УДК 517.956.25

РЕШЕНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Л. М. Кожевникова, А. А. Хаджи

Башкирский государственный университет, Стерлитамакский филиал,
Россия, 453103, Стерлитамак, ул. Ленина, 47 а.

E-mails: kosul@mail.ru, anna_5955@mail.ru

В неограниченной области рассматривается некоторый класс анизотропных эллиптических уравнений второго порядка. Для решений задачи Дирихле получены оценки сверху и доказана их точность в изотропном случае.

Ключевые слова: *задача Дирихле, анизотропное уравнение, квазилинейное эллиптическое уравнение, обобщённое решение, неограниченная область, убывание решения, существование и единственность решения, неравенство Харнака, область вращения.*

Введение. Пусть Ω — произвольная неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}_n$, $n \geqslant 2$. Для анизотропного квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка рассматривается задача Дирихле

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u))_{x_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{n}(\Phi_\alpha(\mathbf{x}))_{x_\alpha}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Предполагается, что функции $a_\alpha(\mathbf{x}, \xi)$, $\alpha = \overline{1, n}$, измеримы по $\mathbf{x} \in \Omega$ для $\xi \in \mathbb{R}_n$ и непрерывны по $\xi \in \mathbb{R}_n$ для почти всех $\mathbf{x} \in \Omega$. Пусть $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, будем считать, что $1 < p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_n$ и существуют положительные числа $\overline{a}$, $\widehat{a}$ такие, что для любых ξ, $\eta \in \mathbb{R}_n$ при почти всех $\mathbf{x} \in \Omega$ выполняются условия

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(a_\alpha(\mathbf{x}, \xi) - a_\alpha(\mathbf{x}, \eta)\right)(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geqslant \overline{a}\sum_{\alpha=1}^{n}|\xi_\alpha - \eta_\alpha|^{p_\alpha}; \tag{3}$$

$$|a_\alpha(\mathbf{x}, \xi) - a_\alpha(\mathbf{x}, \eta)| \leqslant \widehat{a}|\xi_\alpha - \eta_\alpha|\left(|\xi_\alpha| + |\eta_\alpha|\right)^{p_\alpha - 2}, \quad \alpha = \overline{1, n}; \tag{4}$$

$$a_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0, \quad \alpha = \overline{1, n}. \tag{5}$$

В работе получена оценка, характеризующая скорость убывания решения задачи Дирихле для уравнения (1) с финитной правой частью, и доказана её точность для $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$.

Изучением поведения на бесконечности решений линейных эллиптических уравнений занимались О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, Е. М. Ландис, Г. П. Панасенко, В. А. Кондратьев, И. Копачек, Д. М. Леквеишвили и другие (подробный обзор результатов приведён в [1]). В работе [2] Л. М. Кожевниковой, Р. Х. Каримовым для некоторого класса квазилинейных эллиптических

Лариса Михайловна Кожевникова (д.ф.-м.н., проф.), профессор, каф. математического анализа. *Анна Александровна Хаджи*, аспирант, каф. математического анализа.

уравнений второго порядка установлены оценки сверху решения задачи Дирихле. Анизотропный случай до настоящего времени оставался неизученным.

Будем рассматривать области, расположенные вдоль выделенной оси Ox_s, $s \in \overline{2,n}$ (область Ω лежит в полупространстве $x_s > 0$ и сечение $\gamma_r = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_s = r\}$ не пусто при любом $r > 0$).

Введём обозначения: $\Omega_a^b = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid a < x_s < b\}$, значение $b = \infty$ опускается, $\|\cdot\|_{p,Q}$ — норма в пространстве $L_p(Q)$, значение $Q = \Omega$ не пишется.

Определим геометрическую характеристику неограниченной области Ω:

$$\nu(r) = \inf\left\{\|g_{x_1}\|_{p_1,\gamma_r} \mid g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega),\ \|g\|_{p_1,\gamma_r} = 1\right\}, \quad r > 0. \tag{6}$$

Пусть область Ω удовлетворяет условию

$$\int_1^\infty \nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho = \infty. \tag{7}$$

Будем полагать, что носители функций Φ_α, $\alpha = \overline{1,n}$, ограничены, а именно

$$\mathrm{supp}\Phi_\alpha(\mathbf{x}) \subset \Omega^{R_0}, \quad R_0 > 0, \quad \alpha = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Теорема 1. *Если выполнены условия* (7), (8), *то существуют положительные числа* κ, $\mathcal{M}$ *такие, что для ограниченного обобщённого решения* $u(\mathbf{x})$ *задачи* (1), (2) *при* $r > 2R_0$ *справедлива оценка*

$$\sum_{\alpha=1}^n \|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha,\Omega_r}^{p_\alpha} \leqslant \mathcal{M}\exp\left(-\kappa\int_1^r \nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho\right). \tag{9}$$

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1 в работе [3].

