УДК 517.957

РЕШЕНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Л. М. Кожевникова, А. А. Леонтьев

Башкирский государственный университет, Стерлитамакский филиал,
Россия, 453103, Стерлитамак, ул. Ленина, 47 а.

E-mails: kosul@mail.ru, alexey_leontiev@inbox.ru

Работа посвящена некоторому классу анизотропных параболических уравнений высокого порядка с двойной нелинейностью, представителем которого является модельное уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(|u|^{k-2}u\right)=\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{m_\alpha-1}\frac{\partial^{m_\alpha}}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}}\left[\left|\frac{\partial^{m_\alpha}u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}}\right|^{p_\alpha-2}\frac{\partial^{m_\alpha}u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}}\right],$$
$$m_1,\ldots,m_n\in\mathbb{N},\quad p_n\geqslant\ldots\geqslant p_1>k,\quad k>1.$$

Для решений первой смешанной задачи в цилиндрической области $D=(0,\infty)\times\times\,\Omega$ с неограниченной областью $\Omega\subset\mathbb{R}_n$, $n\geqslant 2$, с однородным краевым условием Дирихле и финитной начальной функцией установлена максимальная скорость убывания при $t\to\infty$. Ранее авторами были получены оценки сверху для анизотропных уравнений второго порядка и доказана их точность.

Ключевые слова: *анизотропное уравнение, параболическое уравнение с двойной нелинейностью, существование решения, скорость убывания решения.*

Введение. Пусть Ω — неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n=\{\mathbf{x}==(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}$, $n\geqslant 2$. В цилиндрической области $D=\{t>0\}\times\Omega$ для анизотропного квазилинейного параболического уравнения высокого порядка рассматривается первая смешанная задача

$$\left(|u|^{k-2}u\right)_t=\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{m_\alpha-1}\frac{\partial^{m_\alpha}}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}}\left[a_\alpha\left(\left(\frac{\partial^{m_\alpha}u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}}\right)^2\right)\frac{\partial^{m_\alpha}u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}}\right],\quad (t,\mathbf{x})\in D,\tag{1}$$

где $k>1$, $m_\alpha\in\mathbb{N}$;

$$D^j_{x_\alpha}u(t,\mathbf{x})\big|_S=0;\quad j=1,2,\ldots,m_\alpha-1,\ S=\{t>0\}\times\partial\Omega;\tag{2}$$
$$u(0,\mathbf{x})=\varphi(\mathbf{x}),\quad \varphi(\mathbf{x})\in L_k(\Omega),\quad \varphi_{x_\alpha}(\mathbf{x})\in L_{p_\alpha}(\Omega).\tag{3}$$

Предполагается, что неотрицательные функции $a_\alpha(s)$, $s\geqslant 0$, $\alpha=1,2,\ldots,n$, подчиняются следующим условиям: $a_\alpha(0)=0$, $a_\alpha(s)\in C^1(0,\infty)$,

$$\overline{a}s^{(p_\alpha-2)/2}\leqslant a_\alpha(s)\leqslant\widehat{a}s^{(p_\alpha-2)/2},\tag{4}$$
$$\frac{p_1}{2}a_\alpha(s)\leqslant a_\alpha(s)+a'_\alpha(s)s\leqslant\widehat{b}a_\alpha(s),$$

Лариса Михайловна Кожевникова (д.ф.-м.н., проф.), профессор, каф. математического анализа. *Алексей Александрович Леонтьев*, аспирант, каф. математического анализа.

с положительными константами $\widehat{a} \geqslant \overline{a}$, $2\widehat{b} \geqslant p_1 > k$ $(p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_n)$. Например, $a_\alpha(s) = s^{(p_\alpha-2)/2}$, $\widehat{b} = p_n/2$.

Исследованию поведения решений смешанных задач для линейных и квазилинейных параболических уравнений второго и высокого порядков при $t \to \infty$ посвящены работы А. К. Гущина, В. И. Ушакова, Ф. Х. Мукминова, А. Ф. Тедеева, Л. М. Кожевниковой, Р. Х. Каримова, В. Ф. Гилимшиной и др. Обзоры соответствующих результатов можно найти в [1–3].

