Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. № 1 (30). С. 53–69

УДК 517.956.223

L_p-ОЦЕНКИ НЕКАСАТЕЛЬНОЙ МАКСИМАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. К. Гущин

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
Россия, 119991, Москва, ул. Губкина, 8.

E-mail: akg@mi.ras.ru

Работа содержит обзор результатов, относящихся к изучению поведения вблизи границы решения задачи Дирихле с граничной функцией из L_p, $p > 1$, для эллиптического уравнения второго порядка, включающий новые утверждения и некоторые нерешённые задачи в этом направлении.

Ключевые слова: *эллиптическое уравнение, задача Дирихле, функциональное пространство.*

Работа посвящена изложению ряда результатов автора, относящихся к изучению поведения вблизи границы решения задачи Дирихле с граничной функцией из L_p, $p > 1$, для эллиптического уравнения второго порядка. Основным аппаратом исследования является оценка нормы в L_p некасательной максимальной функции через L_p-норму его граничного значения, установленная при тех же условиях на коэффициенты уравнения, при которых известна однозначная разрешимость этой задачи; внутри рассматриваемой области коэффициенты предполагаются только измеримыми и ограниченными. Существенное внимание уделяется распространению на такие уравнения теоремы Карлесона, дающей условия на борелевскую меру, необходимые и достаточные для справедливости оценки норм в пространстве L_p по этой мере аналитических в круге функций через L_p-норму их граничных значений, см. [1] и [2]. Для гармонических функций такая теорема была доказана Хермандером, см. [3]. Обобщение теоремы Карлесона на решения эллиптического уравнения позволяет дать описание граничного поведения решения задачи Дирихле в терминах принадлежности специальному функциональному пространству. В «гильбертовом» случае $p = 2$ близкие результаты были получены в работах [4–6].

Будем рассматривать следующую задачу Дирихле для однородного эллиптического уравнения второго порядка в самосопряжённой форме без младших членов

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) = 0, \qquad x \in Q, \tag{1}$$

$$u\,|_{\partial Q} = u_0 \tag{2}$$

с граничной функцией u_0 из $L_p(\partial Q)$, $p > 1$; $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — точка $\mathbb{R}_n$, а $Q \subset \mathbb{R}_n$ — ограниченная область с гладкой границей ∂Q, $\partial Q \in C^1$. Ко-

Анатолий Константинович Гущин (д.ф.-м.н., проф.), ведущий научный сотрудник, отдел математической физики.

эффициенты $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $x \in Q$, уравнения (1) являются измеримыми функциями, удовлетворяющими с некоторой положительной постоянной γ условию

$$\gamma \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \gamma^{-1} \quad \text{для всех}\, \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}_n,\ |\xi| = 1, \text{ и п.в. } x \in Q. \tag{3}$$

Далее симметрическую матрицу $a_{ij}(x)$ будем для краткости обозначать через $A(x)$; постоянную γ из (3) будем называть постоянной эллиптичности.

1. Однозначная разрешимость задачи Дирихле. Прежде всего остановимся на вопросах постановки рассматриваемой задачи Дирихле и на результатах по её разрешимости. Хорошо известно, что понятие обобщённого решения из соболевского пространства $W_2^1(Q)$ задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка не является в полном смысле обобщением понятия классического решения: не любое классическое решение является обобщённым. Естественным обобщением этих понятий является предложенное в работе [7] определение решения из $W_{2,\mathrm{loc}}^1$, в котором $u_0 \in L_2(\partial Q)$, а граничное значение понимается как предел в L_2 следов решения на «параллельных границе поверхностях». Разрешимость такой задачи и свойства её решений достаточно подробно изучены, см. [4–9]. В случае $u_0 \in L_p(\partial Q)$ с $p \neq 2$ обычно рассматривают, см. [10–13], решение из $W_{p,\mathrm{loc}}^1(Q)$, что гарантирует принадлежность следов решения на лежащих внутри области гладких $(n-1)$-мерных поверхностях пространству L_p и позволяет говорить о пределе в L_p на границе. Однако эта естественная постановка, как и постановка задачи в $W_p^1(Q)$, приводит к необходимости налагать дополнительные условия на данные задачи. Отметим, что задача Дирихле в $W_p^1(Q)$ достаточно полно изучена, см. по этому поводу работы [14, 15], в которых требовалась непрерывность коэффициентов уравнения. Напомним, что для разрешимости изучаемой задачи в пространстве $W_2^1(Q)$ никакие дополнительные условия не нужны. В случае негладкой границы граничное условие понимается как принадлежность разности решения и определённой в Q заданной функции из $W_2^1(Q)$ пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$. Если граница гладкая, то $u_0 \in W_2^{1/2}(\partial Q)$.

Следуя [16, 17], под решением задачи (1), (2) будем понимать функцию u из $W_{2,\mathrm{loc}}^1(Q)$, удовлетворяющую уравнению (1) в смысле равенства обобщённых функций и принимающую граничное значение u_0 в следующем смысле: найдётся такое положительное число r_0, что для граничной окрестности $V_{x^0} = B_{x^0}(r_0) \subset \partial Q$ произвольно взятой точки $x^0 \in \partial Q$ выполняется соотношение

$$\int_{V_{x^0}} |u(x + \delta\nu(x^0)) - u_0(x)|^p dS \ \to\ 0 \quad \text{при}\ \delta \to +0; \tag{2$'$}$$

здесь и далее $B_{x^0}(r) = \{x \in \mathbb{R}_n : |x| < r\}$ — n-мерный шар с центром в точке $x^0 \in \mathbb{R}_n$ радиуса $r > 0$, а $\nu(x^0)$ — единичный вектор внутренней нормали к ∂Q в точке x^0. Конечно, окрестность V_{x^0} должна быть такой, чтобы при достаточно малых $\delta > 0$ её сдвиг $\{x \in \mathbb{R}_n : x = x' + \delta\nu(x^0), x' \in V_{x^0}\}$ на расстояние δ вдоль нормали $\nu(x^0)$ лежал строго внутри области Q. Принадлежность решения пространству L_p на лежащих внутри Q гладких поверхностях следует из свойств внутренней гладкости решения, например, из теоремы Де Джорджи—Нэша, см. [18–20].

Такая постановка задачи Дирихле позволяет не требовать дополнительные условия на коэффициенты уравнения внутри области. Если рассматривать решение из $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$, то без дополнительных условий на коэффициенты внутри области при $p<2$ несправедливо утверждение о единственности решения (даже решения из $W^1_p(Q)$; не помогают и дополнительные условия гладкости коэффициентов на границе области), а при $p>2$, как хорошо известно, решение из $W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ не обязано принадлежать $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$, а следовательно, нет теоремы существования. Подробное обсуждение этого вопроса и соответствующие примеры имеются в работе [17]. Итак, внутри области от коэффициентов уравнения не нужно требовать никаких дополнительных условий: на любом лежащем в Q компакте матрица A может быть произвольной (удовлетворяющей (3)). Но на границе области дополнительные условия приходится требовать даже в «гильбертовом» случае $p=2$. Ослабление требований на принятие решением своего граничного значения приводит к необходимости условий гладкости границы области и коэффициентов уравнения на границе. Всюду далее мы будем предполагать, не оговаривая этого особо, что нормаль ν (внутренняя и единичная) непрерывна по Дини:

$$|\nu(x)-\nu(y)|\leqslant\omega(|x-y|),\quad x\in\partial Q,\quad y\in\partial Q, \tag{4}$$

а коэффициенты уравнения непрерывны по Дини на границе:

$$|a_{ij}(x)-a_{ij}(y)|\leqslant\omega(|x-y|),\quad i,j=1,2,\dots,n,\ \ x\in\partial Q,\ y\in Q \tag{5}$$

(значения функций a_{ij} можно так изменить на множестве нулевой меры, чтобы для всех $x\in\partial Q$ и $y\in Q$ выполнялось неравенство (5)); $\omega(t)$, $t>0$ — такая монотонная (принимающая положительные значения) функция, что интеграл от отношения $\omega(t)/t$ сходится в нуле.

