**УДК 517.53+517.98**

# ОПЕРАТОРЫ СВЁРТКИ ДАНКЛА И МНОГОТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА ВАЛЛЕ—ПУССЕНА

***К. Р. Забирова*[1], *В. В. Напалков*[2]**

[1] Уфимский государственный авиационный технический университет,
Россия, 450000, Уфа, ул. К. Маркса, 12.
[2] Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра Российской академии наук,
Россия, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112.

E-mails: karinazabirova@gmail.com, shaig@anrb.ru

*Рассматривается оператор Данкла — объект математической физики, изучается ядро и сюръективность операторов свёртки Данкла в пространстве целых функций и пространстве целых функций экспоненциального типа. Основным результатом является решение многоточечной задачи Валле—Пуссена для операторов свёртки Данкла в пространстве целых функций.*

**Ключевые слова:** *оператор Данкла, свёртка Данкла, задача Валле—Пуссена (Коши), достаточные множества, пространство целых функций.*

Пусть $H(C)$ — пространство целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах; $H^*(C)$ — сопряжённое пространство; $P_C$ — пространство целых функций экспоненциального типа с топологией индуктивного предела, в которой последовательность $\phi_k$ сходится к $\phi$ тогда и только тогда, когда выполняются условия $|\phi_k(z)| \leqslant C_1 e^{C_2 z}$, $C_1$, $C_2 > 0$ и $\phi_k(z) \to \phi(z)$ равномерно на компакте; $P_C^*$ — сопряжённое пространство.

Рассмотрим в $H(C)$ оператор Данкла

$$\Lambda[f(z)] = f'(z) + \frac{\alpha}{z}(f(z) - f(-z)), \quad \alpha > 0.$$

Этот оператор играет важную роль в различных задачах математической физики. Так, например, операторы Данкла находят применение при решении квантовой задачи Калоджера—Мозера—Сазерленда [1]. В последнее время появился ряд работ (например [2]), в которых развивается гармонический анализ, связанный с одномерным оператором Данкла, оператором сдвига Данкла и свёртки, преобразованием Данкла. Собственная функция оператора Данкла (см. [2, 3]) следующая:

$$y(\lambda z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k z^k}{p(1) \cdot p(2) \cdots p(k)},$$

где $p(k) = k + \alpha(1 - e^{i\pi k})$. Функция имеет порядок один и конечный тип.

Лемма 1. *Пусть задана последовательность* $\lambda_k \geqslant 0$, $\lambda_{k+1} > \lambda_k(1 + 2\alpha)$ *и* $\lambda_k \to +\infty$, *тогда*

$$\frac{y(\lambda_k x)}{y(\lambda_{k+1} x)} \to 0 \text{ при } x \to +\infty,\ x \in \mathbb{R}_+.$$

*Карина Раисовна Забирова*, аспирант, каф. специальных глав математики.
*Валентин Васильевич Напалков* (д.ф.-м.н., проф., чл.-кор. РАН), директор Института.

*Доказательство.* Рассмотрим произведение $p(1)\cdot p(2)\cdots p(l)$. В силу чётных и нечётных $l$ можно сделать следующую оценку для произведения:

$$l! < p(1)\cdot p(2)\cdots p(l) < l!(1+2\alpha)^l.$$

Тогда

$$\frac{y(\lambda_k x)}{y(\lambda_{k+1}x)} = \frac{1+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^l x^l}{p(1)\cdot p(2)\cdots p(l)}}{1+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\lambda_{k+1}^l x^l}{p(1)\cdot p(2)\cdots p(l)}} < \frac{1+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^l x^l}{l!}}{1+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\lambda_{k+1}^l x^l}{l!(1+2\alpha)^l}} =$$
$$= \frac{e^{\lambda_k x}}{e^{\frac{\lambda_{k+1}x}{1+2\alpha}}} = e^{x\lambda_k\left(1-\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k(1+2\alpha)}\right)} \to 0$$

при $\lambda_k$ фиксированном, $x\to+\infty$, $\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k(1+2\alpha)} > 1$. $\square$

**1. Оператор свёртки Данкла в пространстве $\boldsymbol{H(C)}$.** В работе [2] были введены оператор сдвига Данкла

$$S_t[f(z)] = \sum_{k=1}^{\infty}\Lambda^{(k)}[f(z)]\frac{t^k}{p(1)p(2)\dots p(k)}$$

и оператор свёртки Данкла

$$M_F[f(z)] = (F, S_t[f(z)]),$$

где $F\in H^*(C)$. Эти операторы являются линейными, непрерывными и действуют из $H(C)$ в $H(C)$ [2].

Преобразованием Данкла $\hat F(\lambda)$ назовём действие функционала $F\in H^*(C)$ на собственную функцию $y(\lambda z)$. Оно принадлежит $P_C$ и осуществляет взаимно однозначное соответствие между $H^*(C)$ и $P_C$ [2, 4].

Если $F$ определяет $M_F$, тогда $\hat F(\lambda)$ — характеристическая функция данного оператора. Рассмотрим однородное уравнение свёртки Данкла

$$M_F[f(z)] = 0. \tag{1}$$

Пусть $(\lambda_1, n_1), \dots, (\lambda_k, n_k), \dots$ — нули и кратность нулей функции $\hat F(\lambda)$.