В настоящей работе исследуется допустимая скорость стабилизации решения задачи (1)–(3). Будем рассматривать области, расположенные вдоль выделенной оси Ox_s, $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (область Ω лежит в полупространстве $\mathbb{R}^+{}_n[s] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_n \mid x_s > 0\}$, сечение $\gamma_r[s] = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_s = r\}$ не пусто и ограничено при любом $r > 0$). Ниже будет использовано следующее обозначение:

$$\Omega_a^b[s] = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid a < x_s < b\},$$

при этом значения $a = 0$, $b = \infty$ опускаются.

Предполагается, что начальная функция имеет ограниченный носитель, так что

$$\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega^{R_0}, \quad R_0 > 0. \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (5), *тогда найдутся положительные числа* κ, $\mathcal{M}(p_s, m_s, k, \overline{a}, \widehat{a})$ *такие, что ограниченное решение* $u(t, \mathbf{x})$ *задачи* (1)–(3) *при всех* $t \geqslant 0$, $r \geqslant 2R_0$ *удовлетворяет оценке*

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega_r)} \leqslant \mathcal{M} \exp\left(-\kappa \left[\frac{r^{p_s m_s}}{t}\right]^{1/(p_s m_s - 1)}\right) \|\varphi\|_{L_k(\Omega)}. \tag{6}$$

На основе неравенства (6) устанавливается оценка снизу скорости убывания решения задачи (1)–(3) при $t \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (5), *тогда существует положительное число* $C(\varphi, k, p_1, \widehat{a}, \widehat{b})$ *такое, что ограниченное решение* $u(t, \mathbf{x})$ *задачи* (1)–(3) *при всех* $t \geqslant 0$ *подчиняется оценке*

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \geqslant \|\varphi\|_{L_k(\Omega)} \left(C(\varphi)t + 1\right)^{-1/(p_1-k)}.$$

Показано, что наилучшая скорость убывания решений достигается в сужающихся неограниченных областях, именно (см. замечание) для решений задачи (1)–(3) в области Ω, удовлетворяющей условию

$$\mu_1 = \inf\left\{\left\|\frac{\partial^{m_1} g}{\partial x_1^{m_1}}\right\|_{L_{p_1}(\Omega)} \mid g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega), \|g\|_{L_k(\Omega)} = 1\right\} > 0, \tag{7}$$

справедлива оценка

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leqslant M t^{-1/(p_1-k)}, \quad t > 0. \tag{8}$$

1. Вспомогательные утверждения. Пусть $\|\cdot\|_{p,Q}$ — норма в $L_p(Q)$, $p \geqslant 1$, причём значение $Q = \Omega$ опускается. Через $D_a^b = (a, b) \times \Omega$ обозначим цилиндр, значения $a = 0$ и $b = \infty$ могут отсутствовать.

Банахово пространство $\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{\mathbf{m}}(\Omega)$ определим как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{W_{k,\mathbf{p}}^{\mathbf{m}}(\Omega)} = \sum_{\alpha=1}^{n} \Big\| \frac{\partial^{m_\alpha} u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \Big\|_{p_\alpha} + \|u\|_k.$$

Банаховы пространства $\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{0,\mathbf{m}}(D^T)$, $\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1,\mathbf{m}}(D^T)$ определим как пополнения пространства $C_0^\infty(D_{-1}^{T+1})$, соответственно, по нормам

$$\|u\|_{W_{k,\mathbf{p}}^{0,\mathbf{m}}(D^T)} = \|u\|_{k,D^T} + \sum_{\alpha=1}^{n} \Big\| \frac{\partial^{m_\alpha} u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \Big\|_{p_\alpha, D^T},$$
$$\|u\|_{W_{k,\mathbf{p}}^{1,\mathbf{m}}(D^T)} = \|u\|_{W_{k,\mathbf{p}}^{0,\mathbf{m}}(D^T)} + \|u_t\|_{k,D^T}.$$