При выполнении этих условий справедлива теорема об однозначной разрешимости рассматриваемой задачи. Для $p=2$ это утверждение было доказано в работе [4], а для произвольного показателя $p>1$ — в [17].

Теорема 1 [17]. *Для любой граничной функций u_0 из $L_p(\partial Q)$ существует решение задачи Дирихле* (1), (2). *Это решение единственно и для него справедлива оценка*

$$\sup_{\xi>0}\left(\frac{1}{\xi}\int_{\{x\in Q:\xi<r(x)<2\xi\}}|u|^p(x)dx\right)+\int_Q r(x)|u(x)|^{p-2}|\nabla u(x)|^2dx\leqslant$$
$$\leqslant\mathrm{const}\cdot\int_{\partial Q}|u_0(x)|^p dS \tag{6}$$

с зависящей только от n, γ, Q, ω и p постоянной.

Здесь и далее $r(x)$ — расстояние от точки $x\in Q$ до границы ∂Q, а S — $(n-1)$-мерная мера Лебега на ∂Q.

Условия (4), (5), при которых доказана теорема 1, по-видимому можно ослабить. Но отказаться от них, как отмечалось выше, нельзя. В [4] приведён пример, показывающий, что без дополнительных (к (3)) условий на коэффициенты уравнения нарушается утверждение о единственности решения при $p = 2$. Не помогает и более жёсткое в случае $p > 2$ условие (2′). Более точные достаточные для справедливости теоремы 1 условия на коэффициенты уравнения и границу области не известны. В частности, интересно было бы дать ответ на следующий вопрос: не сохраняется ли утверждение об однозначной разрешимости при условии непрерывности $A(x)$ на ∂Q?

Из оценки (6) теоремы 1 немедленно следует оценка нормы решения в пространстве $L_p(Q)$. Несложно получается из неё и оценка нормы в L_p на лежащей в рассматриваемой области гладкой $(n-1)$-мерной поверхности, точнее см. [17]. Более тонкой оценке, которая является мощным инструментом исследования граничного поведения решения, посвящён следующий пункт работы.

2. Оценка некасательной максимальной функции. Возьмём произвольное положительное число a и произвольную точку $x^0 \in \partial Q$. Обозначим через $\Gamma(x^0) = \Gamma(x^0; a)$ лежащий в области Q открытый усеченный конус фиксированной высоты h_0 с вершиной в x^0, ось которого направлена по внутренней нормали $\nu(x^0)$; в местной системе координат (в ортогональной системе координат, начало которой находится в точке x^0, а ось x_n направлена по нормали $\nu(x_0)$), этот конус описывается неравенствами $0 < x_n < h_0$, $|x'| < a x_n$. Высоту $h_0 = h_0(a, Q)$ (она одинакова для всех $x^0 \in \partial Q$) выберем столь малой, чтобы границы конуса и области пересекались только по вершине x^0. Пусть $M(x^0) = M(x^0; a) = \sup\{|u(x)| : x \in \Gamma(x^0; a)\}$ — некасательная (нетангенциальная) максимальная функция для решения u. Основным результатом этого пункта является следующее утверждение.

Теорема 2 [21]. *Для любого $a > 0$ и любой граничной функции u_0 из $L_p(\partial Q)$ решение u задачи Дирихле* (1), (2) *удовлетворяет оценке*

$$\int_{\partial Q} M^p(x; a) dS \leqslant \mathrm{const} \cdot \int_{\partial Q} |u_0(x)|^p dS, \tag{7}$$

постоянная в которой зависит от размерности пространства n, постоянной эллиптичности γ из (3), *области Q, функции ω из* (4), (5), *показателя суммирования p и раствора конуса a.*

Замечание. Из известных оценок решения внутри области (см., например, [22–24] или [17]) немедленно следует, что неравенство (7) остаётся справедливым, если к конусам $\Gamma(x^0)$, $x^0 \in \partial Q$, добавить произвольную компактно принадлежащую области Q подобласть Q' (например, множество точек области, отстоящих от границы на расстоянии большем, чем $h_0/2$).

Для гармонических функций некасательная максимальная функция и её связь с другими характеристиками граничного поведения (с интегралом площадей Лузина, с функцией Литтлвуда—Пэли и др.) детально изучены, см. [25–27]. В частности, известно и сформулированное утверждение, см., например, [27].

В силу принципа максимума оценку (7) достаточно доказать для решения с неотрицательным граничным значением u_0. А так как при $p > 2$ функция $u^{p/2}$ является субрешением, то достаточно рассмотреть случай $1 < p \leqslant 2$. Кроме того, можно ограничиться рассмотрением решений задачи с гладкой функцией u_0; справедливость теоремы в общем случае получается стандартным предельным переходом. При этом в силу замечания к теореме 2 можно ограничиться рассмотрением случая достаточно больших значений параметра a. С помощью покрытия прилегающей к границе части области достаточно малыми подобластями специального вида и распрямления соответствующих кусков границы доказательство теоремы 2 сводится к изучению свойств решения следующей задачи Дирихле.

Пусть a_0 — достаточно большое число, его выбор определяется размерностью пространства n, постоянной γ из (3), функцией ω и показателем суммируемости $p > 1$. Зафиксируем произвольно взятое число $a > a_0$. В усечённом конусе $\Omega = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}_n : |x'| < 1,\ 0 < x_n < (1 - |x'|)/a\}$ рассмотрим задачу Дирихле для уравнения (1) со следующим граничным условием:

$$u(x) = 0 \quad \text{при } x \in \partial\Omega,\ x_n > 0, \quad u(x', 0) = u_0(x'), \quad |x'| \leqslant 1; \tag{$2''$}$$

неотрицательную, непрерывно дифференцируемую функцию u_0 можно, кроме того, считать финитной: $\mathrm{supp} u_0 \subset B'$, $B' = \{x' \in \mathbb{R}_{n-1} : |x'| < 1\}$. Следующая теорема, утверждающая справедливость в рассматриваемой ситуации оценки некасательной максимальной функции через аналог интеграла площадей Лузина, не только является основным элементом доказательства теоремы 2, но и представляет самостоятельный интерес. Для гармонических функций оценки нормы в пространстве $L_p(\partial Q)$ некасательной максимальной функции через норму в том же пространстве интеграла площадей (и более общие утверждения) хорошо известны, см. [25–27]. В работе [28] показано, что такие результаты допускают распространение на классические решения эллиптического уравнения с гладкими коэффициентами в области, граница которой представляется в виде разности выпуклых функций. Для случая $p = 2$ такая оценка была установлена и в рассматриваемой ситуации, см. [4].