Лемма 2. *Для каждой пары* $(\lambda_k, n_k)$, $k=1,2,\dots$, *система функций* $y(\lambda_k z)$, $zy'(\lambda_k z)$, …, $z^{n_k-1}y^{(n_k-1)}(\lambda_k z)$ *является решением* (1).

*Доказательство.* Рассмотрим сдвиг от собственной функции:

$$S_t[y(\lambda z)] = \sum_{k=1}^{\infty}\Lambda^{(k)}[y(\lambda z)]\cdot\frac{t^k}{p(1)\cdot p(2)\cdots p(k)} = y(\lambda z)y(\lambda t).$$

Найдём свёртку от этого сдвига:

$$M_F[y(\lambda z)] = (F, S_t(y(\lambda z)) = (F, y(\lambda z)y(\lambda t)) = y(\lambda t)\hat F(\lambda).$$

Продифференцируем по $\lambda$ этот оператор и получим

$$(M_F[y(\lambda z)])'_\lambda = M_F[zy'(\lambda z)] = (y(\lambda t)\hat{F}(\lambda))'_\lambda = ty'(\lambda t)\hat{F}(\lambda) + y(\lambda t)\hat{F}'(\lambda).$$

Дифференцируя $\hat{F}(\lambda)$, получим $\hat{F}'(\lambda) = (F, zy'(\lambda z))$. Так как $\hat{F}^{(j)}(\lambda_k) = 0 = (F, z^j y^{(j)}(\lambda_k z))$, $j = 0, 1, \ldots, n_k - 1$, то $M_F[zy'(\lambda z)] = 0$. Далее дифференцируем $M_F[zy'(\lambda z)]$ по $\lambda$ и т. д. $n_k - 1$ раз. Все это будет равно 0 в силу $\hat{F}^{(j)}(\lambda_k) = 0$, $j = 0, 1, \ldots n_k - 1$. Значит, система $y(\lambda_k z), zy'(\lambda_k z), \ldots, z^{n_k-1}y^{(n_k-1)}(\lambda_k z)$ является решением (1). $\square$

Лемма 3. *Если $z^m y(\lambda_0 z)$ — решение уравнения* (1), *то $\lambda_0$ является нулём характеристической функции $\hat{F}(\lambda)$ кратности не меньше, чем $m$.*

*Доказательство* аналогично предыдущей лемме.

Теорема 1. *$\bar{E}$ — замыкание $E$ линейной оболочки*

$$\bigcup_k \{y(\lambda_k z), zy'(\lambda_k z), \ldots, z^{n_k-1}y^{(n_k-1)}(\lambda_k z)\}$$

*совпадает с $W$ — множеством решений уравнения* (1).

*Доказательство.* Из леммы 2 следует, что $E \subset W$. Покажем, что $E$ плотно в $W$. Для этого нужно показать, что для любого $L \in H^*(C)$, удовлетворяющего $(L, E) = 0$, выполняется $(L, W) = 0$.

Берём $L \in H^*(C)$ такое, что

$$(L, z^j y^{(j)}(\lambda_k z)) = 0 \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots, \ \forall\, j = 0, 1, \ldots, n_k - 1.$$

Так как $(L, z^j y^{(j)}(\lambda_k z)) = \hat{L}^{(j)}(\lambda_k) = 0$, то $\lambda_k$ — нуль $\hat{L}(\lambda)$. Таким образом, имеем $\hat{F}(\lambda) \in P_C$ только с нулями $\lambda_k$ и $\hat{L}(\lambda) \in P_C$ с нулями $\lambda_k$ кратности не меньше $n_k$ и еще другими. Покажем, что $\hat{L}(\lambda)$ делится на $\hat{F}(\lambda)$.

Пусть $\lambda_0$ — нуль $\hat{L}(\lambda)$. Если $\lambda_0$ не нуль $\hat{F}(\lambda)$, то $\hat{F}(\lambda_0) \neq 0$ и существует окрестность $V_{\lambda_0}$, в которой $\hat{L}(\lambda)/\hat{F}(\lambda) \in H(V_{\lambda_0})$. Если $\lambda_0$ нуль $\hat{F}(\lambda)$, то $\hat{F}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{n_{k0}} P(\lambda)$, где $P(\lambda) \neq 0$. Так как кратность нулей $\hat{G}(\lambda)$ не меньше кратности нулей $\hat{F}(\lambda)$, то $\hat{L}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{n_{k0}+m} R(\lambda)$, причём $m \geqslant 0$. Поэтому $\hat{L}(\lambda)/\hat{F}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m R(\lambda)/P(\lambda)$ и $\hat{L}(\lambda)/\hat{F}(\lambda) \in H(V_{\lambda_0})$. А значит, $\hat{L}(\lambda)/\hat{F}(\lambda)$ — аналитическая на плоскости. Так как $\hat{L}(\lambda), \hat{F}(\lambda) \in P_C$, то по теореме деления [4] $\phi(\lambda) = \hat{L}(\lambda)/\hat{F}(\lambda) \in P_C$. Поскольку между $H^*(C)$ и $P_C$ существует изоморфизм, то $\phi(\lambda) \in P_C$ соответствует $Q \in H(C) : \hat{Q}(\lambda) = \phi$ и $\hat{L}(\lambda) = \hat{Q}(\lambda)\hat{F}(\lambda)$, т. е. $L$ есть свёртка $Q$ и $F$. Для любой $f$ из $W$ выполняется

$$(L, f) = \Big(Q, \big(F, S_t[f(z)]\big)\Big) = 0.$$

Значит, $\bar{E} = W$. $\square$

Найдём сопряжённый оператор $M_F^*$ исходя из определения:

$$(M_F[f], L) = (f, M_F^*[L]).$$

Возьмём $f(z) = y(\lambda z)$. Тогда

$$M_F[y(\lambda z)] = (F, S_t[y(\lambda z)]) = (F, y(\lambda z)y(\lambda t)) = \hat{F}(\lambda)y(\lambda t),$$