Определение. Обобщённым решением задачи (1)–(3) назовём функцию $u(t,\mathbf{x})$ такую, что при всех $T>0$ $u(t,\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{0,\mathbf{m}}(D^T)$, при $k \in (1,2)$ $u_t(t,\mathbf{x}) \in L_k(D^T)$, а при $k \geqslant 2$ $|u|^{k-2}u_t \in L_{k'}(D^T)$, $k' = k/(k-1)$, и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{D^T} \left(-|u|^{k-2} u v_t + \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha \left(\Big(\frac{\partial^{m_\alpha} u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \Big)^2 \right) \frac{\partial^{m_\alpha} u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \frac{\partial^{m_\alpha} v}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \right) d\mathbf{x}dt +$$
$$+ \int_\Omega |u(T,\mathbf{x})|^{k-2} u(T,\mathbf{x}) v(T,\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_\Omega |\varphi(\mathbf{x})|^{k-2} \varphi(\mathbf{x}) v(0,\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (9)$$

для любой функции $v(t,\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1,\mathbf{m}}(D^T)$.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{\mathbf{m}}(\Omega)$, $p_1 \geqslant k$, $k>1$, *тогда существует обобщённое решение* $u(t,\mathbf{x})$ *задачи* (1)–(3). *При этом справедливы неравенства*

$$(k-1)\|u(t)\|_k^k + k\overline{a} \sum_{\alpha=1}^{n} \int_0^t \Big\| \frac{\partial^{m_\alpha} u(\tau)}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \Big\|_{p_\alpha}^{p_\alpha} d\tau \leqslant (k-1)\|\varphi\|_k^k, \quad t \geqslant 0, \quad (10)$$

$$(k-1)\frac{d}{dt}\|u(t)\|_k^k + k\overline{a} \sum_{\alpha=1}^{n} \Big\| \frac{\partial^{m_\alpha} u(t)}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \Big\|_{p_\alpha}^{p_\alpha} \leqslant 0, \quad t>0. \quad (11)$$

Решение задачи (1)–(3) строится методом галёркинских приближений, который ранее был предложен Ф. Х. Мукминовым, Э. Р. Андрияновой (см. [4]) для модельного изотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью и обобщён авторами статьи на некоторый класс анизотропных уравнений (см. [5, 6]).

Предложение 1. *Для любой функции* $g(x) \in L_p(\mathbb{R}_1^+)$, $D^m g(x) \in L_p(\mathbb{R}_1^+)$ *справедливо неравенство*

$$\|D^j g\|_{p,\mathbb{R}_1^+} \leqslant C \|D^m g\|_{p,\mathbb{R}_1^+}^{\frac{j}{m}} \|g\|_{p,\mathbb{R}_1^+}^{1-\frac{j}{m}}, \quad j = 0,1,\ldots,m, \quad (12)$$

где постоянная C зависит от p, m, j.

Доказательство. Для произвольной функций $h(x) \in L_p(\mathbb{R}_1)$, $D^m h \in L_p(\mathbb{R}_1)$ справедливо одномерное неравенство Ниренберга—Гальярдо [7], которое запишем в частном случае:

$$\|D^j h\|_{p,\mathbb{R}_1} \leqslant c_1 \|D^m h\|_{p,\mathbb{R}_1}^{\frac{j}{m}} \|h\|_{p,\mathbb{R}_1}^{1-\frac{j}{m}}, \quad j = 0, 1, \ldots, m.$$

Пусть функция $h(x)$ — продолжение функции $g(x)$ такое, что

$$\|D^j h\|_{p,\mathbb{R}_1} \leqslant c_2 \|D^j g\|_{p,\mathbb{R}_1^+}, \quad j = \overline{0, m}.$$

Соединяя эти неравенства, получаем неравенство (12). $\square$

2. Доказательство теорем. Будем предполагать, что решение задачи (1)–(3) ограничено, а именно, справедливо неравенство