В общем случае ($p \neq 2$) доказанная в [17] теорема о разрешимости дает оценку (через норму в $L_p(\partial Q)$ граничной функции u_0) нормы в $L_2(\partial Q)$ интеграла площадей функции $u^{p/2}$. Оценка нормы в $L_p(\partial Q)$ интеграла площадей самого решения неизвестна; неочевидна и конечность этой нормы. В связи с этим нам потребовалась оценка нормы в $L_p(\partial Q)$ некасательной максимальной функции через норму в $L_2(\partial Q)$ интеграла площадей функции $u^{p/2}$; отметим, что в рассматриваемом сейчас случае $p < 2$ функция $u^{p/2}$ не является субрешением.

Пусть $\Gamma_1(x')$, $x' \in B' \subset \mathbb{R}_{n-1}$ — пересечение конуса $\Gamma(x'; a) = \{y = (y', y_n) \in \mathbb{R}_n : |y' - x'| < a y_n\}$ с областью Ω, $\Gamma_2(x') = \Gamma(x'; 2a) \cap \Omega$, $M(x') = \sup\{u(x) : x \in \Gamma_1(x')\}$, а $\mathcal{S}(x') = \left[\int_{\Gamma_2(x')} x_n^{2-n} |\nabla[u(x)]^{p/2}|^2 dx\right]^{1/2}$ — интеграл площадей функции $u^{p/2}$.

Теорема 3 [21]. *Для решения задачи* (1), ($2''$) *справедлива оценка*

$$\int_{B'} M_1^{p/2}(x')dx' \leqslant \mathrm{const} \cdot \int_{B'} \mathcal{S}^2(x')dx',$$

постоянная в которой зависит только от n, γ, ω *и* p.

В следующем пункте мы докажем несложное следствие теоремы 2, утверждающее существование у решения рассматриваемой задачи некасательного предела (предела по некасательному направлению) в почти всех точках границы.

3. Существование некасательного предела решения для п.в. точек границы. Естественным обобщением хорошо известной теоремы Фату, см. [29], является следующее утверждение: конечность почти всюду некасательной максимальной функции (некасательная ограниченность) для гармонической функции эквивалентна существованию п.в. некасательного предела, см. [25, 30, 31]. Из теоремы 2 вытекает справедливость такого типа (но существенно более слабого) утверждения и для решений рассматриваемой задачи. Напомним, что число A называется некасательным пределом функции u в точке $x^0 \in \partial Q$, если для любых положительных чисел ε и a найдётся такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon, a)$, что для всех точек $x \in \Gamma(x^0; a)$, удовлетворяющих неравенству $|x - x^0| < \delta$, выполняется оценка $|u(x) - A| < \varepsilon$.

Теорема 4. *Пусть $u_0 \in L_p(\partial Q)$ с некоторым $p > 1$. Тогда для п.в. $x^0 \in \partial Q$ решение задачи* (1), (2) *имеет некасательный предел в x^0 и этот предел равен значению граничной функции u_0 в этой точке.*

Доказательство. Пусть u_0 — произвольная функция из $L_p(\partial Q)$, а u — решение задачи (1), (2). Возьмём последовательность гладких функций $u_0^{(k)} \in C^1(\partial Q)$, $k = 1, 2, \ldots$, сходящуюся в $L_p(\partial Q)$ к граничной функции u_0. Выберем из неё подпоследовательность, сходящуюся (к u_0) п.в. на ∂Q; сохраним за ней то же обозначение. Обозначим через $\{u^{(k)}\}$ последовательность решений рассматриваемой задачи Дирихле с граничными значениями $u_0^{(k)}$. Отметим, что решения $u^{(k)}$ непрерывны (и даже непрерывны по Гёльдеру) в $\bar{Q}$, см. [22, 23, 32]. Имеем

$$\|u_0 - u_0^{(k)}\|_{L_p(\partial Q)} \to 0 \quad \text{при}\, k \to \infty,$$

$$u_0(x^0) - u_0^{(k)}(x^0) \to 0 \quad \text{при}\, k \to \infty \text{ для п.в. } x^0 \text{ из } \partial Q$$

и в силу оценки (7) теоремы 2 для решения $u - u^{(k)}$:

$$\int_{\partial Q} \Big[\sup\{|u(x) - u^{(k)}(x)| : x \in \Gamma(x^0; a)\}\Big]^p dS \leqslant$$
$$\leqslant \text{const} \cdot \int_{\partial Q} |u_0(x) - u_0^{(k)}(x)|^p dS \to 0 \text{ при } k \to \infty$$

для произвольного положительного a (конечно, постоянная в этом неравенстве зависит от a).

Возьмём произвольные положительные числа ε и a. Из стремящейся к нулю в $L_p(\partial Q)$ последовательности $\sup\{|u(x) - u^{(k)}(x)| : x \in \Gamma(x^0; a)\}$, $k = 1, 2, \ldots$, выберем стремящуюся к нулю п.в. на ∂Q подпоследовательность; опять будем обозначать выбранную подпоследовательность так же, как и саму последовательность. По построению имеем, что для почти всех точек x^0 из ∂Q функциональная последовательность $u^{(k)}(x)$ сходится к функции $u(x)$ равномерно на конусе $\Gamma(x^0; a)$. Зафиксируем произвольно взятую точку x^0 из множества полной меры, на котором имеется эта сходимость и $u_0^{(k)}$ сходится к u_0. По числу ε выберем номер k_0 так, чтобы выполнялись неравенства $|u(x)-u^{(k_0)}(x)| < \varepsilon/3$ для всех $x \in \Gamma(x^0; a)$ и $|u_0(x^0)-u_0^{(k_0)}(x^0)| < \varepsilon/3$; зафиксируем эту функцию $u^{(k_0)}$. Число $\delta > 0$ выберем теперь по $\varepsilon/3$ из непрерывности функции $u_0^{(k_0)}$ в точке (x^0).$\square$

Доказанная теорема о некасательной сходимости решения на границе представляет определённый интерес, но, как видно из сравнения с соответствующим результатом для гармонических функций, является довольно грубой. Кроме того, такого рода утверждения не имеют фундаментального значения для теории краевых задач для эллиптических уравнений. Дело в том, что в отличие от случая аналитических функций одного комплексного переменного в рассматриваемой ситуации условие сходимости п.в. на границе решения уравнения к заданному граничному значению не выделяет единственное решение.

Более существенным следствием теоремы 2 является аналог теоремы Карлесона об оценках в L_p по мерам решения задачи Дирихле. Этому вопросу будет посвящён следующий пункт работы.

4. Теорема карлесоновского типа для решений эллиптического уравнения второго порядка. Известные работы Л. Карлесона [1, 2], посвящённые проблеме интерполяции ограниченными аналитическими функциями одного комплексного переменного и доказательству теоремы о короне, основываются на следующей оценке аналитической в единичном круге $Q \subset \mathbb{C}$ функции.

