УДК 517.956.223

О СУЩЕСТВОВАНИИ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ У РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. П. Михайлов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
Россия, 119991, Москва, ул. Губкина, 8.

E-mail: vpmih@mi.ras.ru

Приведён некоторый обзор результатов, связанных с существованием граничных значений у решений эллиптических уравнений.

Ключевые слова: *эллиптические уравнения, классические и обобщённые решения, предельные значения на границе, теоремы существования.*

Пусть Q — некоторая область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, а функция $u(x) \in C^{2m}(Q)$ и является в Q классическим решением линейного эллиптического уравнения

$$Lu = f(x), \quad x \in Q, \tag{1}$$

порядка $2m \geqslant 2$. Для простоты будем считать функцию $u(x)$ и коэффициенты уравнения (1) вещественнозначными функциями. Возникает вопрос: не является ли функция $u(x)$ не только решением в Q уравнения (1), но и решением некоторой краевой задачи для этого уравнения (граничные условия при этом тоже естественно считать линейными и с вещественными коэффициентами). А для ответа на этот вопрос следует прежде всего выяснить, существуют ли в каком-то смысле понимаемые пределы соответствующих линейных комбинаций взятого решения и его производных при приближении к границе области и имеет ли место утверждение о единственности соответствующим образом понимаемой краевой задачи. Конечно, аналогичные вопросы возникают не только для классических решений уравнения (1), но и для обобщенных (например, из W_p^m) решений этого уравнения.

Под предельным значением на границе мы будем понимать L_p-предельные значения, $p \geqslant 1$. А это для случая ограниченной области Q с границей ∂Q класса C^2 означает следующее. Обозначим через $r(x)$ расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до границы ∂Q:

$$r(x) = \min_{y \in \partial Q} |x - y|.$$

Существует столь малое δ_0, что для всех $\delta \in (0, \delta_0]$ подмножество $Q_\delta = Q \cap \{r(x) > \delta\}$ точек x области Q, отстоящих от границы ∂Q на расстоянии большем, чем δ, является областью с границей ∂Q_δ. При этом можно считать, что при произвольном $\delta \in (0, \delta_0]$ для любой точки $x_0 \in \partial Q$ существует единственная точка x_δ поверхности ∂Q_δ, отстоящая от точки x_0 на расстояние, равное δ, $|x_0 - x_\delta| = \delta$,

$$x_\delta = x_\delta(x_0) = x_0 - \delta\nu(x_0), \tag{2}$$

Валентин Петрович Михайлов (д.ф.-м.н., проф.), ведущий научный сотрудник, отдел математической физики.

где $\nu(x_0)$ — вектор внешней по отношению к области Q единичной нормали к ∂Q в точке x_0. Соответствие (2) точек $x_0 \in \partial Q$ и $x_\delta \in \partial Q_\delta$ есть взаимно однозначное отображение класса C^1 поверхности ∂Q на поверхность ∂Q_δ, причём обратное к (2) отображение задаётся формулой

$$x_0 = x_\delta + \delta \nu_\delta(x_\delta), \tag{2'}$$

где $\nu_\delta(x_\delta)$ — вектор внешней по отношению к Q_δ единичной нормали к поверхности ∂Q_δ в точке x_δ. Заметим, что $\nu_\delta(x_\delta) = \nu(x_0)$ при $x_0 \in \partial Q$, $x_\delta \in \partial Q_\delta$, $|x_0 - x_\delta| = \delta$.

Это построение для случая шара $Q = \{|x| < 1\}$ приводит к шару $Q_\delta = \{|x| < 1 - \delta\}$, для полупространства $Q = \{(x_1, x_2 \ldots, x_{n-1}) = x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0\}$ аналогичное построение приводит к полупространству $Q_\delta = \{(x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > \delta\}$, а для полосы $Q = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1}, 0 < x_n < 1\}$ при $\delta \in (0, 1/2)$ — к полосе $Q_\delta = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \delta < x_n < 1 - \delta\}$.