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{D} \mid u(t, \mathbf{x}) \mid \leqslant B < \infty. \tag{13}$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $\theta(x)$, $x > 0$ — гладкая неотрицательная функция, равная единице при $x \geqslant 1$, нулю при $x \leqslant 0$. Тогда для функции $\xi(x_s) = \theta((x_s - r)/\rho)$ справедливы соотношения

$$\left|\frac{d^j \xi}{dx_s^j}\right| \leqslant C_1/\rho^j, \quad x \in (r, r+\rho), \quad \frac{d^j \xi}{dx_s^j} = 0, \quad x \notin (r, r+\rho), \quad j \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

Для $k \in (1, 2)$ в (9) можно взять $v = u\xi$, тогда, пользуясь равенством

$$\int_\Omega |u|^{k-2} u u_\tau d\mathbf{x} = \frac{1}{k} \frac{d}{d\tau} \left(\int_\Omega |u|^k d\mathbf{x} \right),$$

получим тождество

$$\frac{k-1}{k} \int_\Omega |u|^k \xi \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} d\mathbf{x} + \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{D^t} a_\alpha \left(\left(\frac{\partial^{m_\alpha} u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \right)^2 \right) \frac{\partial^{m_\alpha} u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \frac{\partial^{m_\alpha} (u\xi)}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} d\mathbf{x} d\tau = 0. \tag{15}$$

Для $k \geqslant 2$ можно выполнить интегрирование по частям в первом интеграле тождества (9), в результате получим равенство

$$\int_{D^\tau} \left((|u|^{k-2} u)_\tau v + \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha \left(\left(\frac{\partial^{m_\alpha} u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \right)^2 \right) \frac{\partial^{m_\alpha} u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \frac{\partial^{m_\alpha} v}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \right) d\mathbf{x} d\tau = 0.$$

Положим $v = u\xi$, тогда, ввиду справедливости равенства

$$\int_\Omega (|u|^{k-2} u)_\tau u d\mathbf{x} = \frac{k-1}{k} \frac{d}{d\tau} \left(\int_\Omega |u|^k d\mathbf{x} \right),$$

выводим соотношение (15).

Далее, применяя (4), из (15) получаем (с учётом того, что $\xi\varphi = 0$)

$$\frac{k-1}{k}\int_\Omega |u(t,\mathbf{x})|^k \xi(x_s)d\mathbf{x} + \overline{a}\sum_{\alpha=1}^{n}\int_{D^t}\xi\Big|\frac{\partial^{m_\alpha}u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}}\Big|^{p_\alpha}d\mathbf{x}d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \widehat{a}\int_{D^t}\sum_{j=1}^{m_s}\Big|\frac{\partial^{m_s}u}{\partial x_s^{m_s}}\Big|^{p_s-1}C_{m_s}^j\Big|\frac{\partial^{m_s-j}u}{\partial x_s^{m_s-j}}\Big|\Big|\frac{d^j\xi}{dx_s^j}\Big|d\mathbf{x}d\tau \equiv I^t. \quad (16)$$

Используя (14), оценим интеграл

$$I^t \leqslant \sum_{j=1}^{m_s}\frac{C_2}{\rho^j}\int_0^t\int_{\Omega_r^{r+\rho}}\Big|\frac{\partial^{m_s}u}{\partial x_s^{m_s}}\Big|^{p_s-1}\Big|\frac{\partial^{m_s-j}u}{\partial x_s^{m_s-j}}\Big|d\mathbf{x}d\tau.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число такое, что $\varepsilon\rho \geqslant 1$. Тогда, последовательно применяя неравенства Гёльдера, неравенство (12) и Юнга, получаем соотношения

