2)},$$

$$a_{1k}(t) = \int_0^t a_1(s)\,\mathrm{sh}\left[\lambda_k(t-s)\right]ds, \quad b_{1k}(t) = \int_0^t b_1(s)\,\mathrm{sh}\left[\lambda_k(t-s)\right]ds,$$

$$a_{2k}(t) = \int_t^0 a_2(s)\sin\left[\lambda_k(s-t)\right]ds, \quad b_{2k}(t) = \int_t^0 b_2(s)\sin\left[\lambda_k(s-t)\right]ds,$$

A_k, B_k, C_k, D_k — произвольные постоянные, при этом выполняются условия

$$\lambda_k + b_{1k}(d_1) \neq 0, \quad \lambda_k - b_{2k}(-d_2) \neq 0. \tag{10}$$

Для функции (9) в силу (2) выполнены условия сопряжения

$$u_k(0+0) = u_k(0-0), \quad u_k'(0+0) = u_k'(0-0). \tag{11}$$

Условия (11) для функций (9) имеют место только в том случае, когда

$$C_k = (A_k + B_k)/2, \quad D_k = (A_k - B_k)/2. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (9), получим

$$u_k(t) = \begin{cases} A_k\Big[\mathrm{ch}\,\lambda_k t - \dfrac{a_{1k}(t)}{\lambda_k} - \widetilde{M}_{1k}b_{1k}(t)\Big] + \\ \qquad + B_k\Big[\mathrm{sh}\,\lambda_k t - \widetilde{M}_{2k}b_{1k}(t)\Big], \quad t > 0, \\ A_k\Big[\cos\lambda_k t + \dfrac{a_{2k}(t)}{\lambda_k} + N_{1k}b_{2k}(t)\Big] + \\ \qquad + B_k\Big[\sin\lambda_k t - N_{2k}b_{2k}(t)\Big], \quad t < 0, \end{cases} \tag{13}$$

где

$$\widetilde{M}_{1k} = \frac{\lambda_k\,\mathrm{ch}\,\lambda_k d_1 - a_{1k}(d_1)}{\lambda_k(\lambda_k + b_{1k}(d_1))}, \quad \widetilde{M}_{2k} = \frac{\mathrm{sh}\,\lambda_k d_1}{\lambda_k + b_{1k}(d_1)}.$$

Для нахождения постоянных A_k и B_k воспользуемся условиями (4) и формулой (5):

$$u_k(\beta) = \sqrt{2}\int_0^1 u(x,\beta)\sin\lambda_k x\,dx = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi(x)\sin\lambda_k x\,dx = \varphi_k, \tag{14}$$

$$u_k(-\alpha) = \sqrt{2}\int_0^1 u(x,-\alpha)\sin\lambda_k x\,dx = \sqrt{2}\int_0^1 \psi(x)\sin\lambda_k x\,dx = \psi_k. \tag{15}$$

Тогда из (13) на основании (14) и (15) найдём

$$A_k = \frac{-\psi_k}{\Delta(k)}\left[\operatorname{sh}\lambda_k\beta - \widetilde{M}_{2k}b_{1k}(\beta)\right] - \frac{\varphi_k}{\Delta(k)}\left[\sin\lambda_k\alpha + N_{2k}b_{2k}\left(-\alpha\right)\right], \tag{16}$$

$$B_k = \frac{\psi_k}{\Delta(k)}\Big[\operatorname{ch}\lambda_k\beta - \frac{a_{1k}(\beta)}{\lambda_k} - \widetilde{M}_{1k}b_{1k}(\beta)\Big] - \\ - \frac{\varphi_k}{\Delta(k)}\Big[\cos\lambda_k\alpha + \frac{a_{2k}\left(-\alpha\right)}{\lambda_k} + N_{1k}b_{2k}\left(-\alpha\right)\Big], \tag{17}$$