Рассмотрим область вращения

$$\Omega(f)[s] = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_n \mid x_s > 0,\ |\mathbf{x}'_s| < f(x_s)\right\}, \quad s \in \overline{2,n},$$

$\mathbf{x}'_s = (x_1, \ldots, x_{s-1}, x_{s+1}, \ldots, x_n)$, с положительной функцией $f(x_s) < \infty$. От функции f требуется только, чтобы множество $\Omega(f)[s]$ было областью.

Для таких областей справедливо соотношение

$$\nu(r) = \frac{c}{f(r)}, \quad r > 0, \tag{10}$$

поэтому условие (7) принимает вид

$$\int_1^\infty \frac{d\rho}{f^{p_1/p_s}(\rho)} = \infty.$$

Пусть выполнено условие

$$\lim_{r\to\infty} \frac{f^{p_1/p_s}(r)}{r} = 0, \tag{11}$$

тогда следствием оценки (9) для ограниченного решения $u(\mathbf{x})$ задачи (1), (2) в области вращения является следующая оценка:

$$\|u\|_{p_1,\Omega_r^{r+1}(f)} \leqslant \widetilde{\mathcal{M}} \exp\left(-\widetilde{\kappa}\int_1^r \frac{d\rho}{f^{p_1/p_s}(\rho)}\right), \quad r > \widetilde{R} \tag{12}$$

(см. следствие 1).

В области $\Omega(f_1)[s]$ с функцией $f_1(x) = x^a$, $0 \leqslant a < p_s/p_1$, $x > 0$, для решения задачи (1), (2) оценка (12) принимает вид

$$\|u\|_{p_1,\Omega_r^{r+1}(f_1)} \leqslant \widetilde{\mathcal{M}}_1 \exp\left(-\widetilde{\kappa}_1 r^{1-ap_1/p_s}\right), \quad r > \widetilde{R}_1.$$

В области $\Omega(f_2)[s]$ с функцией $f_2(x) = x^{p_s/p_1}(\ln x)^{-1}$, $x > e$, для решения задачи (1), (2) оценка (12) принимает вид

$$\|u\|_{p_1,\Omega_r^{r+1}(f_2)} \leqslant \widetilde{\mathcal{M}}_2 \exp\left(-\widetilde{\kappa}_2 (\ln r)^{p_1/p_s+1}\right), \quad r > \widetilde{R}_2.$$

Полагаем, что существует постоянная $\omega \geqslant 1$ такая, что для функции $f(x)$ справедливо неравенство

$$\sup\{f(z) | z \in [x - f(x), x + f(x)]\} \leqslant \omega f(x), \quad x \geqslant 1. \tag{13}$$

Теорема 2. *Пусть положительная функция $f(x)$, $x > 0$ удовлетворяет условию* (13). *Тогда существуют положительные числа $\widetilde{K}$, $\widetilde{\mu}$ такие, что для неотрицательного решения $u(\mathbf{x})$ задачи* (1), (2) *с $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$ в области вращения $\Omega(f)$ справедлива оценка*

$$\|u\|_{p,\Omega_r^{r+1}(f)} \geqslant \mu \exp\left(-K\int_1^r \frac{dx}{f(x)}\right), \quad r \geqslant \widetilde{r}. \tag{14}$$

Таким образом, доказана точность оценки (12). В частности, для неотрицательных решений задачи (1), (2) в областях $\Omega(f_1)$, $\Omega(f_2)$ справедливы неравенства

$$\|u\|_{p,\Omega_r^{r+1}(f_1)} \geqslant \mu_1 \exp\left(-K_1 r^{1-a}\right), \quad r \geqslant \widetilde{r}_1,$$
$$\|u\|_{p,\Omega_r^{r+1}(f_2)} \geqslant \mu_2 \exp\left(-K_2 \ln^2 r\right), \quad r \geqslant \widetilde{r}_2.$$

1. Вспомогательные сведения. Определим пространство $\overset{\circ}{H}{}^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$ как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|v\|_{\overset{\circ}{H}{}^1_{\mathbf{p}}(\Omega)} = \sum_{\alpha=1}^n \|v_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}$.