а действие оператора свёртки на функционал следующее:

$$(M_F[y(\lambda z)], L) = (y(\lambda t)\hat{F}(\lambda), L) = \hat{F}(\lambda)\hat{L}(\lambda).$$

С другой стороны,

$$(y(\lambda z), M_F^*[L]) = \widehat{M_F^*}[L] = \hat{F}(\lambda)\hat{L}(\lambda).$$

Значит, $\hat{M}_F^*$ — оператор умножения на характеристическую функцию, а $M_F^*$ — свёртка $F$ и $L$. В силу полученного можем вместо $M_F^*$ рассматривать эквивалентный оператор $\hat{M}_F^*$.

Теорема 2. *Оператор свёртки Данкла $M_F$ сюръективен.*

*Доказательство.* Если образ $M_F$ замкнут и всюду плотен в $H(C)$, то образ $M_F$ будет совпадать с $H(C)$. По теореме Дьедонне—Шварца [5] замкнутость образа $M_F$ эквивалентна замкнутости образа $\hat{M}_F^*$ в $P_C$. Всюду плотность $\operatorname{Im} M_F$ в $H(C)$ эквивалентна инъективности $\hat{M}_F^*$ ($\operatorname{Ker} \hat{M}_F^* = 0$), где $M_F$ действует из $H(C)$ в $H(C)$, $M_F^*$ из $H^*(C)$ в $H^*(C)$, а $\hat{M}_F^*$ из $P_C$ в $P_C$.

1. Покажем, что $\operatorname{Im} \hat{M}_F^*$ замкнут в $P_C$. Рассмотрим последовательность $\phi_k(\lambda) \in P_C$ такую, что $\phi_k(\lambda) \in \operatorname{Im} \hat{M}_F^*$, $\phi_k(\lambda) \to \phi(\lambda)$. Сопряжённый оператор, как показано выше, есть оператор умножения, поэтому $\phi_k(\lambda) = \hat{F}(\lambda)g_k(\lambda)$. Необходимо показать, что $\phi(\lambda) = \hat{F}(\lambda)g(\lambda)$, где $g(\lambda) \in P_C$. Так как $\phi_k(\lambda) \in P_C$, то $\phi_k$ — равномерно ограничены и равномерно сходятся на компактах, поэтому $\hat{F}(\lambda)g_k(\lambda) \to \hat{F}(\lambda)g(\lambda)$ и нули $g(\lambda)$ есть нули $g_k(\lambda)$. $\phi(\lambda)/\hat{F}(\lambda) \in H(C)$, так как нули $\phi(\lambda)$ можно убрать представлением $\hat{F}(\lambda)$ как $(z-z_0)^k R(z)$. По теореме деления [4] $\phi(\lambda)/\hat{F}(\lambda) \in P_C$, т. е. $g(\lambda) \in P_C$, поэтому $\phi(\lambda) \in \operatorname{Im} \hat{M}_F^*$. Значит, $\operatorname{Im} M_F$ замкнут в $H(C)$.

2. Покажем, что $\operatorname{Ker} \hat{M}_F^* = 0$. Рассмотрим $\psi(\lambda) \in P_C$. Пусть $\psi(\lambda)\hat{F}(\lambda) \equiv 0$, тогда $\psi(\lambda) = 0$ в силу того, что $\hat{F}(\lambda)$ — целая и не равна нулю. Получили, что $\psi(\lambda)$ имеет множество нулей, кроме счётного числа точек нулей $\hat{F}(\lambda)$, поэтому $\psi(\lambda) \equiv 0$, $\operatorname{Ker} \hat{M}_F^* = 0$. Значит, $\operatorname{Im} M_F$ всюду плотен в $H_C$. Из 1 и 2 получаем, что $\operatorname{Im} M_F = H(C)$. $\square$

**2. Оператор свёртки Данкла в пространстве $P_C$.** Если $G \in P^*(C)$, то действие $G$ на $y(\lambda z)$ даёт преобразование Данкла $\hat{G}(\lambda) \in H(C)$. Это доказывается через изоморфизм пространств $H^*(C)$ и $P_C$ и полноту $y(\lambda z)$ в $P_C$ [4]. Как и в предыдущем пункте, вводим сдвиг в $P_C$. Так как любая

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k z^k}{p(1) \cdot p(2) \cdots p(k)} \in P_C$$

представляется в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{A_g} y(zw)\gamma_g(w)dw,$$

где контур $A_g$ спрямляемый и содержит особенности обобщённой ассоциированной функции

$$\gamma_g = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^{k+1}},$$

сдвиг можно записать как

$$S_t[g(z)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{A_g} y(zw)y(tw)\gamma_g(w)dw.$$