при этом для всех $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\Delta\left(k\right) = -\sin\lambda_k\alpha\Big(\operatorname{ch}\lambda_k\beta - \frac{a_{1k}(\beta)}{\lambda_k} - \widetilde{M}_{1k}b_{1k}(\beta)\Big) - \cos\lambda_k\alpha\big(\operatorname{sh}\lambda_k\beta - \widetilde{M}_{2k}b_{1k}(\beta)\big) - \\ - \Big(\operatorname{ch}\lambda_k\beta - \frac{a_{1k}(\beta)}{\lambda_k} - \widetilde{M}_{1k}b_{1k}(\beta)\Big)N_{2k}b_{2k}(-\alpha) + \\ + \Big(\frac{a_{2k}\left(-\alpha\right)}{\lambda_k} + N_{1k}b_{2k}(-\alpha)\Big)\big(\operatorname{sh}\lambda_k\beta - \widetilde{M}_{2k}b_{1k}(\beta)\big) \neq 0. \tag{18}$$

Подставляя (16), (17) в (13), найдём окончательный вид функций

$$u_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\psi_k\widetilde{M}_{2k}}{\Delta(k)}\left[b_{1k}(\beta)\operatorname{ch}\lambda_k t - b_{1k}(t)\operatorname{ch}\lambda_k\beta\right] + \dfrac{\varphi_k\Delta_+\left(k,t\right)}{\Delta\left(k\right)} + \\ + \dfrac{\psi_k\widetilde{M}_{1k}}{\Delta(k)}\left[\operatorname{sh}\lambda_k\beta b_{1k}(t) - \operatorname{sh}\lambda_k t b_{1k}(\beta)\right] + \dfrac{\psi_k}{\Delta(k)}\operatorname{sh}\left[\lambda_k\left(t-\beta\right)\right] + \\ + \dfrac{\psi_k}{\lambda_k\Delta(k)}\left[\operatorname{sh}\lambda_k\beta a_{1k}(t) - \operatorname{sh}\lambda_k t a_{1k}(\beta)\right] - \\ - \dfrac{\psi_k\widetilde{M}_{2k}}{\lambda_k\Delta(k)}\left[a_{1k}(t)b_{1k}(\beta) + a_{1k}(\beta)b_{1k}(t)\right], \qquad t > 0, \\ \dfrac{\varphi_k N_{2k}}{\lambda_k\Delta\left(k\right)}\left[b_{2k}(t)\left(\lambda_k\cos\lambda_k\alpha + a_{2k}(-\alpha)\right)\right] - \\ - \dfrac{\varphi_k N_{2k}}{\lambda_k\Delta\left(k\right)}\left[b_{2k}\left(-\alpha\right)\left(\lambda_k\cos\lambda_k t + a_{2k}(t)\right)\right] - \\ - \dfrac{\varphi_k N_{1k}}{\Delta\left(k\right)}\left[b_{2k}(t)\sin\lambda_k\alpha + b_{2k}(-\alpha)\sin\lambda_k t\right] + \dfrac{\psi_k\Delta_-\left(k,t\right)}{\Delta\left(k\right)} - \\ - \dfrac{\varphi_k}{\lambda_k\Delta\left(k\right)}\left[a_{2k}(t)\sin\lambda_k\alpha + a_{2k}\left(-\alpha\right)\sin\lambda_k t\right] - \\ - \dfrac{\lambda_k\varphi_k}{\lambda_k\Delta\left(k\right)}\sin\left[\lambda_k\left(\alpha+t\right)\right], \qquad t < 0. \end{cases} \tag{19}$$

Здесь

$$\Delta_+(k,t) = -\sin\lambda_k\alpha\Big(\operatorname{ch}\lambda_k t - \frac{a_{1k}(t)}{\lambda_k} - \widetilde{M}_{1k}b_{1k}(t)\Big) - \\ - \cos\lambda_k\alpha\Big(\operatorname{sh}\lambda_k t - \widetilde{M}_{2k}b_{1k}(t)\Big) - \\ - \Big(\operatorname{ch}\lambda_k t - \frac{a_{1k}(t)}{\lambda_k} - \widetilde{M}_{1k}b_{1k}(t)\Big)N_{2k}b_{2k}(-\alpha) + \\ + \Big(\frac{a_{2k}(-\alpha)}{\lambda_k} + N_{1k}b_{2k}(-\alpha)\Big)\big(\operatorname{sh}\lambda_k t - \widetilde{M}_{2k}b_{1k}(t)\big), \quad t > 0,$$