Определение. Обобщённым решением задачи (1), (2), в которой $\Phi_\alpha(\mathbf{x}) \in L_{p_\alpha/(p_\alpha-1)}(\Omega)$, $\alpha = \overline{1,n}$, назовём функцию $u(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\sum_{\alpha=1}^n \int_\Omega \left(a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u) - \Phi_\alpha\right) v_{x_\alpha} d\mathbf{x} = 0 \tag{15}$$

для любой функции $v(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$.

Определение обобщённого решения корректно, поскольку входящие в (15) интегралы конечны. Действительно, используя неравенство Юнга и интегральное неравенство Гёльдера, применяя условия (4), (5), для функций $u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$ выводим

$$\int_\Omega |a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u)||v_{x_\alpha}|d\mathbf{x} \leqslant \widehat{a} \int_\Omega |u_{x_\alpha}|^{p_\alpha - 1}|v_{x_\alpha}|d\mathbf{x} \leqslant \widehat{a}\|u_{x_\alpha}\|^{p_\alpha-1}_{p_\alpha}\|v_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (3)–(5), *тогда существует единственное обобщенное решение* $u(\mathbf{x})$ *задачи* (1), (2) *с функциями* $\Phi_\alpha(\mathbf{x}) \in L_{p_\alpha/(p_\alpha-1)}(\Omega)$, $\alpha = \overline{1, n}$, *и справедлива оценка*

$$\sum_{\alpha=1}^n \|u_{x_\alpha}\|^{p_\alpha} \leqslant C_1 \sum_{\alpha=1}^n \|\Phi_\alpha\|^{p_\alpha/(p_\alpha-1)}_{p_\alpha/(p_\alpha-1)}.$$

Доказательство существования проводится методом галёркинских приближений аналогично доказательству соответствующего утверждения для изотропного уравнения в случае ограниченной области Ω (см. [4, гл.4, §9]).

Следствие 1. *Если выполнено условие* (11), *то для ограниченного решения* $u(\mathbf{x})$ *задачи* (1), (2) *в области вращения справедлива оценка* (12).

Доказательство. Из условия (11) следует неравенство

$$f^{p_1}(\rho) \leqslant \rho^{p_s}, \quad \rho \geqslant R_1. \tag{16}$$

Пользуясь (6), (10), (16), получаем

$$\frac{c^{p_1}}{(r+1)^{p_s}}\|u\|^{p_1}_{p_1,\Omega_r^{r+1}(f)} \leqslant c^{p_1}\int_r^{r+1}\frac{1}{\rho^{p_s}}\|u\|^{p_1}_{p_1,\gamma_\rho}d\rho \leqslant \int_r^{r+1}\nu^{p_1}(\rho)\|u\|^{p_1}_{p_1,\gamma_\rho}d\rho \leqslant$$
$$\leqslant \int_r^{r+1}\|u_{x_1}\|^{p_1}_{p_1,\gamma_\rho}d\rho = \|u_{x_1}\|^{p_1}_{p_1,\Omega_r^{r+1}}. \tag{17}$$

Из условия (11) для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$r \leqslant \exp\left(\varepsilon\int_1^r \frac{d\rho}{f^{p_1/p_s}(\rho)}d\rho\right), \quad r \geqslant R_2. \tag{18}$$

Соединяя (17), (9), (10), (18), для $r \geqslant \max(R_1, R_2, 1) = \widetilde{R}$ получаем

$$\|u\|^{p_1}_{p_1,\Omega_r^{r+1}(f)} \leqslant (2r)^{p_s}c^{-p_1}\mathcal{M}\exp\left(-\kappa c^{p_1/p_s}\int_1^r \frac{d\rho}{f^{p_1/p_s}(\rho)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \widetilde{\mathcal{M}}\exp\left((\varepsilon p_s - \kappa c^{p_1/p_s})\int_1^r\frac{d\rho}{f^{p_1/p_s}(\rho)}\right).$$

Выбирая $\varepsilon < \frac{\kappa c^{p_1/p_s}}{2p_s}$, выводим (12) с $\widetilde{\kappa} = \frac{\kappa c^{p_1/p_s}}{2p_1}$. $\square$

2. Оценка снизу. Пусть $\{z_J\}_{J=0}^{\infty}$ — неограниченная возрастающая последовательность положительных чисел, для которой справедливы равенства

$$z_0 = R_0, \quad z_J = \sup\bigl\{r \mid \inf_{[z_{J-1},r)} f(x) \geqslant r - z_{J-1}\bigr\}, \quad J = 1, 2, \ldots .$$

Утверждение 1. *Если выполнено условие* (13), *то для последовательности* $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$ *верны соотношения*

$$N \leqslant w^2 \int_1^{z_N} \frac{dx}{f(x)}, \quad N = 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

$$\overline{w}^{-1} \leqslant \frac{z_{N+1} - z_N}{z_N - z_{N-1}} \leqslant \overline{w}, \quad \overline{w} = w^3, \quad N = 1, 2, \ldots . \tag{20}$$

(*см.* [1], *формулы* (0.31), (0.32)).