Пусть неотрицательная борелевская мера μ (с носителем в $\bar{Q}$) удовлетворяет условию: существует такая постоянная C_μ, что для любой точки $z^0 \in \partial Q$ и любого положительного числа r выполняется неравенство

$$\mu(B_{z^0}(r)) \leqslant C_\mu r,$$

в котором $B_{z^0}(r)$ — круг с центром в точке z^0 радиуса r. Тогда для любой аналитической в Q функций u с граничным значением $u_0 = u\,|_{\partial Q}$ справедлива оценка

$$\iint_Q |u|^p d\mu \leqslant C \int_{\partial Q} |u_0|^p dS, \tag{8}$$

в которой $p > 0$, $C = C(p)C_\mu$, а $C(p)$ — положительная постоянная. Приведённое условие на меру является и необходимым для справедливости оценки (8) для всех аналитических в Q функций u.

В работе Л. Хермандера [3] аналогичный результат был доказан для гармонических функций в ограниченной области Q с дважды гладкой границей ($\partial Q \in C^2$). Для справедливости оценки (8) для всех гармонических в Q функций с граничным значением u_0 из $L_p(\partial Q)$, $p > 1$, необходимо и достаточно, чтобы мера μ, $\mathrm{supp}\mu \subset \bar{Q}$, удовлетворяла следующему условию: существует такая постоянная C_μ, что для любой точки $x^0 \in \partial Q$ и любого положительного числа r выполняется неравенство

$$\mu(B_{x^0}(r)) \leqslant C_\mu r^{n-1}; \tag{9}$$

напомним, что $B_{x^0}(r)$ — шар в $\mathbb{R}_n$ с центром в точке x^0 радиуса r, $B_{x^0}(r) = \{x \in \mathbb{R}_n : |x - x^0| < r\}$.

Удовлетворяющие условию (9) борелевские меры принято называть мерами Карлесона, см., например, [33, 34]. Наименьшую из постоянных C_μ, с которыми выполняется (9), будем называть нормой меры Карлесона μ.

Целью настоящего пункта является аналогичное утверждение для решений задачи Дирихле (1), (2). Достаточно подробно в этом направлении исследован «гильбертов» случай $p = 2$. В работе автора [4] был установлен ослабленный вариант теоремы Карлесона. При выполнении условий (4) и (5), гарантирующих однозначную разрешимость рассматриваемой задачи, было доказано утверждение о достаточности для справедливости оценки (8) следующего более жёсткого условия на меру: существует такая постоянная C_μ, что для любых $x^0 \in \bar{Q}$ и $r > 0$ выполняется неравенство

$$\mu(B_{x^0}(r)) \leqslant C_\mu r^{n-1}; \tag{9'}$$

в отличие от (9) в этом условии требуется выполнение оценки меры не только для шаров с лежащими на границе центрами, но и для шаров с центрами внутри области. Отказаться в этом утверждении от условия (5) нельзя. Без него, как отмечалось выше, нельзя гарантировать единственность решения, и тем более справедливость оценки (8).

Этот результат позволил установить $(n-1)$-мерную непрерывность решения задачи Дирихле, доказать свойства, характеризующее поведение решения вблизи границы, и дать определение решения этой задачи (с $u_0 \in L_2(\partial Q)$), не требующее, как и определение классического решения, в своей постановке условий гладкости коэффициентов уравнения и границы области (условия (4), (5) нужны для теоремы об однозначной разрешимости), подробнее см. [4]. В частности, установлено следующее утверждение (напомним, что условия (4), (5), как и условие (3), мы договорились всегда считать выполненными).

Утверждение. *Пусть u — решение задачи Дирихле* (1), (2) *с произвольной $u_0 \in L_2(\partial Q)$, λ — некоторое положительное число, S — мера Лебега на ∂Q, а $\Psi = \{\psi\}$ — семейство отображений ∂Q в $\bar{Q}$, каждое из которых удовлетворяет следующим условиям*:

a) полный прообраз любого борелевского множества является измеримым (по мере S);

b) мера (S-мера) полного прообраза любого шара с центром в $\bar{Q}$ не превосходит произведения числа λ на радиус шара в степени $n - 1$.

Тогда

$$\int_{\partial Q} |u(\psi(x)) - u_0(x)|^p dS \to 0 \quad \text{при} \int_{\partial Q} |\psi(x) - x| dS \to 0.$$

Обсуждаемый ослабленный вариант теоремы Карлесона ((9′) $\Rightarrow$ (8)), как было доказано в работе В. Ж. Думаняна [35], справедлив и для решений общего эллиптического уравнения второго порядка при некоторых естественных ограничениях на рост коэффициентов при младших членах вблизи границы.

Теорема о достаточности для справедливости оценки (8) при $p = 2$ более слабого условия (9) была доказана в совместной с В. П. Михайловым работе [5], посвящённой исследованию разрешимости нелокальных задач, в которых значения решения в граничных точках выражаются через его значения во внутренних точках области. Использование этого утверждения позволило предложить новый подход к исследованию разрешимости нелокальных задач и существенно расширить класс поддающихся изучению задач, см. также [36–39]. Более простое утверждение о необходимости условия (9) в случае $p = 2$ приведено в [6].

В общем случае $p > 1$ обсуждаемый аналог теоремы Карлесона

$$(8) \Longleftrightarrow (9)$$

справедлив при те же, что и в случае $p = 2$, условиях (4), (5). Доказательство этого утверждения опубликовано в работе [40]. Отметим, что условие справедливости для решений задачи Дирихле с $u_0 \in L_p(\partial Q)$ оценки (8) не зависит не только от показателя суммируемости p, но и от выбора эллиптического оператора; от постоянной эллиптичности γ и функции ω из (4), (5) зависит только постоянная в этой оценке. В частности, эту теорему можно сформулировать следующим образом.

Теорема 5. *Для того чтобы оценка* (8) *была справедлива для всех решений задачи Дирихле* (1), (2) *с* $u_0 \in L_p(\partial Q)$, *необходимо и достаточно, чтобы она была справедлива* (*с той же мерой* μ) *для всех гармонических функций с граничными значениями из* $L_2(\partial Q)$.

5. Следствия из теоремы 5. Введём на множестве непрерывных в замыкании $\bar{Q}$ области Q функций норму

$$\|v\|_p = \sup_{\mu}\left(\frac{1}{\|\mu\|}\int_{\bar{Q}} |v(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}; \tag{10}$$

здесь $\|\mu\|$ — норма меры Карлесона μ (наименьшая из постоянных, с которыми выполнено (9)), а точная верхняя грань берется по всем отличным от нулевой мерам Карлесона. Пополнение этого пространства будем обозначать через $C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$. Легко видеть, что норма (10) не меньше, чем норма в пространстве $C_{n-1,p}(\bar{Q})$, см. [4]. Тем самым введённое пространство лежит в пространстве $(n-1)$-мерно непрерывных функций $C_{n-1,p}(\bar{Q})$ и, тем более, в $L_p(Q)$. Кроме того, из сходимости во введённом пространстве, как нетрудно проверить, следует равномерная сходимость на любом лежащем в Q компакте и сходимость в $L_p(\partial Q)$. Далее элементы пространства $C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$ будем интерпретировать как определённые на $\bar{Q}$ непрерывные внутри области функции, сужения которых на границу суммируемы с p-ой степенью. При этом будем отождествлять, не оговаривая этого особо, функции, значения которых совпадают внутри области и п.в. на границе (по мере Лебега на ∂Q).