$$\Delta_-(k,t) = -\sin\lambda_k t\Big(\operatorname{ch}\lambda_k\beta - \frac{a_{1k}(\beta)}{\lambda_k} - \widetilde{M}_{1k}b_{1k}(\beta)\Big) - \\ - \cos\lambda_k t\big(\operatorname{sh}\lambda_k\beta - \widetilde{M}_{2k}b_{1k}(\beta)\big) - \\ - \Big(\operatorname{ch}\lambda_k\beta - \frac{a_{1k}(\beta)}{\lambda_k} - \widetilde{M}_{1k}b_{1k}(\beta)\Big)N_{2k}b_{2k}(t) + \\ + \Big(\frac{a_{2k}(t)}{\lambda_k} + N_{1k}b_{2k}(t)\Big)\big(\operatorname{sh}\lambda_k\beta - \widetilde{M}_{2k}b_{1k}(\beta)\big), \quad t < 0.$$

Таким образом, функции $u_k(t)$ однозначно определены, что позволяет доказать теорему единственности решения задачи (2)–(4).

Пусть $u(x,\,t)$ — решение однородной задачи (2)–(4) (при $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$) и выполнены условия (18) при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\varphi_k = \psi_k \equiv 0$ и из формул (19) и (5) следует, что при любом $t \in [-\alpha,\,\beta]$

$$\int_0^1 u(x,\,t)\sin\lambda_k x dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots \tag{20}$$

Из равенств (20) в силу полноты системы синусов $\left\{\sqrt{2}\sin\lambda_k x\right\}$ в пространстве $L_2[0,1]$ следует, что $u(x,t) = 0$ почти всюду на $[0,1]$ при любом $y \in [-\alpha,\beta]$. Поскольку в силу (2) функция $u(x,\,t)$ непрерывна в $\overline{D}$, то $u(x,\,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых α, β, $a(t)$, $b(t)$ и $k = p \in N$ нарушено условие (18):

$$\Delta(p) = -\sin\lambda_p\alpha\Big(\operatorname{ch}\lambda_p\beta - \frac{a_{1p}(\beta)}{\lambda_p} - \widetilde{M}_{1p}b_{1p}(\beta)\Big) - \\ - \cos\lambda_p\alpha\big(\operatorname{sh}\lambda_p\beta - \widetilde{M}_{2p}b_{1p}(\beta)\big) - \\ - \Big(\operatorname{ch}\lambda_p\beta - \frac{a_{1p}(\beta)}{\lambda_p} - \widetilde{M}_{1p}b_{1p}(\beta)\Big)N_{2p}b_{2p}(-\alpha) + \\ + \left(\frac{a_{2p}(-\alpha)}{\lambda_p} + N_{1p}b_{2p}(-\alpha)\right)\left(\operatorname{sh}\lambda_p\beta - \widetilde{M}_{2p}b_{1p}(\beta)\right) = 0. \tag{21}$$

Тогда однородная задача (2)–(4) (при $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_p(x,\,t) = u_p(t)\sin\lambda_p x,$$

где функция $u_p(t)$ определяется по формуле:

$$u_p(t) = \begin{cases} \dfrac{A_p\widetilde{M}_{2p}}{A\left(b_1, d_1\right)}\left[a_{1p}(t)b_{1p}(\beta) - b_{1p}(t)a_{1p}(\beta)\right] + \\ \qquad + \dfrac{\lambda_p A_p\widetilde{M}_{2p}}{A\left(b_1, d_1\right)}\left[\operatorname{ch}\lambda_p\beta b_{1p}(t) - \operatorname{ch}\lambda_p t b_{1p}(\beta)\right] + \\ \qquad + \dfrac{\lambda_p A_p\widetilde{M}_{1p}}{A\left(b_1, d_1\right)}\left[\operatorname{sh}\lambda_p t b_{1p}(\beta) - \operatorname{sh}\lambda_p\beta b_{1p}(t)\right] + \\ \qquad + \dfrac{A_p}{A\left(b_1, d_1\right)}\left[\operatorname{sh}\lambda_p t a_{1p}(\beta) - \operatorname{sh}\lambda_p\beta a_{1p}(t)\right] + \\ \qquad\qquad + \dfrac{\lambda_p A_p}{A\left(b_1, d_1\right)}\operatorname{sh}\left[\lambda_p\left(\beta - t\right)\right], \quad t \geqslant 0, \\ \dfrac{\lambda_p A_p}{A\left(b_1, d_1\right)}\left(\sin\lambda_p t\left(\operatorname{ch}\lambda_p\beta - \dfrac{a_{1p}(\beta)}{\lambda_p} - \widetilde{M}_{1p}b_{1p}(\beta)\right)\right) - \\ \qquad - \cos\lambda_p t\left(\operatorname{sh}\lambda_p\beta - \widetilde{M}_{2p}b_{1p}(\beta)\right) - \\ \qquad - \left(\operatorname{ch}\lambda_p\beta - \dfrac{a_{1p}(\beta)}{\lambda_p} - \widetilde{M}_{1p}b_{1p}(\beta)\right)N_{2p}b_{2p}(t) + \\ \qquad\qquad + \left(\dfrac{a_{2p}(t)}{\lambda_p} + N_{1p}b_{2k}(t)\right)\widetilde{M}_{2p}b_{1p}(\beta), \quad t \leqslant 0. \end{cases} \tag{22}$$

Здесь $A_p \neq 0$, $B_p \neq 0$ — произвольные постоянные, $A\left(b_1, d_1\right) = \lambda_p \operatorname{sh}\lambda_p\beta - - \widetilde{M}_{2p}b_{1p}(\beta)$.

Действительно, функция (22) по построению удовлетворяет условиям (2)–(3), а в силу условия (21) для нее выполняются равенства

$$u_p\left(x, \beta\right) = u_p\left(x, -\alpha\right) = 0$$

при всех $x \in [0, 1]$, так как

$$u_p(\beta) = 0, \quad u_p\left(-\alpha\right) = \frac{A_p\Delta\left(p\right)}{A\left(b_1, d_1\right)} = 0.$$

Естественно, возникает вопрос о существовании нулей выражения $\Delta(k)$. Для этого $\Delta(k)$ представим в следующем виде:

$$-\Delta(k) = P_k\sin\lambda_k\alpha + Q_k\cos\lambda_k\alpha + L_k, \tag{23}$$

где

$$P_k = \operatorname{ch}\lambda_k\beta - \frac{1}{\lambda_k}a_{1k}(\beta) - \widetilde{M}_{1k}b_{1k}(\beta), \quad Q_k = \operatorname{sh}\lambda_k\beta - \widetilde{M}_{2k}b_{1k}(\beta),$$

$$L_k = P_kN_{2k}b_{2k}(-\alpha) + \left(\frac{1}{\lambda_k}a_{2k}(-\alpha) + N_{1k}b_{2k}(-\alpha)\right)Q_k.$$

Из соотношения (23) имеем

$$\sin\left(\lambda_k\alpha + \varphi_k\right) = -\frac{L_k}{\sqrt{P_k^2 + Q_k^2}}, \quad \varphi_k = \arcsin\frac{Q_k}{\sqrt{P_k^2 + Q_k^2}}. \tag{24}$$

Отсюда при условии

$$\frac{|L_k|}{\sqrt{P_k^2+Q_k^2}} \leqslant 1 \tag{25}$$

уравнение (24) равносильно следующему уравнению:

$$\alpha = \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_k} \arcsin \frac{L_k}{\sqrt{P_k^2+Q_k^2}} + \frac{n}{k} - \frac{\varphi_k}{\lambda_k} = f(\alpha), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{26}$$

Если $b_{2k}(-\alpha)=0$, то

$$L_k = \frac{1}{\lambda_k} a_{2k}(-\alpha) Q_k,$$

и тогда

$$\frac{|L_k|}{\sqrt{P_k^2+Q_k^2}} \leqslant \frac{|a_{2k}(-\alpha)|}{\lambda_k} \leqslant \frac{\alpha\|a_2\|}{\lambda_k}, \quad \|a_2\| = \max_{-\alpha\leqslant s\leqslant 0} |a_2\,(s)\,|.$$

Отсюда видно, что существует $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $k > k_0$

$$\frac{\alpha\|a_2\|}{\lambda_k} \leqslant 1.$$

Следовательно, при $b_{2k}(-\alpha)=0$ неравенство (25) при больших k всегда выполнено.

