УДК 517.958:533.723

К ПРОБЛЕМЕ НЕСУЩЕСТВОВАНИЯ ДИССИПАТИВНОЙ ОЦЕНКИ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Е. В. Радкевич

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Россия, 119899, Москва, Воробьёвы горы.

E-mail: evrad07@gmail.com

Для дискретных уравнений кинетики доказано существование глобального решения в пространствах Соболева, получено разложение его по суммируемости, исследовано влияние осцилляций, порождаемых оператором взаимодействия. Доказано существование подмногообразия $\mathcal{M}_{diss}$ начальных данных (u^0, v^0, w^0), для которых существует диссипативное решение. Показано, что при отклонении начальных данных (u^0, v^0, w^0) от подмногообразия $\mathcal{M}_{diss}$ оператор взаимодействия порождает недиссипативную часть решения — солитоны (бегущие волны). Амплитуда солитонов пропорциональна расстоянию от (u^0, v^0, w^0) до подмногообразия $\mathcal{M}_{diss}$. Отсюда следует стабилизация решений при $t \to \infty$ только на любом компакте пространственных переменных.

Ключевые слова: *диссипативные оценки, дискретные кинетические уравнения.*

1. Введение. В этой статье мы продолжим исследование [1] проблемы несуществования диссипативной оценки Коши для дискретных кинетических уравнений (модели типа Бродуэлла [2] газовой динамики с конечным числом различных скоростей частиц и конечным числом разных парных взаимодействий):

$$\partial_t n_i + (\omega_{ix}\partial_x + \omega_{iy}\partial_y + \omega_{iz}\partial_z) n_i = \\ = \sum_{k,l,j;k\neq i,l\neq i,j\neq i} \sigma_{kl}^{ij}(n_k n_l - n_i n_j), \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad (1)$$

поставленной в 1974 г. в [3]. Общим для таких систем с кинетическим уравнением Больцмана является выполнение уравнения неразрывности

$$\partial_t\Bigl(\sum_{j=1}^{N} n_j\Bigr) + \partial_x \sum_{j=1}^{N} (\omega_{jx}\partial_x + \omega_{jy}\partial_y + \omega_{jz}\partial_z) n_j = 0,$$

сохранение импульса и справедливость H-теоремы Больцмана [4–6]

$$\partial_t(n_i \ln n_i) + (\omega_{ix}\partial_x + \omega_{iy}\partial_y + \omega_{iz}\partial_z)(n_i \ln n_i) = \\ = \sum_{k,l,j;k\neq i,l\neq i,j\neq i} \sigma_{kl}^{ij} \ln\Bigl(\frac{n_i n_j}{n_l n_k}\Bigr)(n_k n_l - n_i n_j).$$

Евгений Владимирович Радкевич (д.ф.-м.н., проф.), профессор, отделение математики, каф. дифференциальных уравнений.

Отличие состоит в том, что *не сохраняется энергия и нет диссипативной оценки.* В этой статье мы постараемся выяснить причину отсутствия *диссипативной оценки* для одномерной модели типа Бродуэлла (см. [3]). Доказательство переносится на двумерную и трёхмерную модели в [3]. Рассмотрим задачу Коши:

$$\partial_t u + \partial_x u = \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uw),\ \partial_t v = -\frac{2}{\varepsilon}(v^2 - uw),\ \partial_t w - \partial_x w = \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uw); \tag{2}$$
$$v(0) = v^0, \quad u(0) = u^0, \quad w(0) = w^0,$$

на прямой $x \in \mathbb{R}$ для $t > 0$. Система (2) является кинетическим уравнением Больцмана модельного одномерного газа [4], состоящего из частиц со скоростями $c = 1,\ 0,\ -1$ (их плотности соответственно $u = n_1(x,t)$, $v = n_2(x,t)$, $w = n_3(x,t)$).

2. Малые возмущения. В окрестности состояния равновесия $v_e^2 = u_e w_e$ решение будем искать в виде

$$u = u_e + \varepsilon^2 u_e^{1/2}\overline{u}, \quad v = v_e + \varepsilon^2 v_e^{1/2}\overline{v}, \quad w = w_e + \varepsilon^2 w_e^{1/2}\overline{w}.$$

Тогда система запишется следующим образом:

$$\partial_t \widehat{U} + A\partial_x \widehat{U} + \frac{1}{\varepsilon}B\widehat{U} = \varepsilon\nu^{1/2}\Gamma(\widehat{U},\widehat{U}), \tag{3}$$
$$\overline{U}(0) = U^0$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} w_e & -2\sqrt{w_e v_e} & v_e \\ -2\sqrt{w_e v_e} & 4v_e & -2\sqrt{u_e v_e} \\ v_e & -2\sqrt{u_e v_e} & u_e \end{pmatrix},$$
$$\nu^{1/2} = \begin{pmatrix} w_e^{1/2} \\ -2v_e^{1/2} \\ u_e^{1/2} \end{pmatrix}, \quad \Gamma(U,U) = \widehat{v}^2 - \widehat{u}\widehat{w}, \quad \widehat{U} = (\widehat{u},\widehat{v},\widehat{w})^\top.$$

Положим $L_e = u_e + w_e + 4v_e$.

Определение. В дальнейшем равномерно стабилизирующееся к нулю решение будем называть *диссипативным.* Решения, стабилизирующееся на любом компакте, будем называть *компактно-диссипативным.* К таким решениям можно отнести решения, состоящие из двух частей: диссипативной и суммы солитонов (бегущих волн).

Теорема 1. *Пусть начальные данные* (u^0, v^0, w^0) *удовлетворяют соотношениям*

$$w_e^{1/2}\Big(\partial_x + \frac{1}{\varepsilon}L_e\Big)w_0 + \frac{1}{2}v_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}L_e v_0 = 0,$$
$$u_e^{1/2}\Big(-\partial_x + \frac{1}{\varepsilon}L_e\Big)u_0 + \frac{1}{2}v_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}L_e v_0 = 0.$$

Тогда существуют постоянные $a_{e,\sigma}$ и $\mu_0 \in (0,1)$, не зависящие от ε, что для $v^0 \in H^{2\sigma}(\mathbb{R})$, $\sigma > 1/2$ такого, что норма $\|v^0\|_{H^{2\sigma}(\mathbb{R})} \leqslant a_{e,\sigma}$, существует глобальное решение задачи Коши для системы (3), $(u,v,w) \in \left(W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; H^\sigma(\mathbb{R}))\right)^3$, *для $\gamma = \mu_0\varepsilon$. Здесь норма $f \in H^\sigma(\mathbb{R})$ определяется преобразованием Фурье $\widetilde{f}(\xi)$:*

$$\|f\|^2_{H^\sigma(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\xi|)^{2\sigma} |\widetilde{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Норма

$$\|U\|^2_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;(H^\sigma(\mathbb{R}))^3)} = \int_0^\infty e^{2\gamma t} \left(\|\partial_t U\|^2_{(H^\sigma(\mathbb{R}))^3}(t) + \|U\|^2_{(H^\sigma(\mathbb{R}))^3}(t)\right) dt.$$

Доказательство теоремы 1 мы приведем ниже.

Множество начальных данных (u^0, v^0, w^0), для которых существует диссипативное решение, будем называть подмногообразием диссипативности $\mathcal{M}_{diss}$. Как мы покажем ниже, оператор взаимодействия при отклонении начальных данных $(u^0,\ v^0,\ w^0)$ от подмногообразия $\mathcal{M}_{diss}$ порождает недиссипативную часть решения — солитоны (бугущие волны). Амплитуда солитонов пропорциональна расстоянию от $(u^0,\ v^0,\ w^0)$ до подмногообразия $\mathcal{M}_{diss}$. Отсюда следует стабилизация решений при $t \to \infty$ только на любом компакте (отсутствие диссипативной оценки на всей прямой $x \in \mathbb{R}$). Все полученные результаты переносятся на двумерную и трёхмерную модели (1), приведённые в [3].

3. Сведение к одному уравнению. Следуя [1], в образах Фурье по x:

$$\widehat{U}(t,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \widetilde{U}(t,x) dx$$

систему (3) сводим к системе ОДУ

$$\begin{aligned}
&u_e^{1/2}\Big(\frac{d}{dt} + i\xi\Big)\widetilde{u}(t,\xi) + \frac{1}{\varepsilon}\Big(w_e u_e^{1/2}\widetilde{u}(t,\xi) + u_e w_e^{1/2}\widetilde{w}(t,\xi) - 2v_e v_e^{1/2}\widetilde{v}(t,\xi)\Big) = \\
&\qquad = \varepsilon v_e \int_{-\infty}^{\infty} (\widetilde{v}(t,\xi-\eta)\widetilde{v}(t,\eta) - \widetilde{u}(t,\xi-\eta)\widetilde{w}(t,\eta))d\eta, \\
&w_e^{1/2}\Big(\frac{d}{dt} - i\xi\Big)\widetilde{w}(t,\xi) + \frac{1}{\varepsilon}\Big(w_e u_e^{1/2}\widetilde{u}(t,\xi) + u_e w_e^{1/2}\widetilde{w}(t,\xi) - 2v_e v_e^{1/2}\widetilde{v}(t,\xi)\Big) = \\
&\qquad = \varepsilon v_e \int_{-\infty}^{\infty} (\widetilde{v}(t,\xi-\eta)\widetilde{v}(t,\eta) - \widetilde{u}(t,\xi-\eta)\widetilde{w}(t,\eta))d\eta, \\
&-\frac{1}{2}v_e^{1/2}\frac{d}{dt}\widetilde{v}(t,\xi) + \frac{1}{\varepsilon}\Big(w_e u_e^{1/2}\widetilde{u}(t,\xi) + u_e w_e^{1/2}\widetilde{w}(t,\xi) - 2v_e v_e^{1/2}\widetilde{v}(t,\xi)\Big) = \\
&\qquad = \varepsilon v_e \int_{-\infty}^{\infty} (\widetilde{v}(t,\xi-\eta)\widetilde{v}(t,\eta) - \widetilde{u}(t,\xi-\eta)\widetilde{w}(t,\eta))d\eta.
\end{aligned} \tag{4}$$

Как обычно (см. [1]), используя два закона сохранения (законов сохранения для импульса и уравнения неразрывности) для системы (4), понизим порядок системы, сведя её к двум уравнениям состояния

$$\widetilde{u}(t,\xi) = \frac{1}{u_e^{1/2}} D^-(\xi) e^{-i\xi t} - \frac{1}{2}\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\Big(e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} v^0(\xi) + y(t,\xi) - \\ - i\xi \int_0^t e^{-i\xi(t-s)} y(s,\xi) ds + i\xi v^0(\xi) \int_t^\infty e^{-i\xi(t-s)} e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s} ds \Big),$$

$$\widetilde{w}(t,\xi) = \frac{1}{w_e^{1/2}} D^+(\xi) e^{i\xi t} - \frac{1}{2}\frac{v_e^{1/2}}{w_e^{1/2}}\Big(e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} v^0(\xi) + y(t,\xi) + \\ + i\xi \int_0^t e^{i\xi(t-s)} y(s,\xi) ds - i\xi v^0(\xi) \int_t^\infty e^{i\xi(t-s)} e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s} ds \Big)$$

для

$$\widetilde{v}(t,\xi) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} \widetilde{v}^0(\xi) + y(t,\xi)$$

и одному уравнению для $y(t,\xi)$ вида

$$T_\xi y(t,\xi) = \frac{1}{\varepsilon} h(t,\xi) + H(t,\xi) + 2\varepsilon v_e^{1/2} B(y,y) + 2\varepsilon v_e^{1/2} L(y) + \\ + \frac{2}{\varepsilon}\Big[\frac{w_e}{v_e^{1/2}} D^-(\xi) e^{-i\xi t} + \frac{u_e}{v_e^{1/2}} D^+(\xi) e^{i\xi t} - \\ - \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} D^-(\xi-\eta) D^+(\eta) e^{-i(\xi-2\eta)t} d\eta \Big], \quad (5)$$

с условием $y(0,\xi) = 0$, где

$$T_\xi y(t,\xi) = \frac{d}{dt} y(t,\xi) + \frac{1}{\varepsilon} L_e y(t,\xi) + i\xi \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (u_e e^{i\xi(t-s)} - w_e e^{-i\xi(t-s)}) y(s,\xi) ds,$$

$$B(y,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{ y(t,\xi-\eta) y(t,\eta) - \\ - \frac{1}{4}\Big(y(t,\xi-\eta) - i(\xi-\eta) \int_0^t e^{-i(\xi-\eta)(t-s)} y(s,\xi-\eta) ds \Big) \times \\ \times \Big(y(t,\eta) + i\eta \int_0^t e^{i\eta(t-s)} y(s,\eta) ds \Big) \Big\} d\eta,$$

$$h(t,\xi) = i\xi \widetilde{v}^0(\xi) \int_t^\infty (u_e e^{i\xi(t-s)} - w_e e^{-i\xi(t-s)}) e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} ds,$$

$$H(t,\xi) = 2\varepsilon v_e^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{ e^{-2\frac{1}{\varepsilon}L_e t} \widetilde{v}^0(\xi-\eta) \widetilde{v}^0(\eta) + \\ + \frac{1}{2} D^-(\xi-\eta) e^{-i(\xi-\eta)t} \Big[e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} v^0(\eta) - i\eta v^0(\eta) \int_t^\infty e^{i\eta(t-s)} e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s} ds \Big] + \\ + \frac{1}{2}\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \Big[i(\xi-\eta) v^0(\xi-\eta) \int_t^\infty e^{-i(\xi-\eta)(t-s)} e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s} ds + e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} v^0(\xi-\eta) \Big] \times$$

$$\times\left(\frac{1}{w_e^{1/2}}D^+(\eta)e^{i\eta\, t}-\frac{1}{2}\frac{v_e^{1/2}}{w_e^{1/2}}\left[e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}v^0(\eta)-i\eta v^0(\eta)\int_t^\infty e^{i\eta(t-s)}e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s}ds\right]\right)\Bigg\}d\eta,$$

$$L(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\Bigg\{e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}\big(\widetilde{v}^0(\xi-\eta)y(t,\eta)+y(t,\xi-\eta)\widetilde{v}^0(\eta)\big)+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{v_e^{1/2}}{w_e^{1/2}}\left(\frac{1}{u_e^{1/2}}D^-(\xi-\eta)e^{-i(\xi-\eta)t}-\frac{1}{2}\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\times\right.$$
$$\left.\times\left[i(\xi-\eta)v^0(\xi-\eta)\int_t^\infty e^{-i(\xi-\eta)(t-s)}e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s}ds+e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}v^0(\xi-\eta)\right]\right)\times$$
$$\times\left(y(t,\eta)+i\eta\int_0^t e^{i\eta\,(t-s)}y(s,\eta)ds\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\left(y(t,\xi-\eta)-i\xi\int_0^t e^{-i(\xi-\eta)(t-s)}y(s,\xi-\eta)ds\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{w_e^{1/2}}D^+(\eta)e^{i\eta\, t}-\frac{1}{2}\frac{v_e^{1/2}}{w_e^{1/2}}\left[e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}v^0(\eta)-i\eta v^0(\eta)\int_t^\infty e^{i\eta(t-s)}e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s}ds\right]\right)\Bigg\}d\eta.$$

Здесь

$$D^-(\xi)=u_e^{1/2}d^-(\xi)+i\xi\frac{1}{2}v_e^{1/2}v^0(\xi)\int_0^\infty e^{i\xi s}e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s}ds,$$
$$D^+(\xi)=w_e^{1/2}d^+(\xi)-i\xi\frac{1}{2}v_e^{1/2}v^0(\xi)\int_0^\infty e^{-i\xi s}e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s}ds,$$

где

$$d^-(\xi)=u^0(\xi)+\frac{1}{2}\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v^0(\xi),\quad d^+(\xi)=w^0(\xi)+\frac{1}{2}\frac{v_e^{1/2}}{w_e^{1/2}}v^0(\xi).$$

По аналогии с [1] мы рассмотрим три типа глобальных решений.