Пусть в области Q задана функция $U(x) \in C(Q)$ (или $U(x) \in W_p^1(Q')$, $p \geqslant 1$, в любой области Q', содержащейся в Q вместе с замыканием). Будем говорить, что функция $U(x)$ имеет L_p-предел на ∂Q, если существует такая функция $h(x) \in L_p(\partial Q)$ (L_p-предел на ∂Q функции $U(x)$), что имеет место равенство

$$\lim_{\delta \to 0} \|U(x_\delta(x_0)) - h(x_0)\|_{L_p(\partial Q)} = 0.$$

Большая часть результатов, о которых пойдёт речь в настоящей работе, уже опубликована в работах А. К. Гущина и моих [1–10], при этом рассматривается лишь самый простой случай, когда $p = 2$; значительно более сложный случай, когда $p \neq 2$, рассматривается А. К. Гущиным [11].

Пусть сначала уравнение (1) является уравнением второго порядка

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \big(a_{ij}(x) u_{x_i}\big)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} + a(x) u = f(x), \quad x \in Q, \tag{3}$$

где $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^1(\bar{Q})$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $a(x) \in C(\bar{Q})$, а функция $f(x)$ при рассмотрении классического решения ($u(x) \in C^2(Q)$) принадлежит $C(Q)$ и при некотором $\theta < 3$ выполняется неравенство

$$\int_Q f^2(x) r^\theta(x) dx < \infty. \tag{4}$$

От функции $f(x)$ будем требовать её измеримость в Q и выполнение при некотором $\theta < 3$ неравенства (4), если нас интересует обобщённое из W_2^1 решение $u(x)$ уравнения (3), то есть, если функция $u(x)$ принадлежит $W_2^1(Q')$ в любой области Q', $\bar{Q}' \in Q$, и удовлетворяет при любой финитной в Q функции $v(x) \in W_2^1(Q)$ равенству

$$\int_Q \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + \Big(\sum_{i=1}^{n} u_{x_i} + a(x) u \Big) v \right) dx = \int_Q f v dx.$$

Как для классического, так и для обобщённого решения $u(x)$ уравнения (3) введём непрерывную по $\delta \in (0, \delta_0]$ функцию

$$M(\delta) = \int_{\partial Q_\delta} u^2(x) dS_x.$$

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Для того чтобы классическое или обобщенное из W_2^1 решение $u(x)$ уравнения* (3) *имело L_2-предел на границе ∂Q, необходимо и достаточно, чтобы функция $M(\delta)$ была ограниченной*:

$$\sup_{\delta\in(0,\delta_0]} M(\delta) = \sup_{\delta\in(0,\delta_0]} \int_{\partial Q_\delta} u^2(x) dS_x < \infty. \tag{5}$$

Теорема 2. *Для того чтобы классическое или обобщенное из W_2^1 решение $u(x)$ уравнения* (3) *имело L_2-предел на границе ∂Q, необходимо и достаточно, чтобы функция $|\nabla u|^2 r(x)$ была интегрируемой по Q*:

$$\int_Q |\nabla u|^2 r(x) dx < \infty. \tag{6}$$

Для аналитической функции одного комплексного переменного в круге (а следовательно, и для двумерной гармонической функции в круге) теорема 1 была установлена Ф. Риссом [12], а теорема 2 — Дж. Литтлвудом и Р. Пэли [13], см. также [14–16].

Условие (4) на правую часть $f(x)$ уравнения (3) существенно для справедливости этих утверждений. Для случая, когда Q есть шар в $\mathbb{R}^n$, $Q = \{|x| < 1\}$ функция

$$f_0(x) = \frac{8|x|^2 \ln(1-|x|^2)}{(1-|x|^2)^2(1+\ln^2(1-|x|^2))} - \frac{8|x|^2(1-\ln^2(1-|x|^2))}{(1-|x|^2)(1+\ln^2(1-|x|^2))^2} + \\ + \frac{4n\ln(1-|x|^2)}{(1-|x|^2)(1+\ln^2(1-|x|^2))}, \quad |x| < 1,$$

принадлежит $C^\infty(|x| < 1)$, для любого $\theta < 3$

$$\int_Q f_0^2(x) r^\theta(x) dx = \int_{|x|<1} f_0^2(x)(1-|x|)^\theta dx = \infty,$$

но несмотря на то, что

$$\int_Q f_0^2(x) r^3(x) dx = \int_{|x|<1} f_0^2(x)(1-|x|)^3 dx < \infty,$$

уравнение

$$\Delta u = f_0(x), \quad |x| < 1,$$

не имеет ни классических, ни обобщённых решений (все такие решения принадлежат $C^\infty(|x| < 1)$), у которых существует L_2-предел на граничной сфере $\{|x| = 1\}$.

Утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2, справедливы для гармонических функций в простейших областях и для случаев более общих граничных операторов. В частности, имеют место следующие предложения.

Теорема 3. *Пусть $u(x)$ — гармоническая в шаре $\{|x| < 1\}$ функция. Для существования L_2-предела на границе функции*

$$\frac{\partial u}{\partial |x|} + \mu u = (\nabla u, \nu) + \mu u, \quad |x| < 1,$$

где вектор $\nu = x/|x|$, $|\nu| = 1$, а μ — постоянная, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sup_{\delta \in (0,\delta_0]} \int_{|x|=1-\delta} \Big(\frac{\partial u}{\partial |x|}\Big)^2 dS_x < \infty,$$

которое эквивалентно условию

$$\int_{|x|<1} \Big(\nabla \frac{\partial u}{\partial |x|}\Big)^2 (1-|x|)dx < \infty.$$

Теорема 4. *Пусть $u(x)$ — функция, гармоническая в полупространстве $\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n > 0\}$. Для существования L_2-предела на границе $\{x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n = 0\}$ функции*

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} + \mu u, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad x_n > 0,$$

где μ — постоянная, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_{x_n>0} |\nabla u_{x_n}|^2 x_n dx < \infty,$$

которое эквивалентно условию

$$\sup_{\delta \in (0,\delta_0]} \int_{x_n=\delta} \Big(\frac{\partial u}{\partial x_n}\Big)^2 dx' < \infty.$$

Для случая, когда порядок $2m$ уравнения (1) больше, чем 2 ($2m > 2$), результаты более скромные. Прежде всего, областями, в которых изучаются решения, здесь являются либо шар, либо полупространство (или полоса) в $\mathbb{R}^n$, да и уравнения рассмотрены весьма частного вида. Это полигармоническое уравнение в шаре:

$$\Delta^m u = 0, \quad |x| < 1. \tag{7}$$

В n-мерной полосе $\Pi = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1}, 0 < x_n < 1\}$ рассмотрено метагармоническое уравнение

$$G(\Delta)u = 0, \quad x \in \Pi, \tag{8}$$

в котором функция $G(z)$ является многочленом степени $m \geqslant 1$, $G(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m$, где a_0, a_1, …, a_m — постоянные, а в двумерной полосе $\Pi' = \{x_1 \in \mathbb{R}^1, 0 < x_2 < 1\}$ уравнение

$$\prod_{s=1}^{k}\Big(\frac{\partial}{\partial x_2} + \lambda_s \frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{m_s}\Big(\frac{\partial}{\partial x_2} + \bar{\lambda}_s \frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{m_s} u = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \Pi', \tag{9}$$

в котором λ_s — попарно различные комплексные числа, $\operatorname{Im}\lambda_s > 0$; $m_s \geqslant 1$ — целые числа, $m_1 + m_2 + \dots + m_k = m \geqslant 1$; $s = 1, 2, \dots, k$.

Для решения $u(x)$ уравнения (7) при $m = 1$ (для гармонических функций) имеют место теоремы 1 и 2, но при $m > 1$ ни одно из этих утверждений места не имеет. Условие L_2-ограниченности (5), конечно, является необходимым для существования L_2-предела решения и при $m > 1$, но достаточным условием при $m > 1$ оно не является. Вот соответствующий пример в двумерном ($n = 2$) случае.

Функция

$$u_0(x_1, x_2) = u_0(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = (1 - r^2)\sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \cos k\varphi, \quad |x| = r < 1,$$

при $a_k = \sqrt{k}$, $k \geqslant 1$, является бигармонической в круге $\{|x| < 1\}$, условие L_2-ограниченности (5) для неё выполнено, но L_2-предела на окружности $\{|x| = 1\}$ она не имеет.

Что же касается условия (6) теоремы 2, то для существования L_2-предела на границе у решения уравнения (7) в случае $m > 1$ это условие, напротив, не является необходимым, но является достаточным. Пример того, что это условие не является необходимым, доставляет (при $n = 2$) функция $u_0(x_1, x_2)$ при $a_k = \sqrt{k/\ln(k+1)}$, $k \geqslant 1$. В этом случае эта функция, конечно, тоже является бигармонической в круге $\{|x| < 1\}$, имеет нулевой L_2-предел на граничной окружности $\{|x| = 1\}$, но условие (6) для неё не выполняется:

$$\int_{|x|<1} |\nabla u_0|^2 (1 - |x|)\,dx = \infty.$$

Достаточность условия (6) для существования L_2-предела на границе решения уравнения (7) при любом $m \geqslant 1$ содержится в следующей теореме.