Определение 1. Будем говорить, что функция $v : \bar{Q} \to \mathbb{R}$ *принадлежит пространству* $C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$, если существует сходящаяся к ней по норме (10) последовательность непрерывных в $\bar{Q}$ функций.

Конечно, при этом предполагается, что функция v интегрируема с p-ой степенью по любой мере Карлесона. Из определения 1 немедленно следует, что для любой меры Карлесона μ пространство $C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$ вкладывается в $L_p(\bar{Q}; \mu)$; предел в $L_p(\bar{Q}; \mu)$ сходящейся к функции v по норме (10) последовательности непрерывных функций (элемент $L_p(\bar{Q}; \mu)$) будем называть следом функции v на мере μ.

Следствие 1. *Для любой* $u_0 \in L_p(\partial Q)$ *решение задачи* (1), (2) *принадлежит пространству* $C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$.

Отметим, что из последнего утверждения вытекает, что множество следов на ∂Q (на мере S) всех функций из $C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$ совпадает с $L_p(\partial Q)$.

Можно дать и другие, эквивалентные приведённому определения рассматриваемого пространства. Прежде всего заметим, что определение нормы в этом пространстве не меняется, если ограничиться единичными мерами Карлесона: $\mu(\mathbb{R}_n) = 1$. Пусть μ и υ — две единичные меры. Возьмём такую меру ϕ в $\mathbb{R}_{2n}$, что её проекция на пространство первых n переменных совпадает с μ, а проекция на пространство последних n переменных совпадает с υ:

$$\phi(G \times \mathbb{R}_n) = \mu(G), \ \phi(\mathbb{R}_n) \times G) = \upsilon(G) \text{ для всех борелевских множеств } G \subset \mathbb{R}_n;$$

меру ϕ будем называть мерой, *соединяющей* меры μ и υ. Конечно, $\operatorname{supp}\phi \subset \bar{Q} \times \bar{Q}$ и $\phi(\mathbb{R}_{2n}) = 1$. Заметим, что для любых рассматриваемых мер существует соединяющая их мера; например, их произведение. Если же каждая из мер μ и υ сосредоточена в точке (их носители являются точками), то произведение этих мер является единственной соединяющей их мерой.

Определение 2. Функция $v : \bar{Q} \to \mathbb{R}$ *принадлежит пространству* $C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$, если для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что для любых мер Карлесона μ и υ и для любой соединяющей их меры ϕ, удовлетворяющей неравенству

$$\iint_{\mathbb{R}_{2n}} |x - y| d\phi(x, y) < \delta, \tag{11}$$

выполняется оценка

$$\frac{1}{\|\mu\| + \|\upsilon\|} \iint_{\mathbb{R}_{2n}} |v(x) - v(y)|^p d\phi(x, y) < \varepsilon. \tag{12}$$

Возьмём произвольное положительное число ρ и обозначим через $Q_\rho(x)$, $x \in \bar{Q}$, пересечение области Q с шаром $B_x(\rho)$, а через $m(Q_\rho(x))$ — меру Лебега (n-мерную) этого пересечения. Отметим, что в силу гладкости границы области для всех $\rho > 0$ и всех $x \in \bar{Q}$ справедливо неравенство $m(Q_\rho(x)) \geqslant c(n)\rho^n$ с зависящей только от n положительной постоянной $c(n)$. Обозначим, кроме того,

$$v_\rho(x) = \frac{1}{m(Q_\rho(x))} \int_{Q_\rho(x)} v(y) dy.$$

Определение 3. Функция $v : \bar{Q} \to \mathbb{R}$ *принадлежит пространству* $C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$, если $\|v - v_\rho\|_p \to 0$ при $\rho \to 0$.

Теорема 6. *Определения* 1, 2 *и* 3 *эквивалентны.*

Доказательство. Пусть функция $v \in C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$ в смысле определения 1, $\{v_k\}$ — последовательность непрерывных в замыкании области Q функций, сходящаяся к v в норме (10). Возьмём произвольные положительное число ε, единичные меры Карлесона μ, υ и соединяющую их меру ϕ, удовлетворяющую условию (11). Отметим, что

$$2 = \mu(\mathbb{R}_n) + \upsilon(\mathbb{R}_n) \leqslant [\|\mu\| + \|\upsilon\|] R_0^{n-1},$$

где R_0 — радиус шара с лежащим на ∂Q центром, содержащего замыкание области Q.

По $\varepsilon_1 = \varepsilon/2^{2p}$ найдём такой номер k, что

$$\|v - v_k\|_p^p < \varepsilon_1; \tag{13}$$

зафиксируем этот номер. Обозначим $M = \max\{\|v_k\|_{C(\bar{Q})}, 1\}$. Выберем теперь такое число $\sigma > 0$, что из $|x - y| < \sigma$ (конечно, $x \in \bar{Q}$ и $y \in \bar{Q}$) следует неравенство $|v_k(x) - v_k(y)| < \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\left(\varepsilon/R_0^{n-1}\right)^{1/p}$. Тогда

$$\iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}_{2n}:|x-y|<\sigma\}} |v_k(x) - v_k(y)|^p d\phi(x,y) < \varepsilon_2^p. \tag{14}$$

По выбранному уже числу σ возьмём $\delta = \sigma\varepsilon_2^p/(2^p M^p)$. Тогда из (11) следует, что

$$\phi(\{(x,y) \in \mathbb{R}_{2n} : |x - y| \geqslant \sigma\}) < \frac{\delta}{\sigma} = \frac{\varepsilon_2^p}{2^p M^p},$$

и следовательно,

$$\iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}_{2n}:|x-y|\geqslant\sigma\}} |v_k(x) - v_k(y)|^p d\phi(x,y) < (2M)^p \frac{\varepsilon_2^p}{2^p M^p} = \varepsilon_2^p.$$

Объединяя последнее неравенство и (14), получаем

$$\iint_{\mathbb{R}_{2n}} |v_k(x) - v_k(y)|^p d\phi(x,y) < 2\varepsilon_2^p. \tag{15}$$

Из (13) и (15) имеем

$$\begin{aligned}
\left(\iint_{\mathbb{R}_{2n}} |v(x) - v(y)|^p d\phi(x,y)\right)^{1/p} &\leqslant \left(\iint_{\mathbb{R}_{2n}} |v(x) - v_k(x)|^p d\phi(x,y)\right)^{1/p} + \\
+ \left(\iint_{\mathbb{R}_{2n}} |v_k(x) - v_k(y)|^p d\phi(x,y)\right)^{1/p} &+ \left(\iint_{\mathbb{R}_{2n}} |v_k(y) - v(y)|^p d\phi(x,y)\right)^{1/p} < \\
&< \varepsilon_1^{1/p}\left(\|\mu\|^{1/p} + \|\upsilon\|^{1/p}\right) + 2^{1/p}\varepsilon_2 \leqslant \\
&\leqslant 2\varepsilon_1^{1/p}\left(\|\mu\| + \|\upsilon\|\right)^{1/p} + 2^{1/p}\varepsilon_2\left(R_0^{n-1}(\|\mu\| + \|\upsilon\|)/2\right)^{1/p} \leqslant \\
&\leqslant \left(\|\mu\| + \|\upsilon\|\right)^{1/p}\varepsilon^{1/p},
\end{aligned}$$

что и даёт доказываемую оценку (12).