1) Диссипативные решения выделим условием на начальные данные

$$D^-(\xi)=D^+(\xi)=0,\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^1.$$

Как мы покажем ниже, здесь в согласии с приведённым выше определением решение равномерно стабилизируется к нулю. Тогда уравнение для функции $y(t,\xi)$:

$$T_\xi y(t,\xi)=\frac{1}{\varepsilon}h(\xi)+H(t,\xi)+2\varepsilon v_e^{1/2}B(y,y)+2\varepsilon v_e^{1/2}L(y)+y(0,\xi)=0,$$

те же $B(y,y)$, $h(t,\xi)$, $H(t,\xi)$ и $L(y)$. Здесь, так же как в [1], решение $y(t,\xi)$ будем искать в виде

$$y(t,\xi)=T_\xi^{-1}(Y(t,\xi)).$$

Таким образом, неизвестной будет функция $Y(t,\xi)\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ весового гильбертового пространства с нормой

$$\|Y\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)}=\int_0^\infty e^{2\gamma t}|Y(t,\xi)|^2dt.$$

Существование и свойства обратного оператора T_ξ^{-1} мы исследуем ниже, в п. «Интегро-дифференциальные операторы с трансляцией».

2) Исследование проблемы существования глобального решения задачи Коши для возмущений (3) абсолютно равновесного состояния (см. [1]) показало, что для комплекснозначных начальных данных трудности связаны с появлением секулярного члена

$$S(t,\xi) = -2\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} D^-(\xi-\eta)D^+(\eta)e^{-i(\xi-2\eta)t}d\eta \tag{6}$$

в (5), порождаемого оператором взаимодействия. В x-представлении получим

$$\mathcal{S}(t,x) = -2\varepsilon\mathcal{D}^-(x-t)\mathcal{D}^+(x+t),$$

где $\widetilde{\mathcal{S}}(t,\xi) = S(t,\xi)$, $\widetilde{\mathcal{D}^\pm}(\xi) = D^\pm(\xi)$ — преобразования Фурье по x. Таким образом, мы имеем мультипликативный эффект оператора взаимодействия, в отличие от аддитивного эффекта оператора взаимодействия для комплексификации

$$\begin{aligned} &\partial_t\widehat{U} + A\partial_x\widehat{U} + \frac{1}{\varepsilon}B\widehat{U} = \varepsilon\nu^{\frac{1}{2}}\operatorname{Re}\Gamma(\widehat{U},\widehat{U}),\\ &\overline{U}(0) = U^0 \end{aligned} \tag{7}$$

системы (3). Переход к комплексификации (7), как показано в [1], упрощает (6):

$$S_M(t,\xi) = \varepsilon e^{-i\xi t}\int_{-\infty}^{\infty} D^-(\xi-\eta)\overline{D^+(\eta)}d\eta + \varepsilon e^{i\xi t}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{D^-(\xi-\eta)}D^+(\eta)d\eta,$$

в x-представлении —

$$\mathcal{S}_M(t,x) = -\varepsilon(\mathcal{K}^-(x-t) + \mathcal{K}^+(x+t)).$$

Здесь

$$\widetilde{\mathcal{S}_M}(t,\xi) = S_M(t,\xi), \quad \widetilde{\mathcal{K}^-}(t,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} D^-(\xi-\eta)\overline{D^+}(\eta)d\eta,$$

$$\widetilde{\mathcal{K}^+}(t,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\overline{D^-}(\xi-\eta)D^+(\eta)d\eta$$

— преобразования Фурье по x. Существование глобального вещественнозначного решения задачи Коши для системы (3) (см. [1]) следует из существования глобального вещественнозначного решение задачи Коши для комплексификации, что позволяет доказать [1] следующий результат.

Теорема 2. *Пусть вещественнозначные начальные данные* $(u^0, v^0, w^0) \in H^{3\sigma}(\mathbb{R})$ *для* $\sigma > 1/2$. *Существуют постоянные* $k_{e,\sigma} > 0$, $\mu_0 \in (0,1)$, *не зависящие от* ε, *такие, что при*

$$k_{e,\sigma}(\|u^0\|_{H^{3\sigma}(\mathbb{R})} + \|v^0\|_{H^{3\sigma}(\mathbb{R})} + \|w^0\|_{H^{3\sigma}(\mathbb{R})}) < \sqrt{\varepsilon}$$

существует глобальное решение $(u(t,x),\ v(t,x),\ w(t,x))$ *системы* (3) *такое, что*

$$u(t,x)-\frac{1}{u_e^{1/2}}D^-(x-t)+\varepsilon\frac{1}{v_e^{1/2}}\Phi_-(x-t)\in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;H^\sigma(\mathbb{R})),$$
$$w(t,x)-\frac{1}{w_e^{1/2}}D^+(x+t)+\varepsilon\frac{1}{v_e^{1/2}}\Phi_+(x+t)\in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;H^\sigma(\mathbb{R})),$$
$$v(t,x)\in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;H^\sigma(\mathbb{R})),\ \ \gamma=\mu_0\varepsilon,$$

где

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{\varepsilon}L_e-\partial_x\Big)D^-(x)&=u_e^{1/2}\Big(\frac{1}{\varepsilon}L_e-\partial_x\Big)u^0(x)+\frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}L_ev^0(x),\\ \Big(\frac{1}{\varepsilon}L_e+\partial_x\Big)D^+(x)&=w_e^{1/2}\Big(\frac{1}{\varepsilon}L_e+\partial_x\Big)w^0(x)+\frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}L_ev^0(x);\end{aligned}\tag{8}$$

$$\Phi_+(x)=\frac{1}{\varepsilon}G^+(x)-\frac{1}{2}\varepsilon^3\frac{1}{v_e^{3/2}}\Phi_-(x)\Phi_+(x),$$
$$\Phi_-(x)=\frac{1}{\varepsilon}G^-(x)-\frac{1}{2}\varepsilon^3\frac{1}{v_e^{3/2}}\Phi_-(x)\Phi_+(x);$$
$$G^+(x)=2\frac{u_e}{v_e^{1/2}}D^+(x)-\varepsilon^2D^-(x)D^+(x),$$
$$G^-(x)=2\frac{w_e}{v_e^{1/2}}D^-(x)-\varepsilon^2D^-(x)D^+(x)$$

для почти всех $x\in\mathbb{R}$. *Функции* $\Phi_\pm$ *определяются условиями несекулярности для оператора взаимодействия* (*нелинейной части в* (3)).

Здесь, в согласии с приведённым выше определением, мы имеем решение компактно-диссипативного типа, которое состоит из суммы солитонов и диссипативной части. Профиль солитонов восстанавливается уравнениями (8) по начальным данным $(u^0,\ v^0,\ w^0)$. Равенство нулю правых частей в (8) отвечает условиям теоремы 1.

Таким образом, для вещественных начальных данных в целом вклад оператора взаимодействия — аддитивный, порождается появлением солитонов при отклонении начальных данных $(u^0,\ v^0,\ w^0)$ от подмногообразия $\mathcal{M}_{diss}$ начальных данных, для которых есть диссипативное решение. Амплитуда солитонов пропорциональна расстоянию от $(u^0,\ v^0,\ w^0)$ до подмногообразия $\mathcal{M}_{diss}$. Отсюда следует стабилизация вещественных решений (3) при $t\to\infty$ только на любом компакте (отсутствие диссипативной оценки на всей прямой).

3) В общем случае (комплекснозначных начальных данных), как мы отмечали выше, трудности исследования связаны с секулярным членом (6). Здесь справедлив следующий результат.

Теорема 3. *Пусть комплекснозначные начальные данные* $u^0,\ v^0,\ w^0\in H^{1+3\sigma}(\mathbb{R})$ *для* $\sigma>1/2$. *Существуют постоянные* $k_{e,\sigma}>0$, $\mu_0\in(0,1)$, *не зависящие от* ε, *такие, что при*

$$k_{e,\sigma}(\|u^0\|_{H^{1+3\sigma}(\mathbb{R})}+\|v^0\|_{H^{1+3\sigma}(\mathbb{R})}+\|w^0\|_{H^{1+3\sigma}(\mathbb{R})})<\sqrt{\varepsilon}$$

существует глобальное решение $(u(t,x), v(t,x), w(t,x))$ *системы* (3) *такое, что*

$$u(t,x) - \mathcal{D}_u^-(x-t) - \mathcal{H}_u(x-t, x+t) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; H^\sigma(\mathbb{R})),$$
$$w(t,x) - \mathcal{D}_w^+(x+t) - \mathcal{H}_w(x-t, x+t) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; H^\sigma(\mathbb{R})),$$
$$v(t,x) - \mathcal{D}_v^+(x+t) - \mathcal{D}_v^-(x-t) - \mathcal{H}_v(x-t, x+t) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; H^\sigma(\mathbb{R})),$$

где $\gamma = \mu_0\varepsilon$; $\mathcal{D}_u^-(x)$, $\mathcal{D}_w^+(x)$, $\mathcal{D}_v^\pm(x) \in H^{2\sigma}(\mathbb{R})$; $\mathcal{H}_u(x,y)$, $\mathcal{H}_w(x,y)$, $\mathcal{H}_v(x,y) \in H^{2\sigma,1+2\sigma}(\mathbb{R}^2) \cup H^{1+2\sigma,2\sigma}(\mathbb{R}^2)$ *и функции* $\mathcal{H}_u(x-t, x+t)$, $\mathcal{H}_w(x-t, x+t)$, $\mathcal{H}_v(x-t, x+t)$ — *конечные суммы произведения солитонов. Отсюда следует стабилизация решений при* $t \to \infty$ *только на любом компакте.*

Таким образом, в случае комплекснозначных начальных данных в целом вклад оператора взаимодействия — мультипликативный, порождается появлением солитонов и дисперсионной части.

4. Интегро-дифференциальные операторы с трансляцией. Теперь исследуем интегро-дифференциальный оператор с трансляцией

$$T\mathcal{Y}(t,x) = \partial_t \mathcal{Y}(t,x) + \frac{1}{\varepsilon} L_e \mathcal{Y}(t,x) +$$
$$+ \partial_x \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \big[u_e \mathcal{Y}(t, x + (t-s)) - w_e \mathcal{Y}(t, x - (t-s)\big] ds, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

где

$$\mathcal{Y}(t,x) = F^{-1}_{\xi \to x} y,$$

т.е. $y(t,\xi)$ — преобразование Фурье по x функции $\mathcal{Y}(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; L_2(\mathbb{R}))$. В образах Фурье по x имеем

$$T_\xi y(t,\xi) = \frac{d}{dt} y(t,\xi) + \frac{1}{\varepsilon} L_e y(t,\xi) + i\xi \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (u_e e^{i\xi(t-s)} - w_e e^{-i\xi(t-s)}) y(s,\xi) ds.$$

Этот оператор, отметим, является линеаризацией уравнения (5). Чтобы получить оценки решения задачи Коши

$$T_\xi y(t,\xi) = f, \quad y(t,\xi)|_{t=0} = 0$$

в Соболевских нормах, приведём сначала широко известные факты, которые мы будем использовать в дальнейшем.

Определение 1. Назовём пространством Харди $H_2(\operatorname{Re} p > \gamma, H)$ класс вектор-функций $\widetilde{f(p)}$ со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H, голоморфных в полуплоскости $\{p \in C : \operatorname{Re} p > \gamma \geqslant 0\}$, для которых

$$\sup_{x>\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \|f\widetilde{(x+iy)}\|_H^2 dy < \infty, \quad p = x + iy.$$

Сформулируем теорему Пэли—Винера для пространств Харди.

Теорема 3 (Пэли—Винера).

1. *Пространство* $H_2(\operatorname{Re} p > \gamma, H)$ *совпадает с множеством вектор-функций (преобразований Лапласа), допускающих представление*

$$\widetilde{f(p)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{pt} f(t) dt \tag{9}$$

для $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, $p \in C$, $\operatorname{Re} p > \gamma \geqslant 0$.

2. *Для любой вектор-функции* $\widetilde{f(p)} \in H_2(\operatorname{Re} p > \gamma, H)$ *существует единственное представление* (9), *где вектор-функция* $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, *причём справедлива формула обращения*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{(\gamma+iy)t} \widetilde{f(\gamma+iy)} dy, \quad t \in \mathbb{R}_+,\ \gamma \geqslant 0.$$

3. *Для вектор-функций* $\widetilde{f(p)} \in H_2(\operatorname{Re} p > \gamma, H)$ *и* $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, *связанных соотношением* (9), *справедливо равенство*

$$\|\widetilde{f}\|^2_{H_2(\operatorname{Re} p>\gamma, H)} \equiv \sup_{x>\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\widetilde{f(x+iy)}\|^2_H dy =$$
$$= \int_0^\infty e^{-2\gamma t} \|f(t)\|^2_N dt \equiv \|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}.$$

Лемма 1. *Существуют постоянные* $a_0 > 0$, $\mu_0 \in (0,1)$ *такие, что для* $\gamma = \mu_0 \varepsilon$ *и любой функции* $f \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ *существует единственное решение* $y(t,\xi) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, $\xi \in \mathbb{R}$, *уравнения* $T_\xi y(t,\xi) = f$ *такое, что*

$$y(t,\xi)|_{t=0} = 0,$$

и равномерно по $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\Big\| \frac{d}{dt} y(t,\xi) \Big\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} + \|y(t,\xi)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} \leqslant a_0 \|f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)}.$$

Доказательство леммы 1 приведено в [1].

Лемма 2. *Функции* $T_\xi^{-1}(e^{\pm i\xi t}) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ *и существует* $a_0 > 0$ *такое, что равномерно по* $\xi \in \mathbb{R}$ *имеем*

$$\|T_\xi^{-1}(e^{\pm i\xi t})\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} \leqslant a_0.$$

Лемма 2а. *Функции*

$$J_1 = -i\xi \int_0^t e^{-i\xi(t-s)} T_\xi^{-1}(e^{i\xi s}) ds, \quad J_2 = i\xi \int_0^t e^{i\xi(t-s)} T_\xi^{-1}(e^{-i\xi s}) ds \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+),$$

и существует $a_0 > 0$ *такое, что равномерно по* $\xi \in \mathbb{R}$ *имеем*

$$\|J_1\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} + \|J_2\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} \leqslant a_0.$$

Например, рассмотрим J_1. *Доказательство* следует из равенства

$$-i\xi \int_0^t e^{-i\xi(t-s)} T_\xi^{-1}(e^{i\xi s})ds = -\int_0^t e^{-i\xi(t-s)} \frac{d}{ds} T_\xi^{-1}(e^{i\xi s})ds + T_\xi^{-1}(e^{i\xi t}) \quad (10)$$

и результатов лемм 1 и 2, в силу которых правая часть (10) принадлежит $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$.