Теорема 5. *Если решение $u(x)$ уравнения (7) удовлетворяет условию (6), то оно имеет L_2-предел на границе.*

Доказательство теоремы 5 вытекает из следующих далее (теоремы 6 и 7) необходимых и достаточных условий существования L_2-пределов на границе у решений уравнения (7). Теоремы 6 и 7 (а следовательно, и теорема 5) справедливы при любой размерности $n \geqslant 2$. Однако мы, чтобы не загромождать изложения, ограничимся формулировкой теорем 6 и 7 только в двумерном случае. Дело в том, что в формулировке (конечно, и в доказательстве) этих утверждений существенную роль играет громоздкое разложение в ряды Фурье по сферическим функциям, которое при $n = 2$ является разложением в обычные ряды Фурье по тригонометрическим функциям углового переменного.

Итак, пусть $n = 2$ и пусть $u(x) = u(x_1, x_2) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = u(r, \varphi)$, $0 \leqslant r < 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, есть решение уравнения (7).

В пространстве $L_2(0, 2\pi)$ рассмотрим при любом целом $N \geqslant 1$ проекционный оператор P_N, действующий на произвольную принадлежащую $L_2(0, 2\pi)$ функцию

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi)$$

следующим образом:

$$(P_N(f))(\varphi) = \sum_{k=N}^{2N}(a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi), \quad \|P_N f\|_{L_2(0,2\pi)} \leqslant \|f\|_{L_2(0,2\pi)}.$$

Аналогично, в пространстве $W_2^{-1}(0, 2\pi)$, которое можно рассматривать как множество обобщённых функций

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi),$$

полученное в результате пополнения $L_2(0, 2\pi)$ по норме

$$\|f\|_{W_2^{-1}(0,2\pi)} = \left(\frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^2 + b_k^2}{k^2}\right)^{1/2},$$

рассмотрим при любом $h \neq 0$ оператор

$$(T_h f)(\varphi) = \frac{f(\varphi + h) - 2f(\varphi) + f(\varphi - h)}{2h}.$$

Можно проверить, что для всех $h \in \mathbb{R}^1$ и всех $f(\varphi) \in L_2(0, 2\pi)$ имеет место неравенство

$$\|T_h f\| \leqslant \|f\|_{L_2(0,2\pi)}$$

(рассматриваемый же в $L_2(0, 2\pi)$ этот оператор, будучи ограниченным для каждого $h \in (0, 1)$, не является ограниченным в совокупности по $h \in (0, 1)$: его норма в этом случае неограниченно возрастает при $h \to 0$).

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 6. *Пусть $u(x)$, $|x| < 1$ — решение уравнения* (7) (*при* $n = 2$ $u(x) = u(x_1, x_2) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = u(r, \varphi)$). *Для существования L_2-предела на границе функции $u(x)$ необходимо и достаточно, чтобы эта функция удовлетворяла условию* (5), *то есть была L_2-ограниченной, и удовлетворяла условию*

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{r<1}\|P_N u(r, \,\cdot\,)\|_{L_2(0,2\pi)} = 0.$$

Теорема 7. *Пусть $u(x)$, $|x| < 1$ — решение уравнения* (7) (*при* $n = 2$ $u(x) = u(x_1, x_2) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = u(r, \varphi)$). *Для существования L_2-предела* *на границе функции $u(x)$ необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию (5), то есть была L_2-ограниченной, и удовлетворяла условию*

$$\lim_{h\to 0}\sup_{r<1}\|T_h u(r,\,\cdot\,)\|_{W_2^{-1}(0,2\pi)}=0.$$

Для решений уравнения (8) (и уравнения (9)) в полосе Π справедливы теоремы, аналогичные теоремам 6 и 7.