Таким образом, мы доказали, что если функция v принадлежит пространству $C_{n-1,p}(\bar{Q};\partial Q)$ в смысле определения 1, то она принадлежит этому пространству и в смысле опредения 2. Докажем теперь, что если $v \in C_{n-1,p}(\bar{Q};\partial Q)$ в смысле определения 2, то $\|v - v_\rho\|_p \to 0$ при $\rho \to 0$ (то есть выполнено и требование определения 3).

Возьмём произвольную единичную меру Карлесона μ. Определим меры υ и ϕ следующими равенствами:

$$\upsilon(G) = \int_{\bar{Q}} \frac{m(G \cap Q_\rho(x))}{m(Q_\rho(x))} d\mu(x) \text{ для всех (борелевских) множеств } G \subset \mathbb{R}_n$$

и

$$\phi(D) = \iint_D \frac{\chi_{\{(x,y)\in\bar{Q}\times\bar{Q}:|x-y|<\rho\}}(x,y)}{m(Q_\rho(x))} dy d\mu(x), \quad D \subset \mathbb{R}_{2n};$$

здесь χ_E — характеристическая функция множества E.

Нетрудно проверить, что $\upsilon(\mathbb{R})_n) = 1$, а мера ϕ соединяет меры μ и υ. Покажем, что мера υ является мерой Карлесона и её норма удовлетворяет оценке

$$\|\upsilon\| \leqslant C\|\mu\|, \tag{16}$$

постоянная $C = C(n, Q)$ в которой зависит только от n и Q. Действительно, возьмём произвольные $r > 0$ и $x^0 \in \partial Q$. Рассмотрим υ-меру шара $B_{x^0}(r)$:

$$\upsilon(B_{x^0}(r)) = \int_{B_{x^0}(r+\rho)} \frac{m(Q_\rho(x) \cap B_{x^0}(r))}{m(Q_\rho(x))} d\mu(x) \leqslant C(n,Q)\frac{\min\{\rho^n, r^n\}}{\rho^n}\mu(B_{x^0}(r+\rho)).$$

Откуда, если $\rho \leqslant r$, получаем

$$\upsilon(B_{x^0}(r)) \leqslant C(n,Q)\|\mu\|(\rho + r)^{n-1} \leqslant C(n,Q)2^{n-1}r^{n-1}.$$

Если же $r < \rho$, то

$$\upsilon(B_{x^0}(r)) \leqslant C(n,Q)\frac{r^n}{\rho^n}\|\mu\|(2\rho)^{n-1} \leqslant C(n,Q)2^{n-1}r^{n-1}.$$

Таким образом, неравенство (16) доказано. Учитывая эту оценку и очевидное неравенство

$$\iint_{\mathbb{R}_{2n}} |x-y| d\phi(x,y) < \rho,$$

из определения 2 получаем, что если $v \in C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$, то

$$\frac{1}{\|\mu\|}\int_{\mathbb{R}_n}\left|v(x) - \frac{1}{m(Q_\rho(x)}\int_{Q_\rho(x)} v(y)dy\right|^p d\mu(x) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C(n,Q)}{\|\mu\| + \|\upsilon\|}\iint_{\mathbb{R}_{2n}} |v(x) - v(y)|^p d\phi(x,y) < C(n,Q)\varepsilon,$$

как только $\rho < \delta$. Отсюда следует сходимость v_ϱ к v и в $C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$, поскольку постоянная в последней оценке не зависит от μ. Так как при выполнении определения 3, очевидно, выполняется и определение 1, теорема доказана. □

Если в определении 2 ограничиться мерами, каждая из которых сосредоточена в точке (каждая в своей), лежащей внутри области, то получим не только непрерывность функций из рассматриваемого пространства (что уже отмечалось выше), но и характеристику неравномерности непрерывности вблизи границы. Из неё будет следовать оценка возможного роста этих функций при приближении к границе.

Пусть μ — мера, сосредоточенная в точке $x^0 \in Q$, а υ — мера, сосредоточенная в точке $y^0 \in Q$:

$$\int_{\bar{Q}} g(x)d\mu(x) = g(x^0), \ \int_{\bar{Q}} g(x)d\upsilon(x) = g(y^0) \text{ для всех } g \in C(\bar{Q}).$$

Легко вычисляются нормы этих мер:

$$\|\mu\| = \frac{1}{r^{n-1}(x^0)}, \quad \|\upsilon\| = \frac{1}{r^{n-1}(y^0)};$$

напомним, что $r(x) = \operatorname{dist}\{x, \partial Q\}$. В этом случае соединяющая их мера ϕ единственна — произведение соединяемых мер. Условие (11) принимает вид

$$|x^0 - y^0| = \iint_{\mathbb{R}_{2n}} |x-y| d\phi(x,y) < \delta.$$

Следующее из этого условия неравенство (12) даёт

$$\frac{1}{2} r^{n-1}(x,y)|v(x^0) - v(y^0)| \leqslant \frac{1}{\|\mu\| + \|\upsilon\|} \iint_{\mathbb{R}_{2n}} |v(x) - v(y)|^p d\phi(x,y) < \varepsilon,$$

здесь $r(x,y) = \min\{r(x), r(y)\}$. Из полученного свойства, в частности, немедленно вытекает справедливость следующей оценки для каждой функции v из $C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$:

$$|v(x)| \leqslant \frac{\text{const}}{r^{n-1}(x)}.$$

В заключение отметим ещё следствие из теорем 5 и 6, аналогичное утверждению пункта 4, но более точно характеризующее принятие решением задачи Дирихле своего граничного значения.