Если $b_{2k}(-\alpha)=0$ и $a_{2k}(-\alpha)=0$, то $L_k=0$, и из уравнения (26) получим

$$\alpha = \frac{n}{k} - \frac{\varphi_k}{\lambda_k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если $b_2(t)=b_2=\mathrm{const}\neq 0, a_2(t)=a_2=\mathrm{const}\neq 0$, то $b_{2k}(-\alpha) = b_2\,(1-\cos\lambda_k\alpha)\,/\lambda_k$ и $a_{2k}(-\alpha) = a_2\,(1-\cos\lambda_k\alpha)\,/\lambda_k$, и тогда выражение (23) примет вид

$$-\Delta(k) = P_k \sin\lambda_k\alpha + \widetilde{Q}_k \cos\lambda_k\alpha + \widetilde{L}_k, \tag{27}$$

где

$$\widetilde{Q}_k = Q_k - \frac{b_2}{\lambda_k}\left(P_k N_{2k} + Q_k N_{1k}\right) - \frac{a_2}{\lambda_k^2} Q_k, \quad \widetilde{L}_k = \frac{b_2}{\lambda_k}\left(P_k N_{2k} + Q_k N_{1k}\right) + \frac{a_2 Q_k}{{\lambda_k}^2}.$$

Далее из соотношения (27) найдём

$$\sin\left(\lambda_k\alpha+\theta_k\right) = -\frac{\widetilde{L}_k}{\sqrt{P_k^2+\widetilde{Q}_k^2}}, \quad \theta_k = \arcsin \frac{\widetilde{Q}_k}{\sqrt{P_k^2+Q_k^2}}.$$

Отсюда при условии

$$\frac{|\widetilde{L}_k|}{\sqrt{P_k^2+\widetilde{Q}_k^2}} \leqslant 1 \tag{28}$$

получим
$$\alpha = \frac{(-1)^{m+1}}{\lambda_k} \arcsin \frac{\widetilde{L}_k}{\sqrt{P_k^2 + \widetilde{Q}_k^2}} + \frac{m}{k} - \frac{\theta_k}{\lambda_k}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $\widetilde{L}_k$ является бесконечно малой величиной при $k \to \infty$, при больших k неравенство (28) всегда имеет место.

В общем случае при выполнении неравенства (25) для разрешимости нелинейного уравнения (26) относительно α достаточно потребовать, чтобы производная $|f'(\alpha)| \leqslant d < 1$. Последнее условие выполнено, когда $\|b_2\|$ и $\|a_2\|$ достаточно малы.

Таким образом, нами установлен следующий критерий единственности.