$$I^t \leqslant \sum_{j=1}^{m_s}\frac{C_2}{\rho^j}\int_0^t\int_{\mathbb{R}_{n-1}}\Big\|\frac{\partial^{m_s}u}{\partial x_s^{m_s}}\Big\|_{p_s,(r,r+\rho)}^{p_s-1}\Big\|\frac{\partial^{m_s-j}u}{\partial x_s^{m_s-j}}\Big\|_{p_s,(r,r+\rho)}d\mathbf{x}'_s d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{m_s}\frac{C_3}{\rho^j\varepsilon^j}\int_0^t\int_{\mathbb{R}_{n-1}}\Big\|\frac{\partial^{m_s}u}{\partial x_s^{m_s}}\Big\|_{p_s,(r,\infty)}^{p_s-j/m_s}\|u\|_{p_s,(r,\infty)}^{j/m_s}\varepsilon^j d\mathbf{x}'_s d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{m_s}\frac{C_3}{\rho^j\varepsilon^j}\int_0^t\int_{\mathbb{R}_{n-1}}\left[\frac{m_sp_s-j}{m_sp_s}\Big\|\frac{\partial^{m_s}u}{\partial x_s^{m_s}}\Big\|_{p_s,(r,\infty)}^{p_s} + \varepsilon^{m_sp_s}\frac{j}{m_sp_s}\|u\|_{p_s,(r,\infty)}^{p_s}\right]d\mathbf{x}'_s d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_4}{\rho\varepsilon}\int_0^t\int_{\Omega_r}\left[\Big|\frac{\partial^{m_s}u}{\partial x_s^{m_s}}\Big|^{p_s} + \varepsilon^{m_sp_s}|u|^{p_s}\right]d\mathbf{x}d\tau,$$

из которых с учётом (13) имеем

$$I^t \leqslant \frac{C_4}{\rho\varepsilon}\left(\int_0^t\int_{\Omega_r}\Big|\frac{\partial^{m_s}u}{\partial x_s^{m_s}}\Big|^{p_s}d\mathbf{x}d\tau + \varepsilon^{m_sp_s}B^{p_s-k}\int_0^t\int_{\Omega_r}|u|^k d\mathbf{x}d\tau\right). \quad (17)$$

Соединяя (16), (17), выводим неравенство

$$\frac{k-1}{k}\|u(t)\|_{k,\Omega_{r+\rho}}^k + \overline{a}\sum_{\alpha=1}^{n}\int_0^t\Big\|\frac{\partial^{m_\alpha}u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}}\Big\|_{p_\alpha,\Omega_{r+\rho}}^{p_\alpha}d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_5}{\rho\varepsilon}\left(\int_0^t\Big\|\frac{\partial^{m_s}u}{\partial x_s^{m_s}}\Big\|_{p_s,\Omega_r}^{p_s}d\tau + \varepsilon^{m_sp_s}\int_0^t\|u\|_{k,\Omega_r}^k d\tau\right). \quad (18)$$

Введём обозначение

$$F_r(t) = \|u(t)\|_{k,\Omega_r}^k + \sum_{\alpha=1}^{n}\int_0^t\Big\|\frac{\partial^{m_\alpha}u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}}\Big\|_{p_\alpha,\Omega_r}^{p_\alpha}d\tau,$$

тогда (18) можно переписать в виде

$$F_{r+\rho}(t) \leqslant \frac{C_6}{\varepsilon\rho}\left(F_r(t) + \varepsilon^{p_s m_s}\int_0^t F_r(\tau)d\tau\right). \tag{19}$$

Отметим, что если $\varepsilon\rho < 1$, то неравенство (19) также выполняется, так как в этом случае

$$F_{r+\rho}(t) \leqslant F_r(t) \leqslant \frac{1}{\varepsilon\rho}F_r \leqslant \frac{C_6}{\varepsilon\rho}\left(F_r(t) + \varepsilon^{p_s m_s}\int_0^t F_r(\tau)d\tau\right).$$

Таким образом, (19) доказано для произвольного $\varepsilon > 0$.

Далее индукцией по $l = 0, 1, \dots$ установим неравенство

$$F_{R_0+l\rho}(t) \leqslant C_7\Big(\frac{2C_6}{\rho}\Big)^l t^{l/(p_s m_s)}\left\{\prod_{i=0}^{l-1}(1 + i/(p_s m_s))\right\}^{-1/(p_s m_s)}\|\varphi\|_k^k. \tag{20}$$

В качестве нулевого шага индукции из неравенства (10) для любого $t > 0$ имеем неравенство $F_{R_0}(t) \leqslant C_7\|\varphi\|_k^k$. Предположим, что (20) справедливо для некоторого целого $l \geqslant 0$. Подставляя в (19)

$$\varepsilon = \left[\frac{1 + l/(p_s m_s)}{t}\right]^{1/(p_s m_s)}, \quad r = R_0 + l\rho,$$