5. Диссипативное решение. Вернёмся к исследованию диссипативного решения, определяемого уравнением

$$T_\xi y(t,\xi) = \frac{1}{\varepsilon} h(t,\xi) + H(t,\xi) + 2\varepsilon v_e^{1/2} B(y,y) + 2\varepsilon v_e^{1/2} L(y) + y(0,\xi) = 0. \quad (11)$$

Так же как в [1], решение $y(t,\xi)$ ищем в виде

$$y(t,\xi) = T_\xi^{-1}(Y(t,\xi)).$$

Тогда

$$\mathcal{B}(Y,Y) = B(T_\xi^{-1}(Y(t,\xi)), T_\xi^{-1}(Y(t,\xi))), \quad \mathcal{L}(Y) = L(T_\xi^{-1}(Y(t,\xi)))$$

и уравнение (11) сведётся к уравнению для $Y(t,\xi)$ в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$:

$$Y(t,\xi) = \frac{1}{\varepsilon} h(t,\xi) + H(t,\xi) + 2\varepsilon v_e^{1/2} \mathcal{B}(Y,Y) + 2\varepsilon v_e^{1/2} \mathcal{L}(Y). \quad (12)$$

6. Билинейные формы. Рассмотрим билинейную форму

$$B(y,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Bigg\{ y(t,\xi-\eta)y(t,\eta) - \\ - \frac{1}{4}\Bigg[\Bigg(y(t,\xi-\eta) - i(\xi-\eta)\int_0^t e^{-i(\xi-\eta)(t-s)} y(s,\xi-\eta)ds\Bigg)\times \\ \times \Bigg(y(t,\eta) + i\eta \int_0^t e^{i\eta(t-s)} y(s,\eta)ds\Bigg)\Bigg]\Bigg\} d\eta.$$

Заметим, что

$$y(t,\xi) \pm i\xi \int_0^t e^{\pm i\xi(t-s)} y(s,\xi)ds = \int_0^t e^{\pm i\xi(t-s)} \frac{d}{ds} y(s,\xi)ds.$$

Для $y = T_\xi^{-1}(Y(t,\xi))$ имеем

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}(Y,Y) &= B(T_\xi^{-1}(Y(t,\xi)), T_\xi^{-1}(Y(t,\xi))) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \biggl\{ T_{\xi-\eta}^{-1}(Y(t,\xi-\eta)) T_\eta^{-1}(Y(t,\eta)) - \frac{1}{4}\biggl[\biggl(T_{\xi-\eta}^{-1}(Y(t,\xi-\eta)) - \\
&\qquad - i(\xi-\eta)\int_0^t e^{-i(\xi-\eta)(t-s)} T_\eta^{-1}(\xi-\eta) Y(s,\xi-\eta)ds\biggr)\times \\
&\qquad\qquad \times \biggl(T_\eta^{-1}(Y(t,\eta)) + i\eta \int_0^t e^{i\eta(t-s)} T_\eta^{-1} Y(s,\eta)ds\biggr)\biggr]\biggr\} d\eta.
\end{aligned}
$$

Будем говорить, что $Y(t,\xi) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))$, если ограничена норма

$$
\|Y(t,\xi)\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))} = \int_0^\infty e^{2\gamma t} \int_\infty^\infty (1+|\xi|^2)^\sigma |Y(t,\xi)|^2 d\xi dt.
$$

Тогда для обратного преобразования Фурье по пространственной переменной

$$
\mathcal{Y}(t,x) = F^{-1}_{\xi\to x}(Y(t,\xi))
$$

имеем $\mathcal{Y}(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; H^\sigma(\mathbb{R}))$. Для $F(t,\xi) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))$ положим

$$
A_\sigma(F) = \|F\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))}.
$$

Теперь рассмотрим итерационную последовательность

$$
\begin{aligned}
Y^{(n)}(t,\xi) &= \frac{1}{\varepsilon} h(t,\xi) + H(t,\xi) + \\
&+ 2\varepsilon v_e^{1/2} \mathcal{B}(Y^{(n-1)}, Y^{(n-1)}) + 2\varepsilon v_e^{1/2} \mathcal{L}(Y^{(n-1)}), \quad n \in \mathbb{N}, \qquad (13) \\
Y^0 &= F(t,\xi) = \frac{1}{\varepsilon} h(t,\xi) + H(t,\xi).
\end{aligned}
$$

Лемма 3. *Пусть $A_{2\sigma}(F) < \infty$ для $\sigma > 1/2$, тогда существует постоянная c_σ, не зависящая от ε, такая, что при условии*

$$
\varepsilon \frac{a_0^4}{\mu_0} c_\sigma A^2_{2\sigma} < 1,
$$

члены итерационной последовательности (13) удовлетворяют оценке

$$
\|Y^{(n)}(t,\xi)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} \leqslant \|F(t,\xi)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} + \frac{A_{2\sigma}}{(1+|\xi|)^{2\sigma}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}, \qquad (14)
$$

где постоянная a_0 определяется леммами 1, 2.

Доказательство леммы 3 также приведено в [1].

7. Нелинейное уравнение (диссипативное решение).

Следствие 1. *Из леммы 3 для любого фиксированного $\xi \in \mathbb{R}$ следует слабая сходимость в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ итерационной последовательности к функции $Y(t,\xi) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющей оценке*

$$
\|Y(t,\xi)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} \leqslant \|F(t,\xi)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} + \frac{A_{2\sigma}}{(1+|\xi|)^{2\sigma}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}. \qquad (15)
$$

Нетрудно доказать, что функция $Y(t,\xi)$ измерима по ξ. Из оценки (14) следует, что функция $Y(t,\xi) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))$ и итерационная последовательность сходится к $Y(t,\xi)$ в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))$.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы 3 и*

$$\varepsilon\ \frac{c_\sigma^2}{\mu_0}a_0^2\Big(a_0^2A_{2\sigma}^2 + \|v^0\|^2_{\mathcal{H}^{2\sigma}(\mathbb{R})}\Big) = q^2 < 1.$$

Тогда итерационная последовательность (13) *фундаментальна в* $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma)$.

Доказательство леммы 4 приведено в [1].

Теорема существования. *Пусть выполнены условия лемм* 3, 4. *Тогда существует решение* $Y \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))$ *уравнения* (12), *удовлетворяющее оценке*

$$\|Y\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)}(\xi) \leqslant \|F(t,\xi)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} + \frac{A_{2\sigma}}{(1+|\xi|)^{2\sigma}}, \quad \forall\xi\in\mathbb{R}. \tag{16}$$

Доказательство. Существование глобального решения следует из следующих утверждений:

1) из оценки (14) следует, что слабый предел $Y(t,\xi) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))$ и $\mathcal{B}(Y,Y)(t,\xi) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))$;
2) из леммы 4 следует, что $Y^{(n)} \to Y$ в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))$;
3) по аналогии с оценками леммы 4 нетрудно доказать, что

$$4v_e\varepsilon^2\|\mathcal{B}(Y^{(n)},Y^{(n)}) - \mathcal{B}(Y,Y)\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))} \leqslant \\ \leqslant \varepsilon\frac{c_\sigma^2a_0^4}{\mu_0}A_{2\sigma}^2\|(Y^{(n)}-Y)\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))};$$

$$4v_e\varepsilon^2\|\mathcal{L}((Y^{(n)}-Y))\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))} \leqslant \\ \leqslant \varepsilon^2\ \frac{c_\sigma^2a_0^4}{\mu_0}\|v^0\|^2_{2\sigma}\|(Y^{(n)}-Y)\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))}.$$

Отсюда следует, что $Y(t,\xi)$ — решение уравнения (12) в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))$. □

Теорема единственности. *Пусть выполнены условия лемм* 3, 4. *Тогда в классе функций* $Y \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))$, *удовлетворяющих оценке* (16), *решение уравнения* (12) *единственно.*

Доказательство. Пусть есть два решения Y, Y_1 из этого класса. Тогда по аналогии с оценкой (14) можно получить неравенство

$$\|(Y-Y_1)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))} \leqslant q\|(Y-Y_1)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))},$$

откуда следует единственность решения. □

8. Условия разрешимости. Теперь перейдём к оценке $A_{2\sigma}(F)$. Для этого оценим

$$H(t,\xi) = 2\varepsilon v_e^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{ \widetilde{v}^0(\xi-\eta)\widetilde{v}^0(\eta) \Big(e^{-2\frac{1}{\varepsilon}L_e t} - \\ - \frac{1}{4}\Big[e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} + i(\xi-\eta)\int_t^{\infty} e^{-i(\xi-\eta)(t-s)} e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s} ds \Big] \times \\ \times \Big[e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} - i\eta \int_t^{\infty} e^{i\eta(t-s)} e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e s} ds \Big] \Big) \Big\} d\eta.$$

Имеем

$$\|H(t,\xi)\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{2\sigma})} \leqslant \ \varepsilon^2 4 v_e \mu_{2\sigma}\ \|v^0\|^4_{\mathcal{H}^{2\sigma}(\mathbb{R})} \int_0^{\infty} e^{2(\gamma-\frac{1}{\varepsilon}L_e)t} dt.$$

В то же время

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\|h\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{2\sigma}(\mathbb{R}))} \leqslant \frac{u_e^2 + w_e^2}{2\varepsilon}\|v^0\|^2_{\mathcal{H}^{2\sigma}(\mathbb{R})} \int_0^{\infty} e^{2(\gamma-\frac{1}{\varepsilon}L_e)t} dt.$$

Отсюда следует существование постоянной $c_\sigma > 0$, не зависящей от ε, такой, что

$$A^2_{2\sigma} \leqslant \ \frac{c^2_\sigma}{\varepsilon}\ \|v^0\|^2_{\mathcal{H}^{2\sigma}(\mathbb{R})}\big(1+\varepsilon^3\|v^0\|^2_{\mathcal{H}^{2\sigma}(\mathbb{R})}\big). \tag{17}$$

Отсюда следует следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть для $\sigma > 1/2$ имеем*

$$\|v^0\|^2_{\mathcal{H}^{2\sigma}(\mathbb{R})}\frac{c^2_\sigma}{\mu_0}a_0^2\left(1 + a_0^2 c_\sigma^2\big(1+\varepsilon^3\|v^0\|^2_{\mathcal{H}^{2\sigma}(\mathbb{R})}\big)\right) < 1.$$

Тогда существует решение $Y \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))$ уравнения (12), *удовлетворяющее оценке* (16).

Доказательство теоремы следует из результатов теоремы существования и оценки (17).

9. Вещественнозначные начальные данные. Как мы отмечали выше, для вещественнозначных начальных данных трудности исследования секулярных членов (6) преодолеваются переходом к комплексификации (7). Существование глобального вещественнозначного решения задачи Коши для системы (3) (см. [1]) следует из существования глобального вещественнозначного решения комплексификации (7). Здесь применимы приведенные выше рассуждения, если уточнить оценки билинейных форм $B(y,y)$, $L(y)$ в этом случае. Для комплексификации билинейная форма

$$B(y,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{ y(t,\xi-\eta)\overline{y(t,\eta)} - \\ - \frac{1}{4}\operatorname{Re}\Big[\Big(y(t,\xi-\eta) - i(\xi-\eta)\int_0^t e^{-i(\xi-\eta)(t-s)} y(s,\xi-\eta) ds \Big) \times$$

$$\times \overline{\left(y(t,\eta)+i\eta\int_0^t e^{i\eta\,(t-s)}y(s,\eta)ds\right)}\,\Bigg]\Bigg\}d\eta$$

для

$$y=T_\xi^{-1}(D(t,\xi))+T_\xi^{-1}(Y(t,\xi)),$$

где $D(t,\xi)=\Phi_\xi e^{i\xi t}+\Phi_{-\xi}e^{-i\xi t}$, $Y(t,\xi)\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$.

Имеем

$$\begin{gathered}B(y,y)=B(T_\xi^{-1}(Y(t,\xi)),T_\xi^{-1}(Y(t,\xi)))+B(T_\xi^{-1}(D(t,\xi)),T_\xi^{-1}(Y(t,\xi)))+\\+B(T_\xi^{-1}(Y(t,\xi)),T_\xi^{-1}(D(t,\xi)))+B(T_\xi^{-1}(D(t,\xi)),T_\xi^{-1}(D(t,\xi))),\end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered}B(T_\xi^{-1}(Y(t,\xi)),T_\xi^{-1}(Y(t,\xi)))=\int_{-\infty}^{\infty}\Bigg\{T_{\xi-\eta}^{-1}(Y(t,\xi-\eta))\overline{T_\eta^{-1}(Y(t,\eta))}-\\-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\Bigg[\left(T_{\xi-\eta}^{-1}(Y(t,\xi-\eta))-i(\xi-\eta)\int_0^t e^{-i(\xi-\eta)(t-s)}T_{\xi-\eta}^{-1}Y(s,\xi-\eta)ds\right)\times\\\times\overline{\left(T_\eta^{-1}(Y(t,\eta))+i\eta\int_0^t e^{i\eta\,(t-s)}T_\eta^{-1}Y(s,\eta)ds\right)}\Bigg]\Bigg\}d\eta\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+).\end{gathered}$$

Здесь

$$\begin{gathered}T_\xi^{-1}(Y(t,\xi))-i\xi\int_0^t e^{-i\xi(t-s)}T_\xi^{-1}Y(s,\xi)ds=\int_0^t e^{-i\xi(t-s)}\frac{d}{ds}T_\xi^{-1}Y(s,\xi)ds,\\T_\xi^{-1}(Y(t,\xi))+i\xi\int_0^t e^{i\xi(t-s)}T_\xi^{-1}Y(s,\xi)ds=\int_0^t e^{i\xi(t-s)}\frac{d}{ds}T_\xi^{-1}Y(s,\xi)ds.\end{gathered}$$

Проблема в том, что

$$\int_0^t e^{i\xi(t-s)}T_\xi^{-1}D(s,\xi)ds$$

не принадлежит $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$. В силу леммы 2

$$i\xi\int_0^t e^{i\xi(t-s)}T_\xi^{-1}e^{-i\xi s}ds,\quad i\xi\int_0^t e^{-i\xi(t-s)}T_\xi^{-1}e^{i\xi s}ds\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+),$$

в то время как

$$i\xi\int_0^t e^{-i\xi(t-s)}T_\xi^{-1}e^{-i\xi s}ds=-\varepsilon\frac{1}{w_e}e^{-i\xi t}+\varepsilon G(t,\xi),\tag{18}$$

где

$$G(t,\xi)=\frac{u_e}{w_e}i\xi\int_0^t e^{i\xi(t-s)}T_\xi^{-1}(e^{-i\xi s})ds+\frac{1}{w_e}\Big(\frac{d}{dt}+\frac{1}{\varepsilon}L_e\Big)T_\xi^{-1}(e^{-i\xi t})\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+).$$

Используя соотношение (18), мы можем преобразовать билинейные формы $B(T_\xi^{-1}(D(t,\xi)),\, T_\xi^{-1}(D(t,\xi)))$, $B(T_\xi^{-1}(D(t,\xi)), T_\xi^{-1}(Y(t,\xi)))$ к виду

$$
\begin{aligned}
&2\varepsilon v_e^{1/2} B(T_\xi^{-1}(D(t,\xi)), T_\xi^{-1}(D(t,\xi))) = \mathcal{B}(\Phi,\Phi)- \\
&\quad -\frac{1}{2}\varepsilon^3 \frac{1}{v_e^{3/2}}\Big(e^{i\xi t}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^-(\xi-\eta)\overline{\Phi^+(\eta)}d\eta + e^{-i\xi t}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\Phi^-(\xi-\eta)}\Phi^+(\eta)d\eta\Big),
\end{aligned}
$$

$$
2\varepsilon v_e^{1/2}\Big(B\big(T_\xi^{-1}(D(t,\xi)), T_\xi^{-1}(Y(t,\xi))\big) + B\big(T_\xi^{-1}(Y(t,\xi))T_\xi^{-1}(D(t,\xi))\big)\Big) = \mathcal{B}(Y,\Phi),
$$

где $\mathcal{B}(\Phi,\Phi)\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ и $\mathcal{B}(\Phi,Y)\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$; оценка проводится так же, как в п. 5. «Диссипативное решение».