Следствие 2. *Пусть u — решение задачи Дирихле* (1), (2) *с произвольной $u_0 \in L_p(\partial Q)$, λ — некоторое положительное число, а $\Psi = \{\psi\}$ — семейство отображений ∂Q в $\bar{Q}$, каждое из которых удовлетворяет следующим условиям:*

a) *полный прообраз любого борелевского множества является измеримым (по мере S);*

b) *мера (S-мера) полного прообраза любого шара с лежащим на ∂Q центром не превосходит произведения числа λ на радиус шара в степени $n-1$.*

Тогда

$$\int_{\partial Q} |u(\psi(x)) - u_0(x)|^p dS \to 0 \quad \textit{при} \int_{\partial Q} |\psi(x) - x| dS \to 0.$$

Доказательство последнего утверждения немедленно вытекает из принадлежности решения пространству $C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$ и второго определения, если взять в качестве меры μ нормированную $(n-1)$-мерную меру Лебега на границе, а в качестве ϕ — меру, сосредоточенную на графике отображения ψ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 10–01–00178–а) и гранта президента РФ для поддержки ведущих научных школ (НШ–2928.2012.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *L. Carleson*, “An interpolation problem for bounded analytic functions” // *Amer. J. Math.*, 1958. Vol. 80, no. 4. Pp. 921–930.
2. *L. Carleson*, “Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem” // *Ann. of Math.*, 1962. Vol. 76, no. 3. Pp. 547–559.
3. *L. Hormander*, “L^p-estimates for (pluri-) subharmonic functions” // *Math. scand.*, 1967. Vol. 20. Pp. 65–78.
4. *А. К. Гущин*, “О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка” // *Матем. сб.*, 1988. Т. 137(179), № 1(9). С. 19–64; англ. пер.: *A. K. Gushchin*, “On the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation” // *Math. USSR-Sb.*, 1990. Vol. 65, no. 1. Pp. 19–66.
5. *А. К. Гущин, В. П. Михайлов*, “О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка” // *Матем. сб.*, 1994. Т. 185, № 1. С. 121–160; англ. пер.: *A. K. Gushchin, V. P. Mikhailov*, “On solvability of nonlocal problems for a second-order elliptic equation” // *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 1995. Vol. 81, no. 1. Pp. 101–136.
6. *А. К. Гущин, В. П. Михайлов*, “Внутренние оценки обобщенных решений эллиптического уравнения второго порядка” // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучная серия*, 2008. № 8/1(67). С. 76–94. [*A. K. Gushchin, V. P. Mikhailov*, “Internal estimates of general solutions of second order elliptic equation” // *Vestn. SamGU. Yestestvennonauchnaya seriya*, 2008. no. 8/1(67). Pp. 76–94].
7. *В. П. Михайлов*, “О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка” // *Дифференц. уравнения*, 1976. Т. 12, № 10. С. 1877–1891. [*V. P. Mikhailov*, “The Dirichlet problem for a second order elliptic equation” // *Differents. Uravneniya*, 1976. Vol. 12, no. 10. Pp. 1877–1891].
8. *А. К. Гущин*, “О внутренней гладкости решений эллиптических уравнений второго порядка” // *Сиб. матем. журн.*, 2005. Т. 46, № 5. С. 1036–1052; англ. пер.: *A. K. Gushchin*, “On the interior smoothness of solutions to second-order elliptic equations” // *Siberian Math. J.*, 2005. Vol. 46, no. 5. Pp. 826–840.
9. *А. К. Гущин*, “Некоторое усиление свойства внутренней непрерывности по Гёльдеру решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка” // *ТМФ*, 2008. Т. 157, № 3. С. 345–363; англ. пер.: *A. K. Gushchin*, “A strengthening of the interior Hölder continuity property for solutions of the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation” // *Theoret. and Math. Phys.*, 2008. Vol. 157, no. 3. Pp. 1655–1670.
10. *А. К. Гущин, В. П. Михайлов*, “О граничных значениях в L_p, $p > 1$, решений эллиптических уравнений” // *Матем. сб.*, 1979. Т. 108(150), № 1. С. 3–21; англ. пер.: *A. K. Gushchin, V. P. Mikhailov*, “On boundary values in L_p, $p > 1$, of solutions of elliptic equations” // *Math. USSR-Sb.*, 1980. Vol. 36, no. 1. Pp. 1–19.
11. *А. К. Гущин, В. П. Михайлов*, “О граничных значениях решений эллиптических уравнений” / В сб.: *Обобщённые функции и их применения в математической физике*: Тр. междунар. конференции. М.: ВЦ АН СССР, 1981. С. 189–205. [*A. K. Gushchin, V. P. Mikhailov*, “On boundary values of solutions of elliptic equations” / In: *Generalized functions and their applications in mathematical physics*: Proceedings of the International Conference. Moscow, 1981. Pp. 189–205].
12. *И. М. Петрушко*, “О граничных значениях в L_p, $p > 1$, решений эллиптических уравнений в областях с ляпуновской границей” // *Матем. сб.*, 1983. Т. 120(162), № 4. С. 569–588; англ. пер.: *I. M. Petrushko*, “On boundary values in L_p, $p > 1$, of solutions of elliptic equations in domains with a Lyapunov boundary” // *Math. USSR-Sb.*, 1984. Vol. 48, no. 2. Pp. 565–585.
13. *Ю. А. Михайлов*, “О граничных значениях в L_p, $p > 1$, решений эллиптического уравнения второго порядка” // *Дифференц. уравнения*, 1983. Т. 19, № 2. С. 318–337. [*Yu. A. Mikhailov*, “Boundary values in L_p, $p > 1$, of solutions of a second-order linear elliptic equation” // *Differents. Uravneniya*, 1983. Vol. 19, no. 2. Pp. 318–337].

14. *Ю. А. Алхутов, В. А. Кондратьев*, "Разрешимость задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в выпуклой области" // *Дифференц. уравнения*, 1992. Т. 28, № 5. С. 806–817; англ. пер.: *Yu. A. Alkhutov, V. A. Kondrat'ev*, "Solvability of the Dirichlet problem for second-order elliptic equations in a convex domain" // *Differ. Equ.*, 1992. Vol. 28, no. 5. Pp. 650–662.

15. *Ю. А. Алхутов*, "L_p-оценки решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка" // *Матем. сб.*, 1998. Т. 189, № 1. С. 3–20; англ. пер.: *Yu. A. Alkhutov*, "L_p-estimates of the solution of the Dirichlet problem for second-order elliptic equations" // *Sb. Math.*, 1998. Vol. 189, no. 1. Pp. 1–17.

16. *А. К. Гущин*, "О разрешимости задачи Дирихле с граничной функцией из L_p для эллиптического уравнения второго порядка" // *Докл. Акад. наук*, 2011. Т. 437, № 5. С. 583–586; англ. пер.: *A. K. Gushchin*, "On the solvability of the Dirichlet problem with a boundary function from L_p for a second-order elliptic equation" // *Dokl. Math.*, 2011. Vol. 83, no. 2. Pp. 219–221.

17. *А. К. Гущин*, "О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с граничной функцией из L_p" // *Матем. сб.*, 2012. Т. 203, № 1. С. 3–30; англ. пер.: *A. K. Gushchin*, "The Dirichlet problem for a second-order elliptic equation with an L_p boundary function" // *Sb. Math.*, 2012. Vol. 203, no. 1. Pp. 1–27.

18. *E. De Giorgi*, "Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari" // *Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur*, 1957. Vol. 3, no. 3. Pp. 25–43.

19. *J. Nash*, "Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations" // *Amer. J. Math*, 1958. Vol. 80, no. 4. Pp. 931–954.

20. *J. Moser*, "A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations" // *Comm. Pure Appl. Math*, 1960. Vol. 13, no. 3. Pp. 457–468.

21. *А. К. Гущин*, "Оценки некасательной максимальной функции решений эллиптического уравнения второго порядка" // *Докл. Акад. наук*, 2012. Т. 446, № 5. С. 487–489; англ. пер.: *A. K. Gushchin*, "Estimates of the nontangential maximal function for solutions of a second-order elliptic equation" // *Dokl. Math.*, 2012. Vol. 86, no. 2. Pp. 667–669.