Получение оценки снизу основано на неравенстве Гарнака [5] для квазилинейных эллиптических уравнений. Следующая лемма является следствием этого неравенства.

Лемма 1. *Пусть* $\rho \leqslant 1/2$, $\Delta = b - a$, *тогда существует число* $\widehat{H} \geqslant 1$ *такое, что неотрицательное решение* $u(\mathbf{x})$ *уравнения* (1) *с* $\Phi_\alpha(\mathbf{x}) = 0$, $\alpha = \overline{1, n}$, *в* $\widehat{Q}_{a,b,\rho}$, *где*

$$\widehat{Q}_{a,b,\rho} = Q_{a,b,\Delta} \cup B(2\rho\Delta, (a, \mathbf{0}')) \cup B(2\rho\Delta, (b, \mathbf{0}')), \quad \Delta = b - a,$$
$$Q_{a,b,\Delta} = \{(x_1, \mathbf{x}') \in \mathbb{R}_n \mid a < x < b, \ | \mathbf{x}' | < \Delta\},$$

удовлетворяет неравенству

$$u(a, \mathbf{0}') \leqslant \widehat{H} \inf_{\overline{Q}_{a,b,\rho\Delta}} u(\mathbf{x})$$

(*см.* [1], *лемма* 5).

Доказательство теоремы 2. Условие (13) для функции $f(x)$ достаточно для выполнения неравенств (19), (20) (см. утверждение 1). Положим $\rho = (2\overline{w})^{-1}$, тогда ввиду неравенств (20) и определения последовательности $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$ имеем включения

$$\widehat{Q}_{z_{J-1}, z_J, \rho} \subset \Omega(f), \quad J = 2, 3, \ldots .$$

По лемме 1 для пар $(z_{J-1}, \mathbf{0}')$, $(z_J, \mathbf{0}')$, $J = 2, 3, \ldots$ справедливы неравенства

$$u(z_{J-1}, \mathbf{0}') \leqslant \widehat{H} \inf_{\overline{Q}_{z_{J-1}, z_J, \rho\Delta_J}} u(\mathbf{x}) \leqslant \widehat{H} u(z_J, \mathbf{0}'), \quad \Delta_J = z_J - z_{J-1}. \tag{21}$$

Применяя неравенство (21) N раз, получаем соотношения

$$u(z_1, \mathbf{0}') \leqslant \widehat{H}^N \inf_{\overline{Q}_{z_N, z_{N+1}, \rho\Delta_{N+1}}} u(\mathbf{x}) \leqslant \widehat{H}^N u(z_{N+1}, \mathbf{0}'), \quad N \geqslant 1. \tag{22}$$

Применяя (20), находим

$$\overline{\omega}^{-N}\Delta_1 \leqslant \Delta_{N+1} \leqslant \overline{\omega}^{N}\Delta_1, \quad N \geqslant 0. \tag{23}$$

Выберем произвольное $r \geqslant z_1$ и зафиксируем $N \geqslant 1$ такое, что $r \in [z_N, z_{N+1})$. Пусть сначала $r+1 < z_{N+2}$. Положим $\widetilde{\Delta}_{N+1} = \min(\Delta_{N+1}, \Delta_{N+2})$. Пользуясь (22), выводим соотношения

$$\int_{\Omega_r^{r+1}(f)} u^p(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geqslant \int_{Q_{r,r+1,\rho\widetilde{\Delta}_{N+1}}} u^p(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geqslant C_1 \inf_{Q_{r,r+1,\rho\widetilde{\Delta}_{N+1}}} u^p(\mathbf{x})\widetilde{\Delta}_{N+1}^{n-1}\rho^{n-1} \geqslant$$
$$\geqslant C_1 \inf_{\overline{Q}_{z_N,z_{N+1},\Delta_{N+1}\rho}\cup\overline{Q}_{z_{N+1},z_{N+2},\Delta_{N+2}\rho}} u^p(\mathbf{x})\widetilde{\Delta}_{N+1}^{n-1}\rho^{n-1} \geqslant$$
$$\geqslant C_1\widehat{H}^{-p(N+1)}u^p(z_1,\mathbf{0}')\rho^{n-1}\widetilde{\Delta}_{N+1}^{n-1}.$$