Тогда уравнение (12) в этом случае запишется в виде

$$
\begin{aligned}
Y(t,\xi)+D(t,\xi) &= \frac{1}{\varepsilon}h(t,\xi)+H(t,\xi)-2\varepsilon v_e^{1/2}\mathcal{B}(\Phi,\Phi)- \\
&-\frac{1}{2}\varepsilon^3\frac{1}{v_e^{3/2}}\left(e^{i\xi t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi^-(\xi-\eta)\overline{\Phi^+(\eta)}d\eta + e^{-i\xi t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{\Phi^-(\xi-\eta)}\Phi^+(\eta)d\eta\right)+ \\
&+\frac{1}{\varepsilon}\left(\left[2\frac{w_e}{v_e^{1/2}}D^-(\xi)-\varepsilon^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}D^-(\xi-\eta)\overline{D^+(\eta)}d\eta\right]e^{-i\xi t}+\right. \\
&\left.+\left[2\frac{u_e}{v_e^{1/2}}D^+(\xi)-\varepsilon^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{D^-(\xi-\eta)}D^+(\eta)d\eta\right]e^{i\xi t}\right)+ \\
&+2\varepsilon v_e^{1/2}\mathcal{B}(Y,Y)+2\varepsilon v_e^{1/2}(\mathcal{B}(Y,\Phi)+\mathcal{L}(Y)). \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Таким образом, у нас возникли секулярные неинтегрируемые члены.

10. Условие несекулярности (вещественнозначный случай). Коэффициенты $\Phi^\pm(\xi)$ найдём из условия отсутствия секулярных членов:

$$
\begin{aligned}
D(t,\xi) &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\left[2\frac{w_e}{v_e^{1/2}}D^-(\xi)-\varepsilon^2\int_{-\infty}^{\infty}D^-(\xi-\eta)\overline{D^+(\eta)}d\eta\right]e^{-i\xi t}+\right. \\
&\left.+\left[2\frac{u_e}{v_e^{1/2}}D^+(\xi)-\varepsilon^2\int_{-\infty}^{\infty}\overline{D^-(\xi-\eta)}D^+(\eta)d\eta\right]e^{i\xi t}\right)- \\
&-\frac{1}{2}\varepsilon^3\frac{1}{v_e^{3/2}}\Big(e^{i\xi t}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^-(\xi-\eta)\overline{\Phi^+(\eta)}d\eta+e^{-i\xi t}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\Phi^-(\xi-\eta)}\Phi^+(\eta)d\eta\Big),
\end{aligned}
$$

которое можно переписать как алгебраическую систему

$$
\begin{aligned}
\Phi^+(\xi) &= \frac{1}{\varepsilon}G^+(\xi)-\frac{1}{2}\varepsilon^3\frac{1}{v_e^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^-(\xi-\eta)\overline{\Phi^+(\eta)}d\eta, \\
\Phi^-(\xi) &= \frac{1}{\varepsilon}G^-(\xi)-\frac{1}{2}\varepsilon^3\frac{1}{v_e^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\Phi^-(\xi-\eta)}\Phi^+(\eta)d\eta
\end{aligned} \qquad (20)
$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}$, где

$$G^+(\xi) = 2\frac{u_e}{v_e^{1/2}}D^+(\xi) - \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} \overline{D^-(\xi-\eta)}D^+(\eta)d\eta,$$
$$G^-(\xi) = 2\frac{w_e}{v_e^{1/2}}D^-(\xi) - \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} D^-(\xi-\eta)\overline{D^+(\eta)}d\eta.$$

Нам нужны условия, когда существует единственное решение этой системы, такое, что $\Phi^+(\xi) \in \mathcal{H}^{2\sigma}(\mathbb{R})$.

Лемма 5. *Пусть* $(G^+, G^-)(\xi) \in \mathcal{H}^{3\sigma}(\mathbb{R})$, $\sigma > 1/2$ *и*

$$\varepsilon c_e \left(\|u^0\|_{\mathcal{H}^{3\sigma}(\mathbb{R})} + \|v^0\|_{\mathcal{H}^{3\sigma}(\mathbb{R})} + \|w^0\|_{\mathcal{H}^{3\sigma}(\mathbb{R})}\right) \leqslant 1,$$

где

$$c_e = \frac{v_e^{1/2}}{u_e}\left(u_e^{1/2} + v_e^{1/2} + w_e^{1/2}\right)\max\left(8\sqrt{2}\frac{u_e^2}{v_e^2}, \varepsilon\mu_{3\sigma}^{1/2}\right).$$

Тогда существует решение (Φ^+, Φ^-) *системы* (20) *в* $\mathcal{H}^{2\sigma}(\mathbb{R})$, *удовлетворяющее оценке*

$$|\Phi^\pm(\xi)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\Big(|G^\pm(\xi)| + \frac{N_{3\sigma}(G)}{(1+|\xi|)^{3\sigma}}\Big), \quad \forall\xi \in \mathbb{R}, \tag{21}$$

где

$$N_{3\sigma} = 4\sqrt{2}\frac{u_e}{v_e^{1/2}}\left(u_e^{1/2} + v_e^{1/2} + w_e^{1/2}\right)\left(\|u^0\|_{\mathcal{H}^{3\sigma}(\mathbb{R})} + \|v^0\|_{\mathcal{H}^{3\sigma}(\mathbb{R})} + \|w^0\|_{\mathcal{H}^{3\sigma}(\mathbb{R})}\right).$$

Более того, решение единственно в классе $(\Phi^+, \Phi^-)(\xi)$, *удовлетворяющих оценке* (21).

Доказательство леммы 5 приведено в [1].

Решение условия несекулярности позволяет свести уравнение (19) к уравнению в гильбертовом пространстве

$$Y(t,\xi) = \frac{1}{\varepsilon}h(t,\xi) + H(t,\xi) + 2\varepsilon v_e^{1/2}\mathcal{B}(\Phi,\Phi) + \\ + 2\varepsilon v_e^{1/2}\mathcal{B}(Y,Y) + 2\varepsilon v_e^{1/2}(\mathcal{B}(Y,\Phi) + \mathcal{L}(Y))$$

вида (11), разрешимость которого доказана в п. 5. «Диссипативное решение».

11. Общий случай (комплекснозначные начальные данные). Теперь перейдём к случаю комплекснозначных начальных данных, трудности рассмотрения которого связаны с секулярным членом (6). Этот факт приводит к необходимости исследования разрешимости уравнения

$$T_\xi X = F^{-1}_{\xi\to x}S$$

для специальных правых частей $F^{-1}_{\xi\to x}S$, где

$$S(t,\xi) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi-2\eta)t}D^-(\xi-\eta)D^+(\eta)d\eta,$$

и $F^{-1}_{\xi\to x}$ — обратное преобразование Фурье. Ниже мы докажем существование решения задачи Коши

$$T_\xi Z = \varepsilon S(t,\xi), \quad Z(t,\xi)|_{t=0} = 0, \tag{22}$$

с точностью до правой части $\varepsilon Q^+(\xi)e^{i\xi t} + \varepsilon Q^-(\xi)e^{-i\xi t} + \varepsilon$ (диссипат) (с точностью до преобразований Фурье по x бегущих волн и диссипативного члена (экспоненциально быстро убывающего)).

Мы рассмотрим более общую правую часть вида

$$S_D(t,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi-2\eta)t} D(\xi-\eta,\eta)d\eta.$$

Решением $(Z_D(t,\xi), Q^{\pm}_D(\xi), F_D(t,\xi))$ задачи Коши (22) с точностью до правой части $Q^+_D(\xi)e^{i\xi t} + Q^-_D(\xi)e^{-i\xi t} + \varepsilon F_D(t,\xi)$ будем называть решение следующей задачи:

$$T_\xi(Z_D(t,\xi)) = \varepsilon S_D(t,\xi) + Q^+_D e^{i\xi t} + Q^-_D e^{-i\xi t} + \varepsilon F_D, \quad Z_D(t,\xi)|_{t=0} = 0,$$

где $F_D \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, $\xi \in \mathbb{R}$. Обратное преобразовании Фурье $F^{-1}_{\xi\to x}$ имеет следующий вид:

$$F^{-1}_{\xi\to x}(S_D)(t,x) = \mathcal{D}(x-t, x+t),$$

где

$$F_{x\to\xi, y\to\eta}(\mathcal{D})(\xi,\eta) = D(\xi,\eta)$$

— преобразование Фурье функции $\mathcal{D}(x,y)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\|S_D(t,\cdot)\|^2_{\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R})} \leqslant \\
&\leqslant 2\Big\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{(1+|\eta|)^{2\sigma}} \Big(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (1+|\eta|)^{2\sigma}(1+|\xi-\eta|)^{2\sigma}(D(\xi-\eta,\eta))^2 d\xi d\eta\Big) + \\
&\qquad + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (1+|\eta|)^{2\sigma}(1+|\xi-\eta|)^{2\sigma}(D(\xi-\eta,\eta))^2 d\eta \times \\
&\quad \times \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{(1+|\xi-\eta|)^{2\sigma}}\Big) d\xi\Big\} \leqslant 4\mu_\sigma^2 \|D\|^2_{\mathcal{H}^{\sigma,\sigma}(\mathbb{R}^2)}, \quad \mu_\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{(1+|\eta|)^{2\sigma}}.
\end{aligned}$$

Лемма 6. *Пусть $D(\xi,\eta) \in \mathcal{H}^{\sigma+1,\sigma}(\mathbb{R}^2) \cap \mathcal{H}^{\sigma,\sigma+1}(\mathbb{R}^2)$. Тогда существует решение $Z_D(t,\xi)$, $Q^{\pm}_D(\xi)$, $F_D(t,\xi)$ задачи Коши*

$$T_\xi(Z_D(t,\xi)) = \varepsilon S_D(t,\xi) + Q^+_D e^{i\xi t} + Q^-_D e^{-i\xi t} + \varepsilon\ F_D(t,\xi), \quad Z_D(t,\xi)|_{t=0} = 0.$$

такое, что

$$\begin{aligned}
Z_D(t,\xi) &= \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t e^{-i(\xi-\eta)(t-s)} \Xi_D(\xi-\eta,\eta,s) e^{i\eta(t-s)} ds d\eta = \\
&= \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi-\eta)t} \Psi_D(\xi-\eta,\eta) e^{i\eta t} d\eta +
\end{aligned}$$

$$+ R_D^+(\xi)e^{i\xi t} + R_D^-(\xi)e^{-i\xi t} + \varepsilon G_D(t,\xi), \quad (23)$$

где

$$\varepsilon\Big\|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi-\eta)t}\Psi_D(\xi-\eta,\eta)e^{i\eta\,t}d\eta\Big\|_{W^1_\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R})} \leqslant$$
$$\leqslant c_0\varepsilon^{1/2}(\|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma+1,\sigma}(\mathbb{R}^2)} + \|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma,\sigma+1}(\mathbb{R}^2)}),$$
$$\|e^{\pm i\xi t}R_D^\pm(\xi)\|_{W^1_\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R})} \leqslant c_0\varepsilon^{1/2}(\|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma+1,\sigma}(\mathbb{R}^2)} + \|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma,\sigma+1}(\mathbb{R}^2)}),$$
$$\|Q_D^+\|_{\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R})} \leqslant \varepsilon^{1/2}c_0\|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma,\sigma}(\mathbb{R}^2)}, \quad \varepsilon\|F_D\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))} \leqslant c_0\|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma,\sigma}(\mathbb{R}^2)}.$$

Доказательство.
Построение решения $Z_D(t,\xi)$, $Q_D^\pm(\xi)$, $F_D(t,\xi)$.
Для $2q<1$, $q>0$, рассмотрим непересекающиеся интервалы

$$I_1(\xi) = \{\eta\in\mathbb{R}, |\eta|<q|\xi|\}, \quad I_2(\xi) = \{\eta\in\mathbb{R}, |\xi-\eta|<q|\xi|\}, \quad I_0 = \mathbb{R}\setminus(I_1\cup I_2).$$

Сделав преобразование Лапласа по t, положим

$$\widehat{S_D}(p,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{D(\xi-\eta,\eta)}{p+i(\xi-2\eta)}d\eta = \int_{I_0}\frac{D(\xi-\eta,\eta)}{p+i(\xi-2\eta)}d\eta +$$
$$+\int\limits_{I_1}\frac{D(\xi-\eta,\eta)}{p+i(\xi-2\eta)}d\eta + \int\limits_{I_2}\frac{D(\xi-\eta,\eta)}{p+i(\xi-2\eta)}d\eta.$$

1) В области I_0, где $|\eta|>q|\xi|$, $|\xi-\eta|>q|\xi|$, решим уравнение

$$T_\xi\Big[\int_{I_0}\int_0^t \Xi_0(\xi,\eta,s)e^{i(2\eta-\xi)(t-s)}dsd\eta\Big] =$$
$$= \varepsilon S_0(t,\xi) + Q^+(\xi)e^{i\xi t} + Q^-(\xi)e^{-i\xi t} + \varepsilon F_0(t,\xi), \quad \xi\in I_0,$$

где

$$\widehat{S_0}(p,\xi) = \int_{I_0}\frac{D(\xi-\eta,\eta)}{p+i(\xi-2\eta)}d\eta,$$

— преобразование Лапласа S_0 по t и $F_0(t,\xi)\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))$.