Значит, $S$ действует из $P_C$ в $P_C$. Подействуем функционалом из $P_C^*$ на сдвиг и получим

$$M_G[g] = (G, S_t[g(z)]) = \frac{1}{2\pi i} \int_{A_g} \hat{G}(w)y(zw)\gamma_g(w)dw. \tag{2}$$

Рассмотрим однородное уравнение свёртки Данкла в $P_C$:

$$M_G[g(z)] = 0. \tag{3}$$

Пусть $\hat{G}(\lambda)$ имеет нули $(\mu_1, m_1), \ldots, (\mu_k, m_k), \ldots$, где $m_k$ — кратность соответствующего нуля $\mu_k$; $E_p$ — линейная оболочка

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{y(\mu_k z), zy'(\mu_k z), \ldots, z^{m_k-1}y^{(m_k-1)}(\mu_k z)\},$$

тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Любое решение уравнения* (3) $g(z) \in P_C$ *представляется в виде конечной суммы функций из* $E_p$, *у которых все* $\mu_k$ *лежат внутри контура* $A_g$ *из интегрального представления* $g(z)$.

*Доказательство.* Уравнение (3) запишем в интегральном виде, используя (2), для любого $z$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \hat{G}(w)y(zw)\gamma(w)dw \equiv 0.$$

Так как $\hat{G}(w) \in H(C)$, она аналитична всюду, кроме бесконечности; $\gamma(w)$ аналитична вне круга, а значит, $\hat{G}(w)\gamma(w)$ аналитична в кольце и поэтому

$$\hat{G}(w)\gamma(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k w^k.$$

Используя этот факт и представление собственной функции, свёртку Данкла перепишем в виде

$$M_G[g] = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \Big( \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k w^k \Big) \Big( 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{w^m z^m}{p(1)\cdot p(2) \cdots p(m)} \Big) dw =$$
$$= c_{-1} + c_{-2}\frac{z}{p(1)} + c_{-3}\frac{z^2}{p(1)p(2)} + \cdots \equiv 0.$$

Получили, что все $c_i = 0$, $i = -\infty, \dots, -2, -1$, поэтому

$$\hat{G}(w)\gamma(w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k = l(w) \in H(C).$$

Отсюда $\gamma(w) = l(w)/\hat{G}(w)$ — мероморфная функция, у которой особенности в нулях $\mu_k$ полюса разной кратности. Пусть $\mu_k$ — полюс кратности $m_k$, а $M$ — число нулей в круге радиуса $R$. Разобьём этот круг на круги радиуса $r_k$, куда попадают только нули $\mu_k$. Тогда, используя теорему о вычетах, получим

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R} y(zw)\gamma(w)dw = \sum_{k=1}^{M}\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-\mu_k|=r_k} y(zw)\frac{l(w)}{\hat{G}(w)}dw =$$
$$= \sum_{k=1}^{M}\frac{m_k!}{m_k!2\pi i}\int_{|w-\mu_k|=r_k} y(zw)\frac{l(w)}{(w-\mu_k)^{m_k+1}P_k(w)}dw =$$
$$= \sum_{k=1}^{M}\frac{1}{m_k!}\sum_{n=0}^{m_k}\frac{d^n}{dw^n}\left[y(zw)\frac{l(w)}{P_k(w)}\right]_{w=\mu_k} = \sum_{k=1}^{M}\sum_{n=0}^{m_k} c_n^k z^n y^{(n)}(\mu_k z).$$

Теорема доказана. □

Теорема 4. *$E_p$ совпадает с $W_p$ — множеством решений уравнения* (3), *т. е. $E_p = W_p$.*

Таким образом, в случае $P_C$ получили, что всякое решение однородного уравнения свертки Данкла есть конечная сумма функций из $E_p$, что говорит об аналоге представления решений в $P_C$ с фундаментальным принципом Эйлера для дифференциальных уравнений конечного порядка с постоянными коэффициентами в $H(C)$ [6]. Всякое решение уравнения (3) принадлежит $E_p$.

Найдём сопряжённый оператор $M_G^*$ из определения

$$(M_G[g], Q) = (g, M_G^*[Q]).$$

Возьмём $g(z) = y(\lambda z)$. Тогда

$$M_G[y(\lambda z)] = (G, S_t[y(\lambda z)]) = (G, y(\lambda z)y(\lambda t)) = \hat{G}(\lambda)y(\lambda t),$$

а действие оператора свёртки на функционал следующее:

$$(M_G[(\lambda z)], Q) = (y(\lambda t)\hat{G}(\lambda), Q) = \hat{G}(\lambda)\hat{Q}(\lambda).$$

С другой стороны,

$$(y(\lambda z), M_G^*[Q]) = \widehat{M_G^*}[Q] = \hat{G}(\lambda)\hat{Q}(\lambda).$$

Значит, $\hat{M}_G^*$ — оператор умножения на характеристическую функцию, а $M_G^*$ — свёртка $G$ и $Q$.

Теорема 5. *Оператор свёртки Данкла $M_G$ сюръективен.*

*Доказательство.* Если образ $M_G$ замкнут и всюду плотен в $P_C$, то образ $M_G$ будет совпадать с $P_C$. По теореме Дьедонне—Шварца [5] замкнутость образа $M_G$ эквивалентна замкнутости образа $\hat{M}_G^*$ в $H(C)$. Всюду плотность $\operatorname{Im} M_G$ в $P_C$ эквивалентна инъективности $\hat{M}_G^*$ ($\operatorname{Ker}\hat{M}_G^* = 0$), где $M_G$ действует из $P_C$ в $P_C$, $M_G^*$ — из $P_C^*$ в $P_C^*$, а $\hat{M}_G^*$ — из $H(C)$ в $H(C)$.