с учётом (20) получаем

$$F_{R_0+(l+1)\rho}(t) \leqslant C_7 2^l\Big(\frac{C_6}{\rho}\Big)^{l+1} t^{1/(p_s m_s)}\left\{\prod_{i=0}^{l}(1 + i/(p_s m_s))\right\}^{-1/(p_s m_s)}\|\varphi\|_k^k \times$$

$$\times\left\{t^{l/(p_s m_s)} + \frac{1 + l/(p_s m_s)}{t}\int_0^t \tau^{l/(p_s m_s)}d\tau\right\} =$$

$$= C_7\Big(\frac{2C_6}{\rho}\Big)^{l+1} t^{(l+1)/(p_s m_s)}\left\{\prod_{i=0}^{l}(1 + i/(p_s m_s))\right\}^{-1/(p_s m_s)}\|\varphi\|_k^k.$$

Неравенство (20) доказано.

Положим $\rho = (r - R_0)/l$. Используя неравенство Стирлинга, из (20) нетрудно получить

$$F_r(t) \leqslant C_9 \exp\Big(-\frac{l}{p_s m_s}\ln\frac{(r - R_0)^{p_s m_s}}{C_8 t l^{p_s m_s - 1}}\Big)\|\varphi\|_k^k. \tag{21}$$

Полагая l равным целой части выражения

$$\Big[\frac{(r - R_0)^{p_s m_s}}{eC_8 t}\Big]^{1/(p_s m_s - 1)},$$

из неравенства (21) получим

$$F_r(t) \leqslant C_{11}\exp\left(-C_{10}\Big[\frac{(r - R_0)^{p_s m_s}}{t}\Big]^{1/(p_s m_s - 1)}\right)\|\varphi\|_k^k. \tag{22}$$

В итоге при $r \geqslant 2R_0$ из (22) следует оценка (6). $\square$

Доказательство теоремы 2 осуществляется аналогично доказательству для случая уравнения второго порядка (подробнее см. [5, 6]).

Замечание. *Если выполнено условие* (7), *то для решения* $u(t,\mathbf{x})$ *задачи* (1)–(3) *справедлива оценка* (8).

Доказательство. Из (11) следует, что

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_k^k \leqslant -\frac{\overline{a}k}{k-1}\sum_{\alpha=1}^{n}\Big\|\frac{\partial^{m_\alpha}u(t)}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}}\Big\|_{p_\alpha}^{p_\alpha} \leqslant -\frac{\overline{a}k}{k-1}\Big\|\frac{\partial^{m_1}u(t)}{\partial x_1^{m_1}}\Big\|_{p_1}^{p_1} \leqslant -\frac{\overline{a}k}{k-1}\mu_1^{p_1}\|u\|_k^{p_1}.$$

Решая это дифференциальное неравенство, получим оценку

$$\|u(t)\|_k \leqslant t^{-1/(p_1-k)}\Big(\frac{(p_1-k)\overline{a}}{k-1}\mu_1^{p_1}\Big)^{-1/(p_1-k)}, \quad t>0,$$