1a) Сделав преобразование Лапласа по t, получим

$$J_0 = \Big(p + \frac{1}{\varepsilon}L_e + \frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{i\xi u_e}{p-i\xi} - \frac{i\xi w_e}{p+i\xi}\Big)\Big)\int_{I_0}\frac{\widehat{\Xi_0}(\xi,\eta,p)}{p+i\xi-2i\eta}d\eta =$$
$$= \Big(p+\frac{1}{\varepsilon}L_e\Big)\int_{I_0}\frac{\widehat{\Xi_0}(\xi,\eta,p)}{p+i\xi-2i\eta}d\eta + \frac{1}{\varepsilon}\int_{I_0}\Big(\frac{i\xi u_e}{p-i\xi} - \frac{i\xi w_e}{p+i\xi}\Big)\frac{\widehat{\Xi}(\xi,\eta,p)}{p+i\xi-2i\eta}d\eta,$$

где для $\eta\neq0$, $\xi-\eta\neq0$ имеем

$$\Big(\frac{i\xi u_e}{p-i\xi}-\frac{i\xi w_e}{p+i\xi}\Big)\frac{1}{p+i\xi-2i\eta}=-\Big(\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}u_e+\frac{\xi}{2\eta}w_e\Big)\frac{1}{p+i\xi-2i\eta}+ \\ +\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}u_e\frac{1}{p-i\xi}+\frac{\xi}{2\eta}w_e\frac{1}{p+i\xi}.$$

Тогда

$$J_0=\int_{I_0}\bigg(p+\frac{1}{\varepsilon}\Big[L_e-\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}u_e-\frac{\xi}{2\eta}w_e\Big]\bigg)\frac{\widehat{\Xi_0}(\xi,\eta,p)}{p+i\xi-2i\eta}d\eta+ \\ +u_e\frac{1}{p-i\xi}\int_{I_0}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}\widehat{\Xi_0}(\xi,\eta,p)d\eta+w_e\frac{1}{p+i\xi}\int\limits_{I_0}\frac{\xi}{2\eta}\widehat{\Xi_0}(\xi,\eta,p)d\eta= \\ =\varepsilon\int_{I_0}\frac{D(\xi-\eta,\eta)}{p+i(\xi-2\eta)}d\eta.$$

На множестве $\eta\in I_0$ положим

$$\widehat{\Xi_0}(\xi,\eta,p)=\varepsilon\frac{D(\xi-\eta,\eta)}{p+\frac{1}{\varepsilon}\Big[L_e-\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}u_e-\frac{\xi}{2\eta}w_e\Big]},\quad \eta\in I_0.$$

Отсюда

$$J_0-\varepsilon\int_{I_0}\frac{D(\xi-\eta,\eta)}{p+i(\xi-2\eta)}d\eta=q^++q^-,$$

$$q^+=-u_e\frac{1}{p-i\xi}\int_{I_0}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}\widehat{\Xi_0}(\xi,\eta,p)d\eta,\quad q^-=-w_e\frac{1}{p+i\xi}\int_{I_0}\frac{\xi}{2\eta}\widehat{\Xi_0}(\xi,\eta,p)d\eta.$$

На интервале I_0 имеем

$$L_e-\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}u_e-\frac{\xi}{2\eta}w_e\geqslant L_e\Big(1-\frac{u_e+w_e}{2qL_e}\Big)=a_0>0,$$

если

$$1-\frac{u_e+w_e}{2qL_e}>0\implies 1>2q>\frac{u_e+w_e}{L_e}=\frac{1}{1+\frac{4v_e}{u_e+w_e}}.$$

Отсюда

$$e^{-\frac{1}{\varepsilon}\Big[L_e-\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}u_e-\frac{\xi}{2\eta}w_e\Big]t}\leqslant e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon}a_0t},\quad \forall\eta\in I_0. \tag{24}$$

Сделав обратное преобразование Лапласа ($p\to t$), в образах t имеем

$$L_{p\to t}q^+=-u_e\int_0^t e^{i\xi(t-s)}\int_{I_0}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}\Xi_0(\xi,\eta,s)dsd\eta= \\ =-u_ee^{i\xi t}\int_0^\infty e^{-i\xi}\int_{I_0}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}\Xi_0(\xi,\eta,s)dsd\eta+ \\ +u_e\int_t^\infty e^{i\xi(t-s)}\int_{I_0}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}\Xi_0(\xi,\eta,s)dsd\eta.$$

Также

$$L_{p\to t}q^- = -w_e e^{-i\xi t}\int_0^\infty e^{i\xi s}\int_{I_0}\frac{\xi}{2\eta}\Xi_0(\xi,\eta,s)dsd\eta+ \\ + w_e\int_t^\infty e^{-\xi(t-s)}\int_{I_0}\frac{\xi}{2\eta}\Xi_0(\xi,\eta,s)dsd\eta.$$

Таким образом, имеем

$$T_\xi\left[\int_{I_0}\int_0^t \Xi_0(\xi,\eta,s)e^{i(2\eta-\xi)(t-s)}dsd\eta\right] = \\ = \varepsilon S_0 + Q_0^+(\xi)e^{i\xi t} + Q_0^-(\xi)e^{-i\xi t} + \varepsilon F_0(t,\xi), \quad (25)$$

где

$$Q_0^-(\xi) = -w_e\varepsilon\int_0^\infty e^{i\xi s}\int_{I_0}\frac{\xi}{2\eta}L^{-1}_{p\to s}\left(\frac{D(\xi-\eta,\eta)}{p+\frac{1}{\varepsilon}\left[L_e - \frac{\xi}{2(\xi-\eta)}u_e - \frac{\xi}{2\eta}w_e\right]}\right)dsd\eta,$$

$$Q_0^+(\xi) = -u_e\varepsilon\int_0^\infty e^{i\xi s}\int_{I_0}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}L^{-1}_{p\to s}\left(\frac{D(\xi-\eta,\eta)}{p+\frac{1}{\varepsilon}\left[L_e - \frac{\xi}{2(\xi-\eta)}u_e - \frac{\xi}{2\eta}w_e\right]}\right)dsd\eta,$$

$$F_0(t,\xi) = \int_t^\infty\int_{I_0}\left(w_e\frac{\xi}{2\eta}e^{-\xi(t-s)} + u_e e^{i\xi(t-s)}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}\right)\times \\ \times L^{-1}_{p\to s}\left(\frac{D(\xi-\eta,\eta)}{p+\frac{1}{\varepsilon}\left[L_e - \frac{\xi}{2(\xi-\eta)}u_e - \frac{\xi}{2\eta}w_e\right]}\right)dsd\eta.$$

1b) Теперь сделаем оценку правых частей в (25). Нетрудно видеть, что

$$Q_0^-(\xi) = -w_e\varepsilon\int_0^\infty e^{i\xi s}\int_{I_0}\frac{\xi}{2\eta}L^{-1}_{p\to s}\left(\frac{D(\xi-\eta,\eta)}{p+\frac{1}{\varepsilon}\left[L_e - \frac{\xi}{2(\xi-\eta)}u_e - \frac{\xi}{2\eta}w_e\right]}\right)dsd\eta,$$

$$Q_0^+(\xi) = -u_e\int_0^\infty e^{i\xi s}\int_{I_0}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}L^{-1}_{p\to s}\left(\frac{D(\xi-\eta,\eta)}{p+\frac{1}{\varepsilon}\left[L_e - \frac{\xi}{2(\xi-\eta)}u_e - \frac{\xi}{2\eta}w_e\right]}\right)dsd\eta.$$

На отрезке I_0 имеем $\frac{|\xi|}{2|\eta|} \leqslant \frac{1}{2q}$, $\frac{|\xi|}{2|\xi-\eta|} \leqslant \frac{1}{2q}$. Тогда

$$\|Q_0^-(\xi)\|^2_{\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R})} \leqslant \frac{1}{2q^2}w_e^2\varepsilon^2\int_{-\infty}^\infty\int_{I_0}\left|(1+|\eta|)^\sigma(1+|\xi-\eta|)^\sigma D(\xi-\eta,\eta)\right|^2 d\eta\times \\ \times\left\{\int_{I_0}\frac{1}{(1+|\eta|)^{2\sigma}}\left|\int_0^\infty L^{-1}_{p\to s}\left(\frac{1}{p+\frac{1}{\varepsilon}\left[L_e - \frac{\xi}{2(\xi-\eta)}u_e - \frac{\xi}{2\eta}w_e\right]}\right)ds\right|^2 d\eta+ \right. \\ \left. + \int_{I_0}\frac{1}{(1+|\xi-\eta|)^{2\sigma}}\left|\int_0^\infty L^{-1}_{p\to s}\left(\frac{1}{p+\frac{1}{\varepsilon}\left[L_e - \frac{\xi}{2(\xi-\eta)}u_e - \frac{\xi}{2\eta}w_e\right]}\right)ds\right|^2 d\eta\right\}d\xi, \quad (26)$$

где в силу (24) имеем

$$\int_{I_0} \frac{1}{(1+|\eta|)^{2\sigma}} \Big| \int_0^\infty L^{-1}_{p\to s}\Big(\frac{1}{p+\frac{1}{\varepsilon}\big[L_e - \frac{\xi}{2(\xi-\eta)}u_e - \frac{\xi}{2\eta}w_e\big]}\Big) ds\Big|^2 d\eta \leqslant \\ \leqslant \frac{2}{a_0^2}\int_{I_0}\frac{d\eta}{(1+|\eta|)^{2\sigma}} = \frac{2}{a_0^2}\mu_\sigma^2.$$

Также оценивается второй член в (26).

2) Теперь исследуем окрестности I_2, где $|\eta| \geqslant |\xi| - |\xi-\eta| \geqslant (1-q)|\xi|$,

$$|\xi - 2\eta| \geqslant |\xi| - 2|\xi-\eta| > (1-2q)|\xi|, \quad \text{если} \quad |\xi-\eta| < q|\xi|.$$

2a) Имеем

$$\widehat{S_2}(p,\xi) = \int_{I_2}\frac{D(\xi-\eta,\eta)}{p+i\xi-2i\eta}d\eta = \frac{1}{p-i\xi}\int_{I_2}D(\xi-\eta,\eta)d\eta - \\ - 2\int_{I_2}(\xi-\eta)D(\xi-\eta,\eta)\frac{1}{(p+i\xi-2i\eta)(p-i\xi)}d\eta.$$

Далее

$$\Big(\frac{i\xi u_e}{p-i\xi} - \frac{i\xi w_e}{p+i\xi}\Big)\frac{1}{p+i\xi-2i\eta} = -\Big(\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}u_e + \frac{\xi}{2\eta}w_e\Big)\frac{1}{p+i\xi-2i\eta} + \\ + \frac{\xi}{2(\xi-\eta)}u_e\frac{1}{p-i\xi} + \frac{\xi}{2\eta}w_e\frac{1}{p+i\xi}.$$

Отсюда

$$\Big(p + \frac{1}{\varepsilon}L_e + \frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{i\xi u_e}{p-i\xi} - \frac{i\xi w_e}{p+i\xi}\Big)\Big)\int_{I_2}\frac{\widehat{\Xi}(\xi,\eta,p)}{p+i\xi-2i\eta}d\eta = \\ = \int_{I_2}\Big(\Big[p + \frac{1}{\varepsilon}L_e\Big(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e}\Big)\Big](p-i\xi) + \frac{1}{\varepsilon}i\xi u_e\Big)\frac{\widehat{\Xi}(\xi,\eta,p)}{(p+i\xi-2i\eta)(p-i\xi)}d\eta - \\ - \frac{1}{\varepsilon}w_e\frac{1}{p+i\xi}\int_{I_2}\frac{\xi}{2\eta}\widehat{\Xi}(\xi,\eta,p)d\eta,$$

где

$$\Big|p^2 + \Big(\frac{1}{\varepsilon}L_e\Big(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e}\Big) - i\xi\Big)p - \\ - i\xi\frac{1}{\varepsilon}L_e\Big(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e} - \frac{u_e}{L_e}\Big)\Big| \geqslant c_1 > 0, \quad \eta\in I_2, \quad \operatorname{Re}p \geqslant -\mu_0\varepsilon.$$

Доказательство этой оценки аналогично оценке снизу леммы 3.1 в [1]. Здесь

$$\Big[p + \frac{1}{\varepsilon}L_e\Big(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e}\Big)\Big](p-i\xi) + \frac{1}{\varepsilon}i\xi u_e =$$

$$= (p-i\xi)p\left[1+\frac{1}{\varepsilon}L_e\Big(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e}\Big)\frac{1}{p}+\frac{1}{\varepsilon}u_e\Big(\frac{1}{(p-i\xi)}-\frac{1}{p}\Big)\right]=$$
$$= (p-i\xi)p\left[1+\frac{1}{\varepsilon}L_e\Big(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e}-\frac{u_e}{L_e}\Big)\frac{1}{p}+\frac{1}{\varepsilon}u_e\frac{1}{(p-i\xi)}\right],$$

где

$$\left|1+\frac{1}{\varepsilon}L_e\Big(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e}-\frac{u_e}{L_e}\Big)\frac{1}{p}+\frac{1}{\varepsilon}u_e\frac{1}{(p-i\xi)}\right|\geqslant c_{1,1}>0,\quad \operatorname{Re}p\geqslant-\mu_0\varepsilon,\quad \eta\in I_2.$$

В то же время для $p=i\xi$ имеем

$$i\xi+\frac{1}{\varepsilon}L_e\Big(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e}\Big)-i\xi-\frac{1}{\varepsilon}L_e\Big(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e}-\frac{u_e}{L_e}\Big)=\frac{1}{\varepsilon}u_e\neq 0;$$

для $p=0$ имеем

$$i\xi\frac{1}{\varepsilon}L_e\Big[1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e}-\frac{u_e}{L_e}\Big]\neq 0,$$

если $\xi\neq 0$.

Положим

$$\widehat{\Xi_2}(\xi,\eta,p)=-2\varepsilon\frac{(\xi-\eta)D(\xi-\eta,\eta)}{\big[p+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e})\big](p-i\xi)+\frac{1}{\varepsilon}i\xi u_e},\quad \forall\eta\in I_2.$$

Тогда

$$\Big(p+\frac{1}{\varepsilon}L_e+\frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{i\xi u_e}{p-i\xi}-\frac{i\xi w u_e}{p+i\xi}\Big)\Big)\int_{I_2}\frac{\widehat{\Xi_2}(\xi,\eta,p)}{p+i\xi-2i\eta}d\eta=$$
$$=\varepsilon\widehat{S_2}(p,\xi)+\varepsilon\frac{1}{p-i\xi}\int_{I_2}D(\xi-\eta,\eta)d\eta+w_e\frac{1}{p+i\xi}\int_{I_2}\frac{\xi}{2\eta}\widehat{\Xi}(\xi,\eta,p)d\eta.$$

Отсюда

$$T_\xi\Big[\int_{I_2}\int_0^t\Xi_2(\xi,\eta,s)e^{i(2\eta-\xi)\,(t-s)}dsd\eta\Big]=$$
$$=\varepsilon S_2+Q_2^+(\xi)e^{i\xi t}+Q_2^-(\xi)e^{-i\xi t}+F_2(t,\xi),\quad \xi\in I_2,\quad (27)$$

где

$$Q_2^+(\xi)=\varepsilon\int_{I_2}D(\xi-\eta,\eta)d\eta,$$

$$Q_2^-(\xi)=-w_e\varepsilon\int_0^\infty e^{i\xi s}\int_{I_2}\frac{\xi}{\eta}L^{-1}_{p\to s}\Big(\frac{(\xi-\eta)D(\xi-\eta,\eta)}{\big[p+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e})\big](p-i\xi)+\frac{1}{\varepsilon}i\xi u_e}\Big)dsd\eta,$$

$$F_2(t,\xi)=w_e\int_t^\infty e^{-i\xi(t-s)}\int_{I_2}\frac{\xi}{\eta}L^{-1}_{p\to s}\Big(\frac{(\xi-\eta)D(\xi-\eta,\eta)}{\big[p+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e})\big](p-i\xi)+\frac{1}{\varepsilon}i\xi u_e}\Big)dsd\eta.$$

2b) Теперь сделаем оценку правых частей в (29). Нетрудно видеть, что

$$\|Q_2^+\|^2_{\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R})} \leqslant \varepsilon^2\mu_\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{I_2}(1+|\xi-\eta|)^{2\sigma}(1+|\eta|)^{2\sigma}|D(\xi-\eta,\eta)|^2 d\eta d\xi.$$