Обозначим через P_N при произвольном $N>0$ проекционный оператор в пространстве $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$, действующий по следующему правилу. Для любой функции $f(x')=f(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})\in L_2(\mathbb{R}^{n-1})$, преобразование Фурье которой

$$\tilde f(\xi')=(Ff)(\xi')=(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x')e^{i(x',\xi')}dx',\quad \xi'\in\mathbb{R}^{n-1},$$

функция $(P_Nf)(x')$ определяется следующим образом:

$$(P_Nf)(x')=(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}\int_{N<|\xi'|<2N}\tilde f(\xi')e^{-i(x',\xi')}d\xi',\quad x'\in\mathbb{R}^{n-1},$$

то есть

$$P_N=F^{-1}\zeta_NF,$$

где оператор ζ_N есть оператор умножения на характеристическую функцию множества $\{N<|\xi'|<2N\}$:

$$\|P_Nf\|_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})}\leqslant\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

В гильбертовом пространстве $W_2^{-1}(\mathbb{R}^{n-1})$, норму в котором можно задать равенством

$$\|f\|_{W_2^{-1}(\mathbb{R}^{n-1})}=\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{|\tilde f(\xi')|^2}{1+|\xi'|^2}d\xi'\right)^{1/2},$$

определим для произвольного $(n-1)$-мерного вектора $h'=(h_1,h_2,\ldots,h_{n-1})$, $|h'|\neq 0$, оператор

$$(T_{h'}f)(x')=\frac{f(x'+h')-2f(x')+f(x'-h')}{2|h'|}.$$

Можно проверить, что для всех $h'\in\mathbb{R}^{n-1}$ и всех $f\in L_2(\mathbb{R}^{n-1})$

$$\|T_{h'}f\|_{W_2^{-1}(\mathbb{R}^{n-1})}\leqslant\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 8. *Для того чтобы решение $u(x)$ уравнения (8) имело L_2-предел на границе, необходимо и достаточно, чтобы оно было L_2-ограниченным*

$$\sup_{0<\delta\leqslant\delta_0}\int_{x_n=\delta}u^2(x',x_n)dx'<\infty$$

и чтобы выполнялось условие

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{0<x_n\leqslant\delta_0}\|P_N u(\,\cdot\,,x_n)\|_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})}=0.$$

Теорема 9. *Для того чтобы решение $u(x)$ уравнения (8) имело L_2-предел на границе, необходимо и достаточно, чтобы оно было L_2-ограниченным*

$$\sup_{0<\delta\leqslant\delta_0}\int_{x_n=\delta}u^2(x',x_n)\,dx'<\infty$$

и чтобы выполнялось условие

$$\lim_{|h'|\to 0}\sup_{0<x_n\leqslant\delta_0}\|T_{h'}u(\,\cdot\,,x_n)\|_{W_2^{-1}(\mathbb{R}^{n-1})}=0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 01–01–00988-а) и гранта президента РФ для поддержки ведущих научных школ (НШ–1542.2003.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *В. П. Михайлов*, “О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка” // *Диффер. уравн.*, 1976. Т. 12, № 10. С. 1877–1891. [*V. P. Mikhailov*, “The Dirichlet problem for a second order elliptic equation” // *Differ. Uravn.*, 1976. Vol. 12, no. 10. Pp. 1877–1891].
2. *В. П. Михайлов*, “О граничных значениях решений эллиптических уравнений второго порядка” // *Матем. сб.*, 1976. Т. 100(142), № 1(5). С. 5–13; англ. пер.: *V. P. Mikhailov*, “On the boundary values of solutions of second-order elliptic equations” // *Math. USSR-Sb.*, 1976. Vol. 29, no. 1. Pp. 3–11.
3. *А. К. Гущин*, “О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка” // *Матем. сб.*, 1988. Т. 137(179), № 1(9). С. 19–64; англ. пер.: *A. K. Gushchin*, “On the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation” // *Math. USSR-Sb.*, 1990. Vol. 65, no. 1. Pp. 19–66.
4. *А. К. Гущин, В. П. Михайлов*, “О непрерывности решений одного класса нелокальных задач для эллиптического уравнения” // *Матем. сб.*, 1995. Т. 186, № 2. С. 37–58; англ. пер.: *A. K. Gushchin, V. P. Mikhailov*, “On the continuity of the solutions of a class of non-local problems for an elliptic equation” // *Sb. Math.*, 1995. Vol. 186, no. 2. Pp. 197–219.
5. *А. К. Гущин, В. П. Михайлов*, “О существовании граничных значений у решений эллиптических уравнений” // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучная серия*, 2008. № 8/1(67). С. 61–75. [*A. K. Gushchin, V. P. Mikhailov*, “On the existence of boundary values of solutions of elliptic equations” // *Vestn. SamGU. Yestestvennonauchnaya seriya*, 2008. no. 8/1(67). Pp. 61–75].
6. *А. К. Гущин, В. П. Михайлов*, “Внутренние оценки обобщенных решений эллиптического уравнения второго порядка” // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучная серия*, 2008. № 8/1(67). С. 76–94. [*A. K. Gushchin, V. P. Mikhailov*, “Internal estimates of general solutions of second order elliptic equation” // *Vestn. SamGU. Yestestvennonauchnaya seriya*, 2008. no. 8/1(67). Pp. 76–94].
7. *А. К. Гущин, В. П. Михайлов*, “О существовании граничных значений решений эллиптического уравнения” // *Матем. сб.*, 1991. Т. 182, № 6. С. 787–810; англ. пер.: *A. K. Gushchin, V. P. Mikhailov*, “On the existence of boundary values of solutions of an elliptic equation” // *Math. USSR-Sb.*, 1992. Vol. 73, no. 1. Pp. 171–194.
8. *А. К. Гущин, В. П. Михайлов*, “О граничных значениях в L_p, $p>1$, решений эллиптических уравнений” // *Матем. сб.*, 1979. Т. 108(150), № 1. С. 3–21; англ. пер.: *A. K. Gushchin, V. P. Mikhailov*, “On boundary values in L_p, $p>1$, of solutions of elliptic equations” // *Math. USSR-Sb.*, 1980. Vol. 36, no. 1. Pp. 1–19.