1. Покажем, что $\operatorname{Im}\hat{M}_G^*$ замкнут в $H(C)$. Рассмотрим последовательность $r_k(z) \in H(C)$ такую, что $r_k(z) \in \operatorname{Im}\hat{M}_G^*$, $r_k(z) \to r(z)$. Сопряжённый оператор, как показано выше, есть оператор умножения, поэтому $r_k(z) = \hat{G}(\lambda)g_k(z)$. Необходимо показать, что $r(z) = \hat{G}(\lambda)g(z)$, где $g(z) \in H(C)$. В силу равномерной сходимости на компактах нули $\hat{G}(\lambda)$ есть нули $\hat{G}(\lambda)g_k(z)$, т. е $r(z)$ будет иметь те же нули, что и $\hat{G}(\lambda)$. В этом случае, как и в предыдущем случае пункта 1, нули функции $r(z)$, с учётом кратности, содержат нули характеристической функции $\hat{G}$ с учётом кратности. Рассмотрим теперь $r(z)/\hat{G}(\lambda)$. Если $z_0 : \hat{G}(z_0) \neq 0$, то существует окрестность, в которой $r(z)/\hat{G}(\lambda)$ целая. Если $z_0 : \hat{G}(z_0) = 0$, то существует окрестность, в которой функция $\hat{G}$ не имеет других нулей, кроме $z_0$ в силу изолированности нулей аналитических функций. Поэтому можем представить $\hat{G}(\lambda)$ в виде $(z-z_0)^k R(z)$ и $R(z) \neq 0$, а $r(z)$ запишем в виде

$$r(z) = (z-z_0)^{k+p}Q(z), \quad p \geqslant 0, \quad Q(z_0) \neq 0.$$

Поэтому, как и в $P_C$, получаем $r(z)/\hat{G}(\lambda) = g(z) \in H(C)$. Следовательно, $r(z) = \hat{G}(\lambda)g(z)$.

2. Покажем, что $\operatorname{Ker}\hat{M}_G^* = 0$. Рассмотрим $l(z) \in H(C)$. Пусть $l(z)\hat{G}(\lambda) \equiv 0$, тогда $l(z) = 0$ в силу того, что $\hat{G}(\lambda)$ — целая и не равна нулю. Получили, что $l(z)$ имеет множество нулей, кроме счётного числа точек нулей $\hat{G}(\lambda)$, поэтому $l(z) \equiv 0$, $\operatorname{Ker}\hat{M}_G^* = 0$. Значит, $\operatorname{Im} M_G$ всюду плотен в $P_C$. Из 1 и 2 получаем, что $\operatorname{Im} M_G = P_C$. $\square$

**3. Многоточечная задача Валле—Пуссена для операторов Данкла в $H(C)$.** Пусть $f(z) \in H(C)$, $g(z) \in P_C$, $F \in H^*(C)$, $G \in P_C^*$. Введём два оператора в $H(C)$ и $P_C$:

$$M_F[\hat{G} \cdot f(z)] = (F, S_t[(\hat{G}f)(z)])$$

и

$$M_G[\hat{F} \cdot g(z)] = \frac{1}{2\pi i}\int_A \hat{G}(w)y(zw)\gamma(w)dw.$$

Здесь и далее будем считать, что контур $A$ охватывает особенности функции $\hat{F}g(z)$, а $\gamma$ — обобщённая ассоциированная функция. При этом $M_F[\hat{G}\cdot]$ действует из $H(C)$ в $H(C)$, а $M_G[\hat{F}\cdot]$ — из $P_C$ в $P_C$. Линейному и непрерывному оператору $M_F[\hat{G}\cdot]$ соответствует сопряжённый оператор $\{M_F[\hat{G}\cdot]\}^*$, линейно и непрерывно отображающий пространство $H^*(C)$ в $H^*(C)$. Поскольку пространства $P_C$ и $H^*(C)$ топологически изоморфны, оператор $\{M_F[\hat{G}\ \cdot]\}^*$ порождает линейный и непрерывный оператор $M_G[\hat{F}\ \cdot]$, действующий из $P_C$ в $P_C$.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — фиксированная последовательность, $a_1, \dots, a_k$ — произвольные комплексные числа. Многоточечной задачей Валле—Пуссена будем называть задачу о том, при каких условиях существует решение (1), которое в точках $\lambda_j$ принимает значения $a_j$.

Теорема 6. *Многоточечная задача Валле—Пуссена для $M_F$ разрешима тогда и только тогда, когда имеет место представление Фишера* [7]

$$H(C) = \operatorname{Ker} M_F + \{\hat{G}(\lambda) \cdot r(\lambda) : r(\lambda) \in H(C)\}, \tag{4}$$

*где $\{\dots\}$ — множество всех произведений функции $\hat{G}(\lambda)$ на всевозможные $r(\lambda) \in H(C)$.*

*Доказательство.* Решение многоточечной задачи Валле—Пуссена эквивалентно тому, что для любой $h(z) \in H(C)$ необходимо найти решение $u(z) \in H(C)$ уравнения $M_F[f] = 0$ такое, что $(u-h)/\hat{G} \in H(C)$. Отсюда $u - h = l(z)\hat{G}$, $l(z) \in H(C)$ или $h = u + l\hat{G}$. Получили представление Фишера.