На отрезке I_2 имеем $|\xi-\eta|<q|\xi|$. Тогда

$$\|Q_2^-\|^2_{\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R})} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2w_e^2\varepsilon^2q^2}{(1-q)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\int_{I_2}\big((1+|\xi-\eta|)^\sigma(1+|\eta|)^\sigma|D(\xi-\eta,\eta)|\big)^2 d\eta\int_{I_2}\frac{1}{(1+|\eta|)^{2\sigma}}\times$$
$$\times\Big|\int_0^\infty L^{-1}_{p\to s}\Big(\frac{|\xi|}{(p-i\xi)p\big[1+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e}-\frac{u_e}{L_e})\frac{1}{p}+\frac{1}{\varepsilon}u_e\frac{1}{(p-i\xi)}\big]}\Big)ds|^2 d\eta+$$
$$+\int_{I_2}\big((1+|\eta|)^\sigma(1+|\xi-\eta|)^\sigma|D(\xi-\eta,\eta)|\big)^2 d\eta\int_{I_2}\frac{1}{(1+|\xi-\eta|)^{2\sigma}}\times$$
$$\times\Big|\int_0^\infty L^{-1}_{p\to s}\Big(\frac{|\xi|}{(p-i\xi)p\big[1+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e}-\frac{u_e}{L_e})\frac{1}{p}+\frac{1}{\varepsilon}u_e\frac{1}{(p-i\xi)}\big]}\Big)ds\Big|^2 d\eta\Big\}d\xi,$$

где

$$\Big|\int_0^\infty L^{-1}_{p\to s}\Big(\frac{|\xi|}{(p-i\xi)p\big[1+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e}-\frac{u_e}{L_e})\frac{1}{p}+\frac{1}{\varepsilon}u_e\frac{1}{(p-i\xi)}\big]}\Big)ds\Big|^2 \leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2\gamma_*}\Big\|L^{-1}_{p\to s}\Big(\frac{|\xi|}{(p-i\xi)p\big[1+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e}-\frac{u_e}{L_e})\frac{1}{p}+\frac{1}{\varepsilon}u_e\frac{1}{(p-i\xi)}\big]}\Big)\Big\|^2_{L_{2,\gamma_*}(\mathbb{R}_+)}$$

для $\gamma_*=\mu_*\varepsilon$. Существование такого $\mu_*\in(0,1)$ следует из леммы 3.1 в [1], согласно которой ограничены следующие нормы:

$$\Big\|L^{-1}_{p\to s}\Big(\frac{1+|\xi|}{(p-i\xi)p\big[1+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e}-\frac{u_e}{L_e})\frac{1}{p}+\frac{1}{\varepsilon}u_e\frac{1}{(p-i\xi)}\big]}\Big)\Big\|^2_{L_{2,\gamma_*}(\mathbb{R}_+)}\leqslant a_1^2,$$
$$\Big\|\frac{d}{dt}L^{-1}_{p\to s}\Big(\frac{1}{(p-i\xi)p\big[1+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e}-\frac{u_e}{L_e})\frac{1}{p}+\frac{1}{\varepsilon}u_e\frac{1}{(p-i\xi)}\big]}\Big)\Big\|^2_{L_{2,\gamma_*}(\mathbb{R}_+)}\leqslant a_1^2. \tag{28}$$

Отсюда

$$\|Q_2^-\|^2_{\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R})}\leqslant\varepsilon\frac{w_e^2a_1^2q^2\mu_\sigma^2}{(1-q)^2}\frac{1}{\mu_*}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{I_2}\big((1+|\eta|)^\sigma(1+|\xi-\eta|)^\sigma|D(\xi-\eta,\eta)|\big)^2 d\eta d\xi.$$

Теперь выберем $\gamma=\mu_0\varepsilon$, $\mu_0\in(0,\mu_*)$. Тогда

$$(1+|\xi|)^{2\sigma}\|F_2(t,\xi)\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)}\leqslant\frac{2w_e^2q^2}{(1-q)^2}\int_{I_2}\big(1+|\xi-\eta|\big)^{2\sigma}(1+|\eta|\big)^{2\sigma}\times$$
$$\times|D(\xi-\eta,\eta)|^2 d\eta\int_{I_2}\Big(\frac{1}{(1+|\xi|)^{2\sigma}}+\frac{1}{(1+|\xi-\eta|)^{2\sigma}}\Big)\times$$

$$\times|\xi|^2\left\|\int_t^{\infty} e^{-i\xi(t-s)} L^{-1}_{p\to s}\left(\frac{1}{\left[p+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e})\right](p-i\xi)+\frac{1}{\varepsilon}i\xi u_e}\right)ds\right\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} d\eta,$$

где

$$\left\|i\xi\int_t^{\infty} e^{-i\xi(t-s)} L^{-1}_{p\to s}\left(\frac{1}{\left[p+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e})\right](p-i\xi)+\frac{1}{\varepsilon}i\xi u_e}\right)ds\right\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\int_t^{\infty} e^{-i\xi(t-s)} \frac{d}{ds}L^{-1}_{p\to s}\left(\frac{1}{\left[p+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e})\right](p-i\xi)+\frac{1}{\varepsilon}i\xi u_e}\right)ds\right\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} +$$

$$+\left\|L^{-1}_{p\to t}\left(\frac{1}{\left[p+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e})\right](p-i\xi)+\frac{1}{\varepsilon}i\xi u_e}\right)\right\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)}.$$

В силу (28) имеем

$$\left\|L^{-1}_{p\to t}\left(\frac{1}{\left[p+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e})\right](p-i\xi)+\frac{1}{\varepsilon}i\xi u_e}\right)\right\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} \leqslant a_1^2.$$

В то же время

$$\left|\int_t^{\infty} e^{-i\xi(t-s)} \frac{d}{ds}L^{-1}_{p\to s}\left(\frac{1}{\left[p+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e})\right](p-i\xi)+\frac{1}{\varepsilon}i\xi u_e}\right)ds\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\gamma_*}e^{-2\gamma_* t}\left\|\frac{d}{ds}L^{-1}_{p\to s}\left(\frac{1}{\left[p+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e})\right](p-i\xi)+\frac{1}{\varepsilon}i\xi u_e}\right)\right\|^2_{L_{2,\gamma_*}(\mathbb{R}_+)}.$$

Отсюда

$$\left\|\int_t^{\infty} e^{-i\xi(t-s)} \frac{d}{ds}L^{-1}_{p\to s}\left(\frac{1}{\left[p+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e})\right](p-i\xi)+\frac{1}{\varepsilon}i\xi u_e}\right)ds\right\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4\gamma_*(\gamma_*-\gamma)}\left\|\frac{d}{ds}L^{-1}_{p\to s}\left(\frac{1}{\left[p+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e})\right](p-i\xi)+\frac{1}{\varepsilon}i\xi u_e}\right)\right\|^2_{L_{2,\gamma_*}(\mathbb{R}_+)}.$$

Следовательно

$$\varepsilon^2\|F_2(t,\xi)\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{\sigma}(\mathbb{R}))} \leqslant \frac{w_e^2 q^2\mu_\sigma^2}{(1-q)^2\mu_*(\mu_*-\mu_0)}\|D\|^2_{\mathcal{H}^{\sigma,\sigma}(\mathbb{R}^2)}.$$

3) Теперь осталось исследовать окрестности I_1, где $|\xi-\eta| \geqslant |\xi|-|\eta| \geqslant \geqslant (1-q)|\xi|$,

$$|\xi-2\eta| \geqslant |\xi|-2|\eta| > (1-2q)|\xi|, \quad \text{если} \quad |\eta| < q|\xi|,$$

$$\widehat{S_1}(p,\xi)=\int_{I_1}\frac{D(\xi-\eta,\eta)}{p-i\xi-2i(\eta-\xi)}d\eta=\frac{1}{p+i\xi}\int\limits_{I_1}D(\xi-\eta,\eta)d\eta-$$
$$-2\int_{I_1}\frac{\eta D(\xi-\eta,\eta)}{(p+i\xi-2i\eta)(p+i\xi)}d\eta.$$

Также получим

$$\Big(p+\frac{1}{\varepsilon}L_e+\frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{i\xi u_e}{p-i\xi}-\frac{i\xi w_e}{p+i\xi}\Big)\Big)\int_{I_1}\frac{\widehat{\Xi_1}(\xi,\eta,p)}{p+i\xi-2i\eta}d\eta=$$
$$=\int_{I_1}\left(\Big[p+\frac{1}{\varepsilon}L_e\Big(1-\frac{u_e}{L_e}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}\Big)\Big]-i\xi\frac{1}{\varepsilon}w_e\right)\frac{\widehat{\Xi_1}(\xi,\eta,p)}{(p+i\xi-2i\eta)(p+i\xi)}d\eta+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}u_e\frac{1}{p-i\xi}\int\limits_{I_2}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}\widehat{\Xi_1}(\xi,\eta,p)d\eta.$$

В этом случае доказательство, аналогичное приведённому в лемме 3.1 [1], позволяет получить оценку

$$\left|\Big[p+\frac{1}{\varepsilon}L_e\Big(1-\frac{u_e}{L_e}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}\Big)\Big](p+i\xi)-i\frac{1}{\varepsilon}\xi w_e\right|\geqslant c_2>0,\ \eta\in I_1,\ \mathrm{Re}\,p\geqslant-\mu_0\varepsilon.$$

Здесь

$$\Big[p+\frac{1}{\varepsilon}L_e\Big(1-\frac{u_e}{L_e}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}\Big)\Big](p+i\xi)-i\frac{1}{\varepsilon}\xi w_e=$$
$$=p(p+i\xi)\left(1+\frac{1}{\varepsilon}L_e\Big(1-\frac{u_e}{L_e}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}-\frac{w_e}{L_e}\Big)\frac{1}{p}+\frac{1}{\varepsilon}w_e\frac{1}{(p+i\xi)}\right),$$

где

$$\left|1+\frac{1}{\varepsilon}L_e\Big(1-\frac{u_e}{L_e}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}-\frac{w_e}{L_e}\Big)\frac{1}{p}+\frac{1}{\varepsilon}w_e\frac{1}{(p+i\xi)}\right|\geqslant c_{2,1}>0,$$
$$\eta\in I_1,\quad \mathrm{Re}\,p\geqslant-\mu_0\varepsilon.$$

Заметим, что

a) при $p=-\xi$

$$\left(\Big[p+\frac{1}{\varepsilon}L_e\Big(1-\frac{u_e}{L_e}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}\Big)\Big](p+i\xi)-i\frac{1}{\varepsilon}\xi w_e\right)\Big|_{p=-\xi}=-i\frac{1}{\varepsilon}\xi w_e\neq0;$$

b) при $p=0$

$$\left(\Big[p+\frac{1}{\varepsilon}L_e\Big(1-\frac{u_e}{L_e}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}\Big)\Big](p+i\xi)-i\frac{1}{\varepsilon}\xi w_e\right)\Big|_{p=0}=$$
$$=i\xi\frac{1}{\varepsilon}L_e\Big(1-\frac{u_e}{L_e}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}-\frac{w_e}{L_e}\Big)\neq0,$$

если $\xi\neq0$.

Положим

$$\widehat{\Xi_1}(\xi,\eta,p) = \frac{4\varepsilon\eta D(\xi-\eta,\eta)}{\left[p+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1-\frac{u_e}{L_e}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)})\right](p+i\xi)-i\frac{1}{\varepsilon}\xi w_e}, \quad \eta\in I_1.$$

Тогда

$$T_\xi\left[\int_{I_1}\int_0^t \Xi_1(\xi,\eta,s)e^{i(2\eta-\xi)(t-s)}dsd\eta\right] =$$
$$= \varepsilon S_1 + Q_1^+(\xi)e^{i\xi t} + Q_1^-(\xi)e^{-i\xi t} + \varepsilon F_1(t,\xi), \quad \xi\in I_1, \quad (29)$$

где

$$Q_1^-(\xi) = \varepsilon\int_{I_1} e^{i\xi s}D(\xi-\eta,\eta)d\eta,$$

$$Q_1^+(\xi) = -2u_e\varepsilon\int_0^\infty e^{-i\xi s}\int_{I_1}\frac{\xi}{\xi-\eta}L^{-1}_{p\to s}\times$$
$$\times\left(\frac{\eta D(\xi-\eta,\eta)}{\left[p+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1-\frac{u_e}{L_e}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)})\right](p+i\xi)-i\frac{1}{\varepsilon}\xi w_e}\right)dsd\eta,$$

$$F_1(t,\xi) = 2u_e\int_t^\infty e^{i\xi(t-s)}\int_{I_1}\frac{\xi}{\xi-\eta}\times$$
$$\times L^{-1}_{p\to s}\left(\frac{\eta D(\xi-\eta,\eta)}{\left[p+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1-\frac{u_e}{L_e}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)})\right](p+i\xi)-i\frac{1}{\varepsilon}\xi w_e}\right)dsd\eta.$$

Так же как выше, получим

$$\|Q_1^-\|^2_{\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R})} \leqslant \varepsilon^2\mu_\sigma^2\int_{-\infty}^\infty\int_{I_1}\big(1+|\xi-\eta|)^{2\sigma}(1+|\eta|\big)^{2\sigma}\big|D(\xi-\eta,\eta)\big|^2d\eta d\xi,$$

$$\|Q_1^+\|^2_{\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R})} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\frac{2w_e^2a_1^2q^2\mu_\sigma^2}{(1-q)^2}\frac{\varepsilon}{\gamma}\int_{-\infty}^\infty\int_{I_1}\big((1+|\eta|)^\sigma(1+|\xi-\eta|)^\sigma|D(\xi-\eta,\eta)|\big)^2d\eta d\xi,$$

$$\varepsilon^2\|F_1(t,\xi)\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))} \leqslant \frac{w_e^2q^2\mu_\sigma^2}{(1-q)^2\mu_*(\mu_*-\mu_0)}\|D\|^2_{\mathcal{H}^{\sigma,\sigma}(\mathbb{R}^2)}.$$

Здесь, так же как выше, мы воспользовались существованием $\mu_*\in(0,1)$ в силу лемы 3.1 [1], поскольку для $\gamma_* = \mu_*\varepsilon$ ограничены нормы:

$$\left\|L^{-1}_{p\to t}\left(\frac{1+|\xi|}{p(p+i\xi)\big(1+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1-\frac{u_e}{L_e}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}-\frac{w_e}{L_e})\frac{1}{p}+\frac{1}{\varepsilon}w_e\frac{1}{(p+i\xi)}\big)}\right)\right\|^2_{L_{2,\gamma_*}(\mathbb{R}_+)} \leqslant a_1^2,$$

$$\left\|\frac{d}{dt}L^{-1}_{p\to t}\left(\frac{1}{p(p+i\xi)\big(1+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1-\frac{u_e}{L_e}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}-\frac{w_e}{L_e})\frac{1}{p}+\frac{1}{\varepsilon}w_e\frac{1}{(p+i\xi)}\big)}\right)\right\|^2_{L_{2,\gamma_*}(\mathbb{R}_+)} \leqslant a_1^2.$$