Пусть теперь $r+1 \geqslant z_{N+2}$. Применяя неравенства (22), (23), несложно установить

$$\int_{\Omega_r^{r+1}(f)} u^p(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geqslant \int_{Q_{z_{N+1},z_{N+2},\Delta_{N+2}\rho}} u^p(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geqslant$$
$$\geqslant C_1 \inf_{\overline{Q}_{z_{N+1},z_{N+2},\Delta_{N+2}\rho}} u^p(\mathbf{x})\rho^{n-1}\Delta_{N+2}^{n} \geqslant$$
$$\geqslant C_2\widehat{H}^{-p(N+1)}\overline{\omega}^{-(N+1)}u^p(z_1,\mathbf{0}')\rho^{n-1}\Delta_{N+2}^{n-1}.$$

Для обоих случаев, пользуясь (23), получаем неравенства

$$\int_{\Omega_r^{r+1}(f)} u^p(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geqslant C_3\widehat{H}^{-(N+1)p}\overline{\omega}^{-(N+1)}u^p(z_1,\mathbf{0}')\min\{\Delta_{N+2},\Delta_{N+1}\}^{n-1} \geqslant$$
$$\geqslant C_4\exp(-N\ln(\overline{\omega}^n\widehat{H}^p)).$$

Применяя (19), из последнего находим оценку (14). □

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Л. М. Кожевникова*, “Поведение на бесконечности решений псевдодифференциальных эллиптических уравнений в неограниченных областях” // *Матем. сб.*, 2008. Т. 199, № 8. С. 61–94; англ. пер.: *L. M. Kozhevnikova*, “Behaviour at infinity of solutions of pseudodifferential elliptic equations in unbounded domains” // *Sb. Math.*, 2008. Vol. 199, no. 8. Pp. 1169–1200.
2. *Р. Х. Каримов, Л. М. Кожевникова*, “Поведение на бесконечности решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях” // *Уфимск. матем. журн.*, 2010. Т. 2, № 2. С. 53–66. [*R. Kh. Karimov, L. M. Kozhevnikova*, “Behavior on infinity of decision quasilinear elliptical equations in unbounded domain” // *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2010. Vol. 2, no. 2. Pp. 53–66].
3. *Л. М. Кожевникова, А. А. Хаджи*, “Оценка решения задачи Дирихле для анизотропного квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка” // *Сб. трудов междунар. школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых*, 2011. Т. 1. С. 55–63. [*L. M. Kozhevnikova, A. A. Khadzhi*, “Estimate of Dirichlet problem solution for anisotropic quasilinear second-order elliptic equations” // *Sb. trudov mezhdunar. shkoly-konferentsii dlya studentov, aspirantov i molodykh uchenykh*, 2011. Vol. 1. Pp. 55–63].

4. *О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева*, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с. [*O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Uraltseva*, Linear and quasilinear equations of elliptic type. Moscow: Nauka, 1973. 576 pp.]
5. *J. Serrin*, "Local behaviour of solutions of quasilinear equations" // *Acta Math.*, 1964. Vol. 111. Pp. 247–302.

Поступила в редакцию 14/XI/2012;
в окончательном варианте — 17/I/2013.

MSC: 35J62; 35J25, 35J15

SOLUTIONS OF ANISOTROPIC ELLIPTIC EQUATIONS IN UNBOUNDED DOMAINS

L. M. Kozhevnikova, A. A. Khadzhi

Sterlitamak Branch of Bashkir State University,
47 a, Lenin st., Sterlitamak, 453103, Russia.

E-mails: `kosul@mail.ru, anna_5955@mail.ru`

In the paper the Dirichlet problem for an anisotropic quasilinear elliptic equations of the second order is considered. The upper estimates for the generalized solution of this Dirichlet problem are received, the closeness is proved for the isotropic case.

Key words: *Dirichlet problem, anisotropic equation, quasilinear elliptic equation, generalized solution, unbounded domain, decrease of the solution, existence of solution, uniqueness of the solution, Harnack inequality, domain of rotation.*

Original article submitted 14/XI/2012;
revision submitted 17/I/2013.

Larisa M. Kozhevnikova (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Professor, Dept. of Mathematical Analysis. *Anna A. Khadzhi*, Postgraduate Student, Dept. of Mathematical Analysis.