Обратно. Любая функция $h(z) \in H(C)$ представима в виде

$$h(z) = h_1(z) + h_2(z),$$

где $h_1(z) \in \operatorname{Ker} M_F$, $h_2(z) \in \{\hat{G}(\lambda) \cdot r(\lambda) : r(\lambda) \in H(C)\}$. Пусть $\mu_j$ — нули $\hat{G}$, $a_j$ — произвольная последовательность комплексных чисел. Поставим многоточечную задачу Валле—Пуссена следующим образом: существует ли $u(z) \in \operatorname{Ker} M_F$ такое, что $u(\mu_j) = a_j$. Действительно, $h(\mu_j) = h_1(\mu_j) + h_2(\mu_j)$, следовательно $a_j = h_1(\mu_j)$. $\square$

Лемма 4. *Представление Фишера* (4) *эквивалентно сюръективности оператора $M_F[\hat{G}\cdot]$.*

*Доказательство.* Пусть имеется сюръективность $M_F[\hat{G}\cdot]$, покажем, что выполняется представление Фишера. Для любой функции $f(z)$ будет существовать некоторая $g$ такая, что $M_F[f] = g$. Теперь в силу сюръективности $M_F[\hat{G}\cdot]$ для $g$ будет существовать $h(z) \in H(C)$ такая, что

$$M_F[\hat{G} \cdot h] = g.$$

Используя линейность, получим

$$M_F[\hat{G} \cdot h - f] = 0 \quad \text{или} \quad l(z) := \hat{G} \cdot h - f, \quad l(z) \in \operatorname{Ker} M_F.$$

То есть получили, что для любой $f(z)$ выполняется

$$f = \hat{G} \cdot h + l,$$

где $l(z) \in \operatorname{Ker} M_F$, а $\hat{G} \cdot h$ определяется из оставшейся части представления Фишера.

Пусть теперь имеется представление Фишера, покажем сюръективность $M_F[\hat{G}\cdot]$. Для любой $g(z) \in H(C)$ существует $f(z)$ такая, что $M_F[f] = g$ в силу разрешимости оператора $M_F$. Для $f$ имеем представление Фишера, т. е.

$$f = \hat{G} \cdot h - l(z).$$

Подействуем оператором $M_F$ и получим

$$M_F[f] = M_F[\hat{G} \cdot h] = g.$$

А это означает разрешимость $M_F[\hat{G} \cdot h]$ для любой $g$. $\square$

Пусть $N_{\hat{F}} = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — множество простых (кратности один) нулей функции $\hat{F} \in P_C$, а $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ — множество нулей функции $\hat{G} \in H(C)$.

Теорема 7. *Если $\lambda_k > 0$, $\mu_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$ и $\lambda_k \nearrow \infty$, $\mu_k \nearrow \infty$, $\mu_{k+1} > \mu_k(1 + 2\alpha)$, то многоточечная задача Валле—Пуссена разрешима.*

*Доказательство.* Предположим, что $N_{\hat{F}}$ — достаточное множество [8] в ядре оператора (3). Если $M_F[\hat{G}\cdot]$ сюръективен, то по лемме 4 и теореме 6 получаем разрешимость задачи Валле—Пуссена. Чтобы доказать сюръективность оператора $M_F[\hat{G}\cdot]$, нужно показать замкнутость и всюду плотность его образа. По теореме Дьедонне—Щварца [5] это эквивалентно инъективности $M_G[\hat{F}\cdot]$ и замкнутости его образа. Инъективность означает, что $\operatorname{Ker} M_G[\hat{F}\cdot] = \{0\}$. Пусть $h(z) \in P_C$ такое, что $M_G[\hat{F} \cdot h(z)] = 0$, тогда $\hat{F} \cdot h(z) \in \operatorname{Ker} M_G$, а $N_{\hat{F}}$ есть нули $\hat{F}$. Из доказательства достаточности (см. ниже) вытекает, что $N_{\hat{F}}$ — множество единственности в $\operatorname{Ker} M_G$, поэтому $\hat{F} h(z) \equiv 0$. Так как $\hat{F}(z) \neq 0$ в $\operatorname{Ker} M_G$, то $h(z) \equiv 0$.

Для замкнутости $\operatorname{Im} M_G[\hat{F}\cdot]$ необходимо показать, что если последовательность $g_n(z)$ сходится к $g(z)$ и $g_n(z) \in \operatorname{Im} M_G[\hat{F}\cdot]$, то $g(z) \in \operatorname{Im} M_G[\hat{F}\cdot]$. Так как $g_n(z) \in \operatorname{Im} M_G[\hat{F}\cdot]$, существует $Q_n(z) \in P_C$ такая, что

$$M_G[\hat{F} \cdot Q_n(z)] = g_n(z). \tag{5}$$

Рассмотрим оператор $M_G$. По теореме 5 оператор $M_G$ сюръективен, значит существует непрерывный правый обратный $M_G^{-1}$ (см. [9]) и поэтому существует $y_n(z) \in P_C$ такая, что выполняются два условия: $M_G[y_n] = g_n(z)$ и $y_n(z) \to y(z), y(z) \in P_C$. Из первого условия и (5) в силу линейности $M_G$ получим