4) Итак, в разных областях

$$\widehat{\Xi}(\xi,\eta,p)=\begin{cases}-4\varepsilon\dfrac{\eta D(\xi-\eta,\eta)}{\big(p+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1-\frac{u_e}{L_e}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)})\big)(p+i\xi)-i\frac{1}{\varepsilon}\xi w_e}, & \eta\in I_1,\\ -2\varepsilon\dfrac{(\xi-\eta)D(\xi-\eta,\eta)}{\big(p+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e})\big)(p-i\xi)+\frac{1}{\varepsilon}i\xi u_e}, & \eta\in I_2,\\ \varepsilon\dfrac{D(\xi-\eta,\eta)}{p+\frac{1}{\varepsilon}\big(L_e-\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}u_e-\frac{\xi}{2\eta}w_e\big)}, & \eta\in I_0;\end{cases}$$

$$Q^+(\xi)=\begin{cases}-2u_e\varepsilon\displaystyle\int_0^\infty e^{-i\xi s}\int_{I_1}\frac{\xi}{\xi-\eta}\times\\ \times L^{-1}_{p\to s}\left(\dfrac{\eta D(\xi-\eta,\eta)}{\big[p+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1-\frac{u_e}{L_e}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)})\big](p+i\xi)-i\frac{1}{\varepsilon}\xi w_e}\right)dsd\eta, & \eta\in I_1,\\ \varepsilon\displaystyle\int_{I_2}D(\xi-\eta,\eta)d\eta, & \eta\in I_2,\\ -u_e\varepsilon\displaystyle\int_0^\infty e^{i\xi s}\int_{I_0}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}\times\\ \qquad\times L^{-1}_{p\to s}\left(\dfrac{D(\xi-\eta,\eta)}{p+\frac{1}{\varepsilon}\big[L_e-\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}u_e-\frac{\xi}{2\eta}w_e\big]}\right)dsd\eta, & \eta\in I_0;\end{cases}$$

$$Q^-(\xi)=\begin{cases}\varepsilon\displaystyle\int_{I_1}e^{i\xi s}D(\xi-\eta,\eta)d\eta, & \eta\in I_1,\\ -w_e\varepsilon\displaystyle\int_0^\infty e^{i\xi s}\int_{I_2}\frac{\xi}{\eta}\times\\ \quad\times L^{-1}_{p\to s}\left(\dfrac{(\xi-\eta)D(\xi-\eta,\eta)}{\big[p+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e})\big](p-i\xi)+\frac{1}{\varepsilon}i\xi u_e}\right)dsd\eta, & \eta\in I_2,\\ -w_e\varepsilon\displaystyle\int_0^\infty e^{i\xi s}\int_{I_0}\frac{\xi}{2\eta}\times\\ \qquad\times L^{-1}_{p\to s}\left(\dfrac{D(\xi-\eta,\eta)}{p+\frac{1}{\varepsilon}\big[L_e-\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}u_e-\frac{\xi}{2\eta}w_e\big]}\right)dsd\eta, & \eta\in I_0;\end{cases}$$

$$F(t,\xi)=\begin{cases}2u_e\displaystyle\int_t^\infty e^{i\xi(t-s)}\int_{I_1}\frac{\xi}{\xi-\eta}\times\\ \times L^{-1}_{p\to s}\left(\dfrac{\eta D(\xi-\eta,\eta)}{\big[p+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1-\frac{u_e}{L_e}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)})\big](p+i\xi)-i\frac{1}{\varepsilon}\xi w_e}\right)dsd\eta, & \eta\in I_1,\\ w_e\displaystyle\int_t^\infty e^{-i\xi(t-s)}\int_{I_2}\frac{\xi}{\eta}\times\\ \quad\times L^{-1}_{p\to s}\left(\dfrac{(\xi-\eta)D(\xi-\eta,\eta)}{\big[p+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e})\big](p-i\xi)+\frac{1}{\varepsilon}i\xi u_e}\right)dsd\eta, & \eta\in I_2,\\ \displaystyle\int_t^\infty\int_{I_0}\left(w_e\frac{\xi}{2\eta}e^{-\xi(t-s)}+u_e e^{i\xi(t-s)}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}\right)\times\\ \qquad\qquad\times K(\xi-\eta,\eta,s)dsd\eta, & \eta\in I_0;\end{cases}$$

$$K(\xi-\eta,\eta,s) = L^{-1}_{p\to s}\left(\frac{D(\xi-\eta,\eta)}{p+\frac{1}{\varepsilon}\left[L_e - \frac{\xi}{2(\xi-\eta)}u_e - \frac{\xi}{2\eta}w_e\right]}\right).$$

Структура решения.

Положим

$$Z_j(t,\xi) = \int_{I_j}\int_0^t e^{i(2\eta-\xi)(t-s)}\Xi(\xi,\eta,s)dsd\eta, \quad j=0,1,2.$$

Тогда $Z(t,\xi) = Z_0(t,\xi) + Z_1(t,\xi) + Z_2(t,\xi)$ — решение задачи Коши (23).

a) Здесь

$$Z_0(t,\xi) = \varepsilon\int_{I_0} D(\xi-\eta,\eta)\int_0^t e^{i(2\eta-\xi)\,(t-s)}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\left(L_e - \frac{\xi}{2(\xi-\eta)}u_e - \frac{\xi}{2\eta}w_e\right)s}dsd\eta =$$
$$= \varepsilon\int\limits_{I_0} e^{i(2\eta-\xi)t}\Psi_0(\xi-\eta,\eta)d\eta + \varepsilon G_0(t,\xi),$$

где

$$\Psi_0(\xi-\eta,\eta) = \frac{D(\xi-\eta,\eta)}{i(2\eta-\xi)+\frac{1}{\varepsilon}\left(L_e - \frac{\xi}{2(\xi-\eta)}u_e - \frac{\xi}{2\eta}w_e\right)},$$
$$G_0(t,\xi) = \int_{I_0} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\left(L_e - \frac{\xi}{2(\xi-\eta)}u_e - \frac{\xi}{2\eta}w_e\right)t}\frac{D(\xi-\eta,\eta)}{-i(2\eta-\xi)-\frac{1}{\varepsilon}\left(L_e - \frac{\xi}{2(\xi-\eta)}u_e - \frac{\xi}{2\eta}w_e\right)}d\eta.$$

b) Далее преобразование Лапласа $Z_1(t,\xi)$ по t:

$$\begin{aligned}
&\widehat{Z_1}(p,\xi) = \varepsilon\widehat{J_1} + \varepsilon\widehat{J_2},\\
&\widehat{J_1} = \int_{I_1}\frac{D(\xi-\eta,\eta)}{p\left(1+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1-\frac{u_e}{L_e}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)} - \frac{w_e}{L_e})\frac{1}{p} + \frac{1}{\varepsilon}w_e\frac{1}{(p+i\xi)}\right)}\frac{1}{(p+i\xi-2i\eta)}d\eta,\\
&\widehat{J_2} = -\frac{1}{(p+i\xi)}\int_{I_1}\frac{D(\xi-\eta,\eta)}{p\left(1+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1-\frac{u_e}{L_e}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)} - \frac{w_e}{L_e})\frac{1}{p} + \frac{1}{\varepsilon}w_e\frac{1}{(p+i\xi)}\right)}d\eta.
\end{aligned} \tag{30}$$

Положим

$$\widehat{M_1}(\xi-\eta,\eta,p) = \frac{D(\xi-\eta,\eta)}{p\left(1+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1-\frac{u_e}{L_e}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)} - \frac{w_e}{L_e})\frac{1}{p} + \frac{1}{\varepsilon}w_e\frac{1}{(p+i\xi)}\right)}.$$

Тогда

$$J_2(t,\xi) = \int_0^t e^{-i\xi(t-s)}\int_{I_1} M_1(\xi-\eta,\eta,s)d\eta ds =$$
$$= e^{-i\xi t}\int_0^\infty e^{i\xi s}\int_{I_1} M_1(\xi-\eta,\eta,s)d\eta ds +$$

$$+\int_t^\infty e^{-i\xi(t-s)}\int_{I_1} M_1(\xi-\eta,\eta,s)d\eta ds$$

— обратное преобразование Лапласа J_2 второго члена $\widehat{J_2}$ в правой части (30), где $M_1(\xi-\eta,\eta,s)=L^{-1}_{p\to s}(\widehat{M_1}(\xi-\eta,\eta,p))$.

Вопрос в том, что есть $\widehat{J_1}$? Обратное преобразование Лапласа J_1 первого члена в правой части (30):

$$J_1(t,\xi)=\int_{I_1}\int_0^t e^{-i(\xi-2\eta)(t-s)}M_1(\xi-\eta,\eta,s)dsd\eta=$$
$$=\int_{I_1} e^{-i(\xi-2\eta)t}\int_0^\infty e^{i(\xi-2\eta)s}M_1(\xi-\eta,\eta,s)dsd\eta-$$
$$-\int_{I_1}\int_t^\infty e^{-i(\xi-2\eta)(t-s)}M_1(\xi-\eta,\eta,s)dsd\eta.$$

Отсюда

$$Z_1(t,\xi)=\varepsilon\int_{I_1} e^{-i(\xi-2\eta)t}\Psi_1(\xi-\eta,\eta)d\eta+R_1^-(\xi)e^{-i\xi t}+\varepsilon G_1(t,\xi),$$

где

$$\Psi_1(\xi-\eta,\eta)=\int_0^\infty M_1(\xi-\eta,\eta,s)ds,\ R_1^-(\xi)=\varepsilon\int_0^\infty e^{i\xi s}\int_{I_1} M_1(\xi-\eta,\eta,s)dsd\eta,$$

$$G_1(t,\xi)=-\int_t^\infty e^{-i\xi(t-s)}\int\limits_{I_1} M_1(\xi-\eta,\eta,s)d\eta ds+$$
$$+\int_{I_1}\int_t^\infty e^{-i(\xi-2\eta)(t-s)}M_1(\xi-\eta,\eta,s)dsd\eta.$$

Проведём оценку Ψ_1, R_1^-, G_1. Имеем

$$\int_{-\infty}^\infty(1+|\xi|)^{2\sigma}\left|\int_{I_1} e^{-i(\xi-2\eta)t}\Psi_1(\xi-\eta,\eta)d\eta\right|^2 d\xi\leqslant$$
$$\leqslant 2\int_{-\infty}^\infty\left|\int_{I_1}(1+|\xi-\eta|)^\sigma e^{-i(\xi-2\eta)t}\Psi_1(\xi-\eta,\eta)d\eta\right|^2 d\xi+$$
$$+2\int_{-\infty}^\infty\left|\int_{I_1}(1+|\eta|)^\sigma e^{-i(\xi-2\eta)t}\Psi_1(\xi-\eta,\eta)d\eta\right|^2 d\xi\leqslant$$
$$\leqslant 4\mu_\sigma^2\|\Psi_1\|^2_{\mathcal{H}^{\sigma,\sigma}(\mathbb{R}^2)},$$

где $\Psi_1=0$ вне I_1. Здесь

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{I_1}(1+|\xi-\eta|)^{\sigma}e^{-i(\xi-2\eta)t}\Psi_1(\xi-\eta,\eta)d\eta\right|^2 d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\Bigg|\int_{I_1}(1+|\xi-\eta|)^{\sigma}e^{-i(\xi-2\eta)t}\times$$
$$\times\int_0^{\infty}L^{-1}_{p\to s}\frac{D(\xi-\eta,\eta)}{p\big(1+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1-\frac{u_e}{L_e}\frac{\xi+\eta}{2\xi}-\frac{w_e}{L_e})\frac{1}{p}+\frac{1}{\varepsilon}w_e\frac{1}{(p+i(\xi+\eta))}\big)}dsd\eta\Bigg|^2 d\xi\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\frac{a_1^2\mu_\sigma^2}{2\mu_0}\|D\|^2_{\mathcal{H}^{\sigma,\sigma}(\mathbb{R}^2)}.$$

Также получим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{I_1}(1+|\eta|)^{\sigma}e^{-i(\xi-2\eta)t}\Psi_1(\xi-\eta,\eta)d\eta\right|^2 d\xi\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\frac{a_1^2\mu_\sigma^2}{2\mu_0}\|D\|^2_{\mathcal{H}^{\sigma,\sigma}(\mathbb{R}^2)},$$

где

$$\max_{\xi\in\mathbb{R},\eta\in I_1}\left\|L^{-1}_{p\to t}\frac{1}{p\Big(1+\frac{1}{\varepsilon}L_e(1-\frac{u_e}{L_e}\frac{\xi}{2(\xi-\eta)}-\frac{w_e}{L_e})\frac{1}{p}+\frac{1}{\varepsilon}w_e\frac{1}{(p+i\xi)}\Big)}\right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R})}\leqslant a_1.$$

Отсюда

$$\varepsilon\left\|\int_{I_1}e^{-i(\xi-2\eta)t}\Psi_1(\xi-\eta,\eta)d\eta\right\|_{W^1_\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))}\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon^{1/2}\frac{a_1\mu_\sigma}{\mu_0^{1/2}}\left(\|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma+1,\sigma}(\mathbb{R}^2)}+\|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma,\sigma+1}(\mathbb{R}^2)}\right),$$

где

$$\|g\|_{W^1_\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))}=\left\|\frac{d}{dt}g\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))}+\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))}.$$

Также

$$\left\|e^{-i\xi t}R_1^-(\xi)\right\|^2_{W^1_\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))}\leqslant\varepsilon^{1/2}\frac{a_1\mu_\sigma}{\mu_0^{1/2}}\left(\|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma+1,\sigma}(\mathbb{R}^2)}+\|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma,\sigma+1}(\mathbb{R}^2)}\right).$$

При этом

$$\varepsilon^2\|G_1\|^2_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))}\leqslant\frac{2a_1^2\mu_\sigma^2}{\mu_*(\mu_*-\mu_0)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{I_1}(1+|\eta|)^{2\sigma}(1+|\xi-\eta|)^{2\sigma}\times$$
$$\times((1+|\xi-\eta|)^2+(1+|\eta|)^{2\sigma})|D(\xi-\eta,\eta)|^2d\eta d\xi.$$

c) В то же время

$$\widehat{Z_2}(p,\xi)=\varepsilon\widehat{J}_1+\varepsilon\widehat{J}_2, \tag{31}$$

$$\widehat{J}_1 = -\int_{I_2} \widehat{M_2}(\xi-\eta,\eta,p)\frac{1}{(p+i\xi-2i\eta)}d\eta,\ \widehat{J}_2 = \frac{1}{(p-i\xi)}\int_{I_2}\widehat{M_2}(\xi-\eta,\eta,p)d\eta,$$

где

$$\widehat{M_2}(\xi-\eta,\eta,p) = \frac{D(\xi-\eta,\eta)}{p\left[1+\frac{1}{\varepsilon}L_e\left(1+\frac{\xi}{2\eta}\frac{w_e}{L_e}-\frac{u_e}{L_e}\right)\frac{1}{p}+\frac{1}{\varepsilon}u_e\frac{1}{(p-i\xi)}\right]}.$$

Тогда

$$J_2(t,\xi) = e^{i\xi t}\int_0^\infty e^{-i\xi s}\int_{I_2} M_2(\xi-\eta,\eta,s)d\eta ds + \\ + \int_t^\infty e^{i\xi(t-s)}\int_{I_2} M_2(\xi-\eta,\eta,s)d\eta ds$$

— обратное преобразование Лапласа J_2 второго члена $\widehat{J_2}$ в правой части (31), где $M_2(\xi-\eta,\eta,s) = L^{-1}_{p\to s}(\widehat{M_2}(\xi-\eta,\eta,p))$. Обратное преобразование Лапласа J_1 первого члена $\widehat{J_1}$ правой части (31):

$$J_1(t,\xi) = -\int_{I_2}\int_0^t e^{-i(\xi-2\eta)(t-s)}M_2(\xi-\eta,\eta,s)dsd\eta = \\ = -\int_{I_2} e^{-i(\xi-2\eta)t}\int_0^\infty e^{i(\xi-2\eta)s}M_2(\xi-\eta,\eta,s)dsd\eta + \\ + \int_{I_2}\int_t^\infty e^{-i(\xi-2\eta)(t-s)}M_2(\xi-\eta,\eta,s)dsd\eta.$$

Отсюда

$$Z_2(t,\xi) = \int_{I_2} e^{-i(\xi-2\eta)t}\Psi_2(\xi-\eta,\eta)d\eta + R_2^+(\xi)e^{i\xi t} + \varepsilon G_2(t,\xi),$$