22. *О. А.Ладыженская, Н. Н. Уральцева*, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с. [O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Uraltseva , Linear and quasilinear equations of elliptic type. Moscow: Nauka, 1973. 576 pp.]

23. *D. Gilbarg, N. Trudinger*, Elliptic partial differentiol equations of second order. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer Verlag, 1983. 529 pp.; русск. пер.: *Д. Гилбарг, Н. Трудингер*, Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.

24. *В. П. Михайлов, А. К. Гущин*, "Дополнительные главы курса «Уравнения математической физики»" / Лекц. курсы НОЦ, Т. 7. М.: МИАН, 2007. С. 3–144. [*V. P. Mikhailov, A. K. Gushchin*, "Additional chapters of course "Equations of Mathematical Physics"" / Lekts. Kursy NOC, 7. Moscow: Steklov Math. Inst., RAS, 2007. Pp. 3–144].

25. *E. M. Stein*, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions / Princeton Mathematical Series. Vol. 30. Prinston, N.J.: Prinston University Press, 1970. xiv+290 pp.; русск. пер.: *И. Стейн*, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973. 344 с.

26. *D. L. Burkholder, R. F. Gundy*, "Distribution function inequalities for the area integral", Collection of articles honoring the completion by Antoni Zygmund of 50 years of scientific activity, VI // *Studia Math.*, 1972. Vol. 44. Pp. 527–544.

27. *B. E. J. Dahlberg*, "Weighted norm inequalities for the Lusin area integral and the nontangential maximal functions for functions harmonic in a Lipschitz domain" // *Studia Math.*, 1980. Т. 67, № 3. С. 297–314.

28. *В. Ю. Шелепов*, “О граничных свойствах решений эллиптических уравнений в многомерных областях, представимых с помощью разности выпуклых функций” // *Матем. сб.*, 1987. Т. 133(175), № 4(8). С. 446–468; англ. пер.: *V. Yu. Shelepov*, “On boundary properties of solutions of elliptic equations in multidimensional domains representable by means of the difference of convex functions” // *Math. USSR-Sb.*, 1988. Vol. 61, no. 2. Pp. 437–460.

29. *H. Fatou*, “Séries trigonometriques et séries de Taylor” // *Acta Math.*, 1906. Vol. 30, no. 1. Pp. 335–400.

30. *И. И. Привалов*, Интеграл Коши. Саратов, 1919. 96 с. [*I. I. Privalov*, The Cauchy Integral. Saratov, 1919. 96 pp.]

31. *E. M. Stein, G. Weiss*, Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces / Princeton Mathematical Series. Vol. 32. Prinston, N.J.: Prinston University Press, 1971. x+297 pp.; русск. пер.: *И. Стейн, Г. Вейс*, Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 333 с.

32. *В. А. Кондратьев, Е. М. Ландис*, “Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка” / В сб.: *Дифференциальные уравнения с частными производными – 3* / Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, Т. 32. М.: ВИНИТИ, 1988. С. 99–215. [*V. A. Kondratiev, E. M. Landis*, “Qualitative theory of second order linear partial differential equations” / In: *Partial differential equations – 3* / Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., 32. Moscow: VINITI, 1988. Pp. 99–215].

33. *Н. К. Никольский*, Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980. 384 с. [*N. K. Nikol’skiy*, Lectures on the shift operator. Moscow: Nauka, 1980. 384 pp.]

34. *J. B. Garnett*, Bounded analytic functions / Pure and Applied Mathematics. Vol. 96. New York, London: Academic Press, Inc., 1981. xvi+467 pp.; русск. пер.: *Дж. Гарнет*, Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984. 469 с.

35. *В. Ж. Думанян*, “О разрешимости задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка” // *Матем. сб.*, 2011. Т. 202, № 7. С. 75–94; англ. пер.: *V. Zh. Dumanyan*, “Solvability of the Dirichlet problem for a general second-order elliptic equation” // *Sb. Math.*, 2011. Vol. 202, no. 7. Pp. 1001–1020.

36. *А. К. Гущин, В. П. Михайлов*, “О непрерывности решений одного класса нелокальных задач для эллиптического уравнения” // *Матем. сб.*, 1995. Т. 186, № 2. С. 37–58; англ. пер.: *A. K. Gushchin, V. P. Mikhailov*, “On the continuity of the solutions of a class of non-local problems for an elliptic equation” // *Sb. Math.*, 1995. Vol. 186, no. 2. Pp. 197–219.

37. *А. К. Гущин, В. П. Михайлов*, “Об однозначной разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения” // *Докл. Акад. наук*, 1996. Т. 351, № 1. С. 7–8. [*A. K. Gushchin, V. P. Mikhailov*, “On the unique solvability of nonlocal problems for an elliptic equation” // *Dokl. Akad. Nauk*, 1996. Vol. 351, no. 1. Pp. 7–8].

38. *А. К. Гущин*, “Условие полной непрерывности операторов, возникающих в нелокальных задачах для эллиптических уравнений” // *Докл. Акад. наук*, 2000. Т. 373, № 2. С. 161–163; англ. пер.: *A. K. Gushchin*, “A condition for the complete continuity of operators arising in nonlocal problems for elliptic equations” // *Dokl. Math.*, 2000. Vol. 62, no. 1. Pp. 32–34.

39. *А. К. Гущин*, “Условие компактности одного класса операторов и его применение к исследованию разрешимости нелокальных задач для эллиптических уравнений” // *Матем. сб.*, 2002. Т. 193, № 5. С. 17–36; англ. пер.: *A. K. Gushchin*, “A condition for the compactness of operators in a certain class and its application to the analysis of the solubility of non-local problems for elliptic equations” // *Sb. Math.*, 2002. Vol. 193, no. 5. Pp. 649–668.

40. *А. К. Гущин*, “L_p-оценки решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка” // *ТМФ*, 2013. Т. 174, № 2. С. 243–255; англ. пер.: *A. K. Gushchin*, “L_p-estimates for solutions of second-order elliptic equation Dirichlet problem” // *Theoret. and Math. Phys.*, 2013. Vol. 174, no. 2. Pp. 209–219.

Поступила в редакцию 13/XI/2012;
в окончательном варианте — 19/I/2013.

MSC: 35D05; 35J25, 35B30, 35R05, 35B45

L_p-ESTIMATES OF THE NONTANGENTIAL MAXIMAL FUNCTION FOR A SECOND-ORDER ELLIPTIC EQUATION SOLUTIONS

A. K. Gushchin

Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences,
8, Gubkina st., Moscow, 119991, Russia.

E-mail: `akg@mi.ras.ru`

The work contains the survey of results related to the study of near the boundary behavior of the solution of the Dirichlet problem with the boundary function in L_p, $p > 1$ for a second-order elliptic equation. There are new statements and some unsolved problems in this direction.

Key words: *elliptic equation, Dirichlet problem, function space.*

Original article submitted 13/XI/2012;
revision submitted 19/I/2013.

Anatolii K. Gushchin (Dr. Sci (Phys. & Math.)), Leading Researcher, Dept. of Mathematical Physics.