$$M_G[y_n(z) - \hat{F} \cdot Q_n(z)] = 0.$$

Обозначим $h_n(z) = y_n(z) - \hat{F} \cdot Q_n(z)$, тогда $h_n(z) \in P_C$, $h_n(\lambda_k) = y_n(\lambda_k)$. Так как $N_{\hat{F}}$ достаточное множество в $\operatorname{Ker} M_G$, то $h_n(z) \to h(z)$ в $P_C$, $h(z) \in \operatorname{Ker} M_G$. Тогда, учитывая второе условие, $\hat{F} \cdot Q_n(z) \to l(z)$ и нули $l(z)$ включают нули $\hat{F}$.

Обозначим $Q(z) = l(z)/\hat{F}$; $Q(z) \in H(C)$. По теореме деления [4] $Q(z) \in P_C$. Покажем, что $Q_n(z)$ сходится к введённой $Q(z)$ на компактах.

Пусть $K$ — замкнутый круг с центром в нуле и $|\hat{F}| > \delta$ на границе $K$. Так как $\hat{F} \cdot Q_n(z) \to l(z)$ в $P_C$, то $\hat{F} \cdot Q_n(z) \to l(z)$ равномерно на компактах. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что выполняется неравенство

$$|\hat{F} \cdot Q_n(z) - l(z)| < \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon), \quad z \in K.$$

Следовательно, $|Q_n(z) - l(z)/\hat{F}| < \varepsilon/\delta$ на границе $K$. По принципу максимума модуля сходимость может быть продолжена на весь компакт $K$. Таким образом, $Q_n(z)$ равномерно сходится к $Q(z)$ на $K$ или $\hat{F}\cdot Q_n(z)$ равномерно сходится к $\hat{F}\cdot Q(z)$ в $P_C$. В силу непрерывности оператора свёртки Данкла получим $M_G[y(z)-\hat{F}\cdot Q(z)]=0$. Поэтому $M_G[\hat{F}\cdot Q(z)]=M_G[y(z)]=g(z)$, то есть $g(z)\in \operatorname{Im} M_G[\hat{F}\cdot]$.

Получили, что $M_F[\hat{G}\cdot]$ сюръективен, и получаем представление Фишера. Осталось доказать, что $N_{\hat{F}}$ — достаточное множество в $\operatorname{Ker} M_G$, т. е. нужно показать, что в пространстве решений уравнения топология $\tau_N$ эквивалентна топологии $\tau_C$ [8] пространства $P_C$. Очевидно, что топология $\tau_C$ сильнее топологии $\tau_N$. Осталось показать, что топология $\tau_N$ не слабее топологии $\tau_C$, т. е. что если последовательность сходится в топологии $\tau_N$, то она будет сходиться и в топологии $\tau_C$.

Пусть задана последовательность

$$r_m(x)=\sum_{k=1}^{p_m} C_k(m)y(\mu_k x),\quad c_p\neq 0.$$

Предположим, что $r_m(x)\to 0$ при $m\to\infty$ в топологии $\tau_N$. Это означает следующее:

1) $|r_m(x)|\leqslant B_1e^{B_2x}$, где $x\in N_{\hat{F}}$;

2) $r_m(x)\to 0$ равномерно при $m\to\infty$ на любом компакте множества $N_{\hat{F}}$.

Заметим, что компактное множество $N_{\hat{F}}$ есть любая конечная последовательность нулей $\lambda_k$. Покажем, что в каждый член последовательности, удовлетворяющей неравенству 1) и сходящейся в топологии $\tau_N$, входят только те $y(\mu_k x)$, у которых $\mu_k\leqslant B_2(1+2\alpha)$.

Предположим обратное. Пусть существуют члены, у которого

$$\mu_k>B_2(1+2\alpha).$$

Вынесем за скобки максимальное слагаемое $C_p(m)y(\mu_p x)$. Элементы в скобке, учитывая лемму 1, будут стремиться к 1 при $x\to\infty$, значит,

$$y(\mu_p x)>e^{B_2x},$$

учитывая оценку

$$e^{\frac{\mu_k x}{1+2\alpha}}<y(\mu_k x)<e^{\mu_k x}.$$

А это противоречит условию 1).

Докажем теперь, что

$$|r_m(x)|=\Big|\sum_{k=1}^{p} C_k(m)y(\mu_k x)\Big|\to 0$$

равномерно при $m\to\infty$ на любом компакте в плоскости $C$. Так как $y(\mu_k x)$ ограничены на любом компактном множестве, то достаточно показать, что $C_k(m)\to 0$. Строим матрицу $A$. Берем первый $y(\mu_1\lambda_1)\neq 0$, $y(\mu_2\lambda_{j2})$ выбираем так, чтобы определитель матрицы второго порядка $\Delta_2\neq 0$ за счёт выбора $j2$.