9. *В. П. Михайлов*, “Об одном достаточном условии существования предельных значений полигармонических функций на границе области” / В сб.: *Дифференциальные уравнения и их приложения*: Труды второго Международного семинара. Самара, 1998. С. 115–121. [*V. P. Mikhailov*, “On one sufficient condition of the existence of limit values of polyharmonics functions on the boundary” / In: *Differential equations and their applications*: Proceedings of the Second International Seminar. Samara, 1998. Pp. 115–121].
10. *В. П. Михайлов*, “О существовании граничных значений у метагармонических функций” // *Матем. сб.*, 1999. Т. 190, № 10. С. 17–48; англ. пер.: *V. P. Mikhailov*, “Existence of boundary values for metaharmonic functions” // *Sb. Math.*, 1999. Vol. 190, no. 10. Pp. 1417–1448.
11. *А. К. Гущин*, “L_p-оценки некасательной максимальной функции для решений эллиптического уравнения второго порядка” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 1(30). С. 53–69. [*A. K. Gushchin*, “L_p-estimates of the nontangential maximal function for solutions a second-order elliptic equation” // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2013. no. 1(30). Pp. 53–69].
12. *F. Riesz*, “Über die Randwerte einer analytischen Funktion” // *Math. Z.*, 1923. Vol. 18. Pp. 87–95.
13. *J. E. Littlewood, R. E. A. C. Paley*, “Theorems on Fourier Series and Power Series” // *J. London Math. Soc.*, 1931. Vol. 6, no. 3. Pp. 230–233.
14. *J. E. Littlewood, R. E. A. C. Paley*, “Theorems on Fourier Series and Power Series (II)” // *Proc. London Math. Soc.*, 1937. Vol. 42, no. 1. Pp. 52–89.
15. *J. E. Littlewood, R. E. A. C. Paley*, “Theorems on Fourier Series and Power Series (III)” // *Proc. London Math. Soc.*, 1938. Vol. 43, no. 2. Pp. 105–126.
16. *J. Marcinkiewicz, A. Zygmund*, “A theorem of Lusin. Part I” // *Duke Math. J.*, 1938. Vol. 4, no. 3. Pp. 473–485.

Поступила в редакцию 25/X/2012;
в окончательном варианте — 17/I/2013.

MSC: 35J67; 35J25, 35B30, 35B45

ON THE EXISTENCE OF BOUNDARY VALUES OF SOLUTIONS OF ELLIPTIC EQUATIONS

V. P. Mikhailov

Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences,
8, Gubkina st., Moscow, 119991, Russia.

E-mail: vpmih@mi.ras.ru

In the paper we show a survey of results related to the existence of boundary values of solutions of elliptic equations.

Key words: *elliptic equations, classical and generalized solutions, limits of boundary values, existence theorems.*

Original article submitted 25/X/2012;
revision submitted 17/I/2013.

Valentin P. Mikhailov (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Leading Researcher, Dept. of Mathematical Physics.