из которой следует неравенство (8). $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13–01–0081-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Л. М. Кожевникова, Ф. Х. Мукминов*, “Оценки скорости стабилизации при $t\to\infty$ решения первой смешанной задачи для квазилинейной системы параболических уравнений второго порядка” // *Матем. сб.*, 2000. Т. 191, № 2. С. 91–131; англ. пер.: *L. M. Kozhevnikova, F. Kh. Mukminov*, “Estimates of the stabilization rate as $t\to\infty$ of solutions of the first mixed problem for a quasilinear system of second-order parabolic equations” // *Sb. Math.*, 2000. Vol. 191, no. 2. Pp. 235–273.
2. *Л. М. Кожевникова*, “Стабилизация решения первой смешанной задачи для эволюционного квазиэллиптического уравнения” // *Матем. сб.*, 2005. Т. 196, № 7. С. 67–100; англ. пер.: *L. M. Kozhevnikova*, “Stabilization of a solution of the first mixed problem for a quasi-elliptic evolution equation” // *Sb. Math.*, 2005. Vol. 196, no. 7. Pp. 999–1032.
3. *Р. Х. Каримов, Л. М. Кожевникова*, “Стабилизация решений квазилинейных параболических уравнений второго порядка в областях с некомпактными границами” // *Матем. сб.*, 2010. Т. 201, № 9. С. 3–26; англ. пер.: *R. Kh. Karimov, L. M. Kozhevnikova*, “Stabilization of solutions of quasilinear second order parabolic equations in domains with non-compact boundaries” // *Sb. Math.*, 2010. Vol. 201, no. 9. Pp. 1249–1271.
4. *Э. Р. Андриянова, Ф. Х. Мукминов*, “Оценка снизу скорости убывания решения параболического уравнения с двойной нелинейностью” // *Уфимск. матем. журн.*, 2011. Т. 3, № 3. С. 3–14. [*E. R. Andriyanova, F. Kh. Mukminov*, “The lower estimate of decay rate of solutions for doubly nonlinear parabolic equations” // *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2011. Vol. 3, no. 3. Pp. 3–14].
5. *Л. М. Кожевникова, А. А. Леонтьев*, “Оценки решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью” // *Уфимск. матем. журн.*, 2011. Т. 3, № 4. С. 64–85. [*L. M. Kozhevnikova, A. A. Leontiev*, “Estimates of solutions of an anisotropic doubly nonlinear parabolic equation” // *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2011. Vol. 3, no. 4. Pp. 64–85].
6. *Л. М. Кожевникова, А. А. Леонтьев*, “Убывание решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью в неограниченных областях” // *Уфимск. матем. журн.*, 2013. Т. 5, № 1. С. 65–83. [*L. M. Kozhevnikova, A. A. Leontiev*, “Decay of solution of anisotropic doubly nonlinear parabolic equation in unbounded domains” // *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2013. Vol. 5, no. 1. Pp. 65–83].
7. *L. Nirenberg*, “On elliptic partial differential equations” // *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat., III. Ser*, 1959. Vol. 13. Pp. 115–162.

Поступила в редакцию 15/XI/2012;
в окончательном варианте — 10/III/2013.

MSC: 35K35, 35K61

SOLUTIONS OF ANISOTROPIC PARABOLIC EQUATIONS WITH DOUBLE NON-LINEARITY IN UNBOUNDED DOMAINS

L. M. Kozhevnikova, A. A. Leontiev

Sterlitamak Branch of Bashkir State University,
47 a, Lenin st., Sterlitamak, 453103, Russia.

E-mails: kosul@mail.ru, alexey_leontiev@inbox.ru

This work is devoted to some class of parabolic equations of high order with double nonlinearity which can be represented by a model equation

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{k-2}u) = \sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{m_\alpha-1}\frac{\partial^{m_\alpha}}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}}\left[\left|\frac{\partial^{m_\alpha}u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}}\right|^{p_\alpha-2}\frac{\partial^{m_\alpha}u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}}\right],$$

$$m_1,\ldots,m_n \in \mathbb{N}, \quad p_n \geqslant \ldots \geqslant p_1 > k, \quad k > 1.$$

For the solution of the first mixed problem in a cylindrical domain $D = (0,\infty)\times$ $\times\Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}_n$, $n \geqslant 2$, *with homogeneous Dirichlet boundary condition and finite initial function the highest rate of decay established as* $t \to \infty$. *Earlier upper estimates were obtained by the authors for anisotropic equation of the second order and prove their accuracy.*

Key words: *anisotropic equation, doubly nonlinear parabolic equations, existence of strong solution, decay rate of solution.*

Original article submitted 15/XI/2012;
revision submitted 10/III/2013.

Larisa M. Kozhevnikova (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Dept. of Mathematical Analysis.
Alexey A. Leontiev, Postgraduate Student, Dept. of Mathematical Analysis.