Аналогично строим матрицу третьего порядка и т. д. Величину $\lambda$ выбираем таким образом, чтобы $y(\mu_i\lambda_{jl}) \neq 0$, а $jl$ выбираем так, чтобы $\Delta_l \neq 0$, где

$$\Delta_l = \det \begin{vmatrix} y(\mu_1\lambda_1) & \dots & y(\mu_l\lambda_1) \\ y(\mu_1\lambda_{j2}) & \dots & y(\mu_l\lambda_{j2}) \\ \dots & \dots & \dots \\ y(\mu_1\lambda_{jl}) & \dots & y(\mu_l\lambda_{jl}) \end{vmatrix}.$$

Это возможно за счёт выбора $y(\mu_l\lambda_{jl})$, намного превосходящих все элементы данной матрицы. Получим квадратную матрицу размера $p$ с $\det A \neq 0$. По формуле Крамера

$$C_i(m) = \frac{\det |\overline{A}_i(m)|}{\det A},$$

где матрица $\overline{A}_i(m)$ получена из $A$ заменой $i$-того столбца столбцом свободных членов $(A_1(m), \dots, A_p(m))^\top$. При этом

$$A_i(m) = \sum_{k=1}^{p} C_k(m) y(\mu_k\lambda_{ji})$$

и $A_i(m) \to 0$ из 2) равномерно при $m \to \infty$ на конечном множестве точек $\lambda_k$, следовательно, $C_k(m) \to 0$. Поэтому для любого $x \in K$ выполняется

$$\Big|\sum_{k=1}^{p} C_k(m) y(\mu_k x)\Big| \to 0$$

равномерно при $m \to \infty$. $\square$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


1. *L. Lapointe, L. Vinet*, "Exact operator solution of the Calogero–Sutherland model" // *Commun. Math. Phys.*, 1996. Vol. 178, no. 2. Pp. 425–452.
2. *J. J. Betancor, M. Sifi, K. Triméche*, "Hypercyclic and chaotic convolution operators associated with the Dunkl operators on $\mathbb{C}$" // *Acta Math. Hung.*, 2005. Vol. 106, no. 1–2. Pp. 101–116.
3. *В. В. Напалков, В. В. Напалков (мл.)*, "Операторы Данкла как операторы свертки" // *Докл. Акад. наук*, 2008. Т. 423, № 3. С. 300–302; англ. пер.: *V. V. Napalkov, V. V. Napalkov (jun.)*, "Dunkl operators as convolutions" // *Dokl. Math.*, 2008. Vol. 78, no. 3. Pp. 856–858.
4. *В. В. Напалков*, Уравнения свертки в многомерных пространствах. М.: Наука, 1982. 240 с. [*V. V. Napalkov*, Convolution equations in multidimensional spaces. Moscow: Nauka, 1982. 240 pp.]
5. *J. Dieudonné, L. Schwartz*, "La dualité dans les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{L}F)$" // *Ann. Inst. Fourier*, 1949. Vol. 1. Pp. 61–101.
6. *L. Euler*, "De integratione aequationum differentialum altiorum gradum" // *Miscellanea Berol.*, 1743. Vol. 7. Pp. 193–242.
7. *H. S. Shapiro*, "An algebraic theorem of Fisher, and the holomorphic Goursat problem" // *Bull. Lond. Math. Soc.*, 1989. Т. 21, № 6. С. 513–537.
8. *В. В. Напалков*, "О строгой топологии в некоторых весовых пространствах функций" // *Матем. заметки*, 1986. Т. 39, № 4. С. 529–538; англ. пер.: *V. V. Napalkov*, "The strict topology in certain weighted spaces of functions" // *Math. Notes*, 1986. Vol. 39, no. 4. Pp. 291–296.

9. *О. В. Епифанов*, “О существовании непрерывного правого обратного в одном классе локально выпуклых пространств” // *Изв. Сев.-Кавк. научн. центра высш. шк. Естеств. науки*, 1991. №3(75). С. 3–4. [*O. V. Epifanov*, “On the existence of the continuous right-inverse for an operator in a class of locally convex spaces” // *Izv. Sev.-Kavk. Nauchn. Tsentra Vyssh. Shk., Estestv. Nauki*, 1991. no. 3(75). Pp. 3–4].

Поступила в редакцию 17/X/2012;
в окончательном варианте — 19/I/2013.

**MSC: 47B38; 46A20, 46E10, 43A22, 30H05**

## THE DUNKL CONVOLUTION OPERATORS AND MULTIPOINT DE LA VALLÉE–POUSSIN PROBLEM

***K. R. Zabirova, V. V. Napalkov***

[1] Ufa State Aviation Technical University
12, K. Marks st., Ufa, Russia, 450000.
[2] Institute of Mathematics with Computing Centre,
Ufa Science Centre, Russian Academy of Sciences
112, Chernyshevskiy st., Ufa, Russia, 450077.

E-mails: `karinazabirova@gmail.com, shaig@anrb.ru`

*The Dunkl operator as an object of mathematical physics is considered, we study the kernel and the surjectivity of Dunkl convolution operators in the space of entire functions and the space of entire functions of exponential type. The main result is the solution of the multipoint de la Vallée–Poussin problem for Dunkl convolution operators in the space of entire functions.*

**Key words:** *Dunkl operators, Dunkl convolution, de la Vallée–Poussin (Cauchy) problem, sufficient sets, space of entire functions.*

Original article submitted 17/X/2012;
revision submitted 19/I/2013.

*Karina R. Zabirova*, Postgraduate Student, Dept. of Special Chapters of Mathematics.
*Valentin V. Napalkov* (Dr. Sci. (Phys. & Math.), Corresponding member of RAS), Director of Institute.