Теорема. *Если существует решение задачи* (2)–(4) *и выполнены условия* (10), *то оно единственно только тогда, когда условия* (18) *справедливы при всех* $k \in \mathbb{N}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сабитов К. Б.*, “Начально-граничная задача для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа” // *Докл. АМАН*, 2009. Т. 11, № 1. С. 66–73. [*K. B. Sabitov*, “Initial-boundary value problem for a loaded parabolic-hyperbolic equation” // *Dokl. AMAN*, 2009. Vol. 11, no. 1. Pp. 66–73].
2. *К. Б. Сабитов*, “Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического в прямоугольной области” // *Матем. заметки*, 2009. Т. 86, № 2. С. 273–279; англ. пер.: *K. B. Sabitov*, “Tricomi problem for a mixed parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain” // *Math. Notes*, 2009. Vol. 86, no. 2. Pp. 249–254.
3. *А. М. Нахушев*, “О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка” // *Диффер. уравн.*, 1976. Т. 12, № 1. С. 103–108. [*A. M. Nakhushev*, “On the Darboux problem for a certain degenerate second-order loaded integro-differential equation” // *Differ. Uravn.*, 1976. Vol. 12, no. 1. Pp. 103–108].
4. *В. М. Казиев*, “Задача Трикоми для нагруженного уравнения Лаврентьева—Бицадзе” // *Диффер. уравн.*, 1979. Т. 15, № 1. С. 173–175. [*V. M. Kaziev*, “The Tricomi problem for a loaded Lavrent’ev–Bicadze equation” // *Differ. Uravn.*, 1979. Vol. 15, no. 1. Pp. 173–175].
5. *А. М. Нахушев*, “Нагруженные уравнения и их приложения” // *Диффер. уравн.*, 1983. Т. 19, № 1. С. 86–94. [*A. M. Nakhushev*, “Loaded equations and their applications” // *Differ. Uravn.*, 1983. Vol. 19, no. 1. Pp. 86–94].
6. *М. Т. Дженалиев*, К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Ин-т теоретической и прикладной математики, 1995. 270 с. [*M. T. Dzhenaliev*, A remark on the theory of linear boundary value problems for loaded differential equations. Almaty: Institute of Theoretical and Applied Mathematics, 1995. 270 pp.]
7. *Л. С. Пулькина*, “Нелокальная задача для нагруженного гиперболического уравнения” / В сб.: *Дифференциальные уравнения и динамические системы*: Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко / Тр. МИАН, Т. 236. М.: Наука, 2002. С. 298–303; англ. пер.: *L. S. Pul’kina*, “A nonlocal problem for a loaded hyperbolic equation.” // *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2002. Vol. 236. Pp. 285–290.
8. *А. И. Кожанов*, “Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи” // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2004. Т. 44, № 4. С. 694–716; англ. пер.: *A. I. Kozhanov*, “Nonlinear loaded equations and inverse problems” // *Comput. Math. Math. Phys.*, 2004. Vol. 44, no. 4. Pp. 657–675.

9. *А. М. Нахушев*, Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с. [*A. M. Nakhushev*, Problem with shift for partial differential equations. Moscow: Nauka, 2006. 287 pp.]
10. *К. У. Хубиев*, Локальные и нелокальные краевые задачи для нагруженных уравнений смешанного гиперболо-параболического типа: Автореферат дисс. … к.ф.-м.н.. Белгород, 2009. 15 с. [*K. U. Khubiev*, Local and nonlocal boundary value problems for a loaded mixed hyperbolic-parabolic type equations: Ph.D. Thesis (Phys. & Math.). Belgorod, 2009. 15 pp.]
11. *Е. П. Мелишева*, "Задача Дирихле для нагруженного уравнения Лаврентьева—Бицадзе" // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучная серия*, 2010. №6(80). С. 39–47. [*E. P. Melisheva*, "The Dirichlet problem for a loaded Lavrent'ev–Bitsadze equation" // *Vestn. SamGU. Yestestvennonauchnaya seriya*, 2010. no. 6(80). Pp. 39–47].

Поступила в редакцию 05/XI/2012;
в окончательном варианте — 24/I/2013.

MSC: 35M10; 35M12

A UNIQUENESS CRITERION FOR SOLUTIONS OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR A LOADED EQUATION WITH THE LAVRENT'EV-BITSADZE OPERATOR

O. A. Arhipova

Samara State University of Architecture and Civil Engineering,
194, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443001, Russia.

E-mail: `www.aolga@mail.ru`

The first boundary value problem was considered for the second order loaded differential equation of mixed elliptic-hyperbolic type in a rectangular region. The local and nonlocal problems for the loaded partial differential equations of the individual and mixed types have been previously studied in areas where the hyperbolic part is the characteristic triangle. In this work, in contrast to the well-known ones, necessary and sufficient conditions of the uniqueness of this problem solution were found by the method of spectral analysis.

Key words: *loaded equation of mixed type, Dirichlet problem, spectral method, criterion of uniqueness.*

Original article submitted 05/XI/2012;
revision submitted 24/I/2013.

Olga A. Arhipova, Postgraduate Student, Dept. of High Mathematics.