где

$$\Psi_2(\xi-\eta,\eta) = -\int_0^\infty e^{i(\xi-2\eta)s}\mathcal{M}_2(\xi-\eta,\eta,s)ds,$$

$$R_2^+(\xi) = \varepsilon\int_0^\infty e^{-i\xi s}\int_{I_2} M_2(\xi-\eta,\eta,s)d\eta ds,$$

$$G_2(t,\xi) = \int_t^\infty e^{i\xi(t-s)}\int_{I_2} M_2(\xi-\eta,\eta,s)d\eta ds + \\ + \int_{I_2}\int_t^\infty e^{-i(\xi-2\eta)(t-s)}M_2(\xi-\eta,\eta,s)dsd\eta.$$

Так же как выше, получим оценки

$$\varepsilon\left\|\int_{I_2} e^{-i(\xi-2\eta)t}\Psi_2(\xi-\eta,\eta)d\eta\right\|_{W^1_\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))} \leqslant \\ \leqslant \varepsilon^{1/2}\frac{a_2\mu_\sigma}{\mu_0^{1/2}}\left(\|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma+1,\sigma}(\mathbb{R}^2)} + \|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma,\sigma+1}(\mathbb{R}^2)}\right),$$

$$\|e^{-i\xi t}R_2^+(\xi)\|^2_{W^1_\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))} \leqslant \varepsilon^{1/2}\frac{a_2\mu_\sigma}{\mu_0^{1/2}}\left(\|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma+1,\sigma}(\mathbb{R}^2)} + \|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma,\sigma+1}(\mathbb{R}^2)}\right),$$

$$\varepsilon^2\|G_2\|^2_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))} \leqslant \frac{2a_2^2\mu_\sigma^2}{\mu_*(\mu_*-\mu_0)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int_{I_2}(1+|\eta|)^{2\sigma}(1+|\xi-\eta|)^{2\sigma}\times$$
$$\times\left((1+|\xi-\eta|)^2+(1+|\eta|)^{2\sigma}\right)|D(\xi-\eta,\eta)|^2 d\eta d\xi.$$

d) И последнее. Суммируя, получим структуру решения

$$Z(t,\xi) = Z_0(t,\xi)+Z_1(t,\xi)+Z_2(t,\xi) =$$
$$= \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi-2\eta)t}\Psi(\xi-\eta,\eta)d\eta + R_2^+(\xi)e^{i\xi t} + R_1^-(\xi)e^{-i\xi t} + G(t,\xi),$$

где

$$G(t,\xi) = G_0(t,\xi)+G_1(t,\xi)+G_2(t,\xi),$$
$$\Psi(\xi,\eta) = \begin{cases} \Psi_0(\xi,\eta), & \eta\in I_0,\\ \Psi_1(\xi,\eta), & \eta\in I_1,\\ \Psi_2(\xi,\eta), & \eta\in I_2.\end{cases}$$

Сделав обратное преобразование Фурье $\xi\to x$, получим

$$\mathcal{Z}_D(t,x) = \varepsilon N_D(x-t,x+t) + \mathcal{R}_D^-(x-t) + \mathcal{R}_D^+(x+t) + \mathcal{G}_D(x,t),$$

где $Z_D(t,\xi)$, $R_D^\pm$, $G_D(x,\xi)$ — преобразование Фурье $\mathcal{Z}_D(t,x)$, $\mathcal{R}_d^\pm(t,x)$ и $\mathcal{G}_D(x,t)$ по x соответственно. Лемма 6 доказана. □

В дальнейшем решение $Z(t,\xi)$ задачи Коши (22) с точностью до правой части $Q^+(\xi)e^{i\xi t}+Q^-(\xi)e^{-i\xi t}+F(t,\xi)$ для

$$S = S_D = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi-2\eta)t}D(\xi-\eta,\eta)d\eta$$

будем обозначать через

$$Z(t,\xi) = T_\xi^{-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi-2\eta)t}D(\xi-\eta,\eta)d\eta\right).$$

Соответственно $\mathcal{Z}(t,x)$ — обратное преобразование Фурье:

$$Z(t,\xi) = T_\xi^{-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi-2\eta)t}D(\xi-\eta,\eta)d\eta\right) \quad (\xi\to x).$$

12. Билинейные формы. Теперь мы должны перенести результаты леммы 6 на задачу Коши для нелинейного уравнения

$$T_\xi y(t,\xi) = 2\varepsilon v_e^{1/2}(B(y,y)+L(y)) - 2\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} D^-(\xi-\eta)D^+(\eta)e^{-i(\xi-2\eta)t}d\eta \quad (32)$$

с точностью до правой части $R^{+}(\xi)e^{i\xi t}+R^{-}(\xi)e^{-i\xi t}+G(t,\xi)$. Рассмотрим вклад билинейных форм в случае

$$y(t,\xi)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\xi-2\eta)(t-s)}\Xi_D(\xi-\eta,\eta,s)dsd\eta+ \\ +T_\xi^{-1}(\Omega_\Upsilon(t,\xi))+T_\xi^{-1}(Y(t,\xi)),\quad Y(t,\xi)\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,\mathcal{H}^\sigma),$$

где $\Omega_\Upsilon=\Upsilon_-(\xi)e^{-i\xi t}+\Upsilon_+(\xi)e^{i\xi t}$. Тогда

$$B(y,y)=B(y_D,y_D)+L(y_D)+B(y_D,T_\xi^{-1}(\Omega_\Upsilon))+B(T_\xi^{-1}(\Omega_\Upsilon),y_D)+ \\ +B(T_\xi^{-1}(\Omega_\Upsilon),T_\xi^{-1}(\Omega_\Upsilon))+L(T_\xi^{-1}(\Omega_\Upsilon))+B(y_D+T_\xi^{-1}(\Omega_\Upsilon),T^{-1}Y)+ \\ +B(T^{-1}Y,y_D+T_\xi^{-1}(\Omega_\Upsilon))+B(T^{-1}Y,T^{-1}Y)+L(T^{-1}Y).$$

Случай $y=y_D$.

Сначала исследуем вклад билинейных форм в случае, когда

$$y(t,\xi)=y_D(t,\xi)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\xi-2\eta)(t-s)}\Xi_D(\xi-\eta,\eta,s)dsd\eta= \\ =\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\xi-2\eta)t}\Psi_D(\xi-\eta,\eta)d\eta+R_D^+(\xi)e^{i\xi t}+R_D^-(\xi)e^{-i\xi t}+G_D(t,\xi)$$

и Ξ_D, Ψ_D, $R_D^{\pm}$, G_D определяются леммой предыдущего параграфа. Тогда для обратного преобразование Фурье по x

$$F_{\xi\to x}^{-1}(y)(t,x)=\varepsilon N_D(x-t,x+t)+\mathcal{R}_D^-(x-t)+\mathcal{R}_D^+(x+t)+\mathcal{G}_D(x,t),$$

здесь билинейная форма

$$B(y,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{y(t,\xi-\eta)y(t,\eta)- \\ -\frac{1}{4}\Big(y(t,\xi-\eta)-i(\xi-\eta)\int_0^t e^{-i(\xi-\eta)(t-s)}y(s,\xi-\eta)ds\Big)\times \\ \times\Big(y(t,\eta)+i\eta\int_0^t e^{i\eta(t-s)}y(s,\eta)ds\Big)\Big\}d\eta,$$

$$y(t,\xi-\eta)-i(\xi-\eta)\int_0^t e^{-i(\xi-\eta)(t-s)}y(s,\xi-\eta)ds= \\ =\int_0^t e^{-i(\xi-\eta)(t-s)}\frac{d}{ds}y(s,\xi-\eta)ds,$$

$$y(t,\eta)+i\eta\int_0^t e^{i\eta(t-s)}y(s,\eta)ds=\int_0^t e^{i\eta(t-s)}\frac{d}{ds}y(s,\eta)ds.$$

Лемма 7. *Пусть Ξ_D, Ψ_D, $R^{\pm}_D$, G_D определяются леммой* 6. *Тогда существуют функции $D_B(\xi,\eta)$, $Q^{\pm}_B(\xi)$, $F_B(t,\xi)$ такие, что*

$$B(y,y) = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} D_B(\xi-\eta,\eta)e^{-i(\xi-2\eta)t}d\eta + Q^-_B(\xi)e^{-i\xi t} + Q^+_B(\xi)e^{i\xi t} + \varepsilon F_B(t,\xi),$$

для которых справедливы оценки

$$\varepsilon\left\|\int_{-\infty}^{\infty} D_B(\xi-\eta,\eta)e^{-i(\xi-2\eta)t}d\eta\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))} \leqslant$$
$$\leqslant c_1\varepsilon^{1/2}\left(\|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma+1,\sigma}(\mathbb{R}^2)} + \|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma,\sigma+1}(\mathbb{R}^2)}\right),$$

$$\varepsilon\|Q\pm_B(\xi)e^{-i\xi t}\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))} \leqslant c_1\varepsilon^{1/2}(\|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma+1,\sigma}(\mathbb{R}^2)} + \|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma,\sigma+1}(\mathbb{R}^2)}),$$
$$\varepsilon\|F_B\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))} \leqslant\ c_1(\|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma+1,\sigma}(\mathbb{R}^2)} + \|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma,\sigma+1}(\mathbb{R}^2)}).$$

Доказательство леммы 7 проводится аналогично приведённым выше. Оценки построенного решения следуют из оценок леммы 6.

Случай $y=y_D$ для формы $L(y)$.

Теперь исследуем вклад билинейной формы

$$L(y) = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{v_e^{1/2}}\left(D^-(\xi-\eta)e^{-i(\xi-\eta)t}\int_0^t e^{i\eta(t-s)}\frac{d}{ds}y(s,\eta)ds +\right.\right.$$
$$\left. + D^+(\eta)e^{i\eta t}\int_0^t e^{-i(\xi-\eta)(t-s)}\frac{d}{ds}y(s,\xi-\eta)ds\right) +$$
$$+ e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}\left[\widetilde{v}^0(\xi-\eta)y(t,\eta) + y(t,\xi-\eta)\widetilde{v}^0(\eta) - \right.$$
$$-\frac{1}{4}v^0(\xi-\eta)\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{\frac{1}{\varepsilon}L_e - i(\xi-\eta)}\int_0^t e^{i\eta(t-s)}\frac{d}{ds}y(s,\eta)ds -$$
$$\left.\left. -\frac{1}{4}v^0(\eta)\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{\frac{1}{\varepsilon}L_e + i\eta}\int_0^t e^{-i(\xi-\eta)(t-s)}\frac{d}{ds}y(s,\xi-\eta)ds\right]\right\}d\eta.$$

Лемма 8. *Пусть выполнены условия лемм* 6 *и* 7. *Тогда существуют функции $D_L(\xi,\eta)$, $Q^{\pm}_L(\xi)$, $F_L(t,\xi)$ такие, что*

$$L(y) = \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} D_L(\xi-\eta,\eta)e^{-i(\xi-2\eta)t}d\eta + Q^-_L(\xi)e^{-i\xi t} + Q^+_L(\xi)e^{i\xi t} + \varepsilon F_L B(t,\xi),$$

для которых справедливы оценки

$$\varepsilon\left\|\int_{-\infty}^{\infty} D_L(\xi-\eta,\eta)e^{-i(\xi-2\eta)t}d\eta\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))} \leqslant$$
$$\leqslant c_1\varepsilon^{1/2}(\|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma+1,\sigma}(\mathbb{R}^2)} + \|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma,\sigma+1}(\mathbb{R}^2)}),$$

$$\varepsilon\|Q\pm_L(\xi)e^{-i\xi t}\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))}\leqslant c_1\varepsilon^{1/2}\big(\|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma+1,\sigma}(\mathbb{R}^2)}+\|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma,\sigma+1}(\mathbb{R}^2)}\big),$$
$$\varepsilon\|F_L\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))}\leqslant\ c_1\big(\|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma+1,\sigma}(\mathbb{R}^2)}+\|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma,\sigma+1}(\mathbb{R}^2)}\big).$$

Доказательство леммы 7 проводится аналогично приведённым выше.

Случай для форм $B(y_D,T_\xi^{-1}(\Omega_\Upsilon))+B(T_\xi^{-1}(\Omega_\Upsilon),y_D)+B(T_\xi^{-1}(\Omega_\Upsilon),T_\xi^{-1}(\Omega_\Upsilon))+$ $+\,L(T_\xi^{-1}(\Omega_\Upsilon))$.

Теперь рассмотрим вклад билинейных форм

$$B(y_D,T_\xi^{-1}(\Omega_\Upsilon))+B(T_\xi^{-1}(\Omega_\Upsilon),y_D)+B(T_\xi^{-1}(\Omega_\Upsilon),T_\xi^{-1}(\Omega_\Upsilon))+L(T_\xi^{-1}(\Omega_\Upsilon)),$$

где

$$\Omega_\Upsilon)(t,\xi)=\Upsilon^+(\xi)\ e^{i\xi t}+\Upsilon^-(\xi)\ e^{-i\xi t}.$$

Лемма 9. *Пусть выполнены условия леммы* 6. *Тогда существуют* $D_\Omega(\xi,\eta)$, $\Upsilon^\pm_\Omega(\xi)$, $F_\Omega(t,\xi)$ *такие, что*

$$B(y_D,T_\xi^{-1}(\Omega_\Upsilon))+B(T_\xi^{-1}(\Omega_\Upsilon),y_D)+B(T_\xi^{-1}(\Omega_\Upsilon),T_\xi^{-1}(\Omega_\Upsilon))+L(T_\xi^{-1}(\Omega_\Upsilon))=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\xi-2\eta)t}D_\Omega(\xi-\eta,\eta)d\eta+Q^-_\Omega(\xi)e^{-i\xi t}+Q^+_\Omega(\xi)e^{i\xi t}+F_\Omega(t,\xi),$$

и справедливы оценки

$$\varepsilon\left\|\int_{-\infty}^{\infty}D_\Omega(\xi-\eta,\eta)e^{-i(\xi-2\eta)t}d\eta\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))}\leqslant$$
$$\leqslant c_2\varepsilon^{1/2}\big(\|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma+1,\sigma}(\mathbb{R}^2)}+\|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma,\sigma+1}(\mathbb{R}^2)}\big),$$

$$\varepsilon\|Q^\pm_\Omega(\xi)e^{-i\xi t}\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))}\leqslant c_2\varepsilon^{1/2}\big(\|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma+1,\sigma}(\mathbb{R}^2)}+\|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma,\sigma+1}(\mathbb{R}^2)}\big),$$
$$\varepsilon\|F_\Omega\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))}\leqslant\ c_2\big(\|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma+1,\sigma}(\mathbb{R}^2)}+\|D\|_{\mathcal{H}^{\sigma,\sigma+1}(\mathbb{R}^2)}\big).$$

Доказательство леммы 8 проводится аналогично приведённым выше.

13. Сведение к нелинейному уравнению в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma)$. Наша задача свести уравнение

$$T_\xi y(t,\xi)=\frac{1}{\varepsilon}h(t,\xi)+H(t,\xi)+2\varepsilon v_e^{1/2}B(y,y)+2\varepsilon v_e^{1/2}L(y)+$$
$$+\,2\frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{w_e}{v_e^{1/2}}D^-(\xi)e^{-i\xi t}+\frac{u_e}{v_e^{1/2}}D^+(\xi)e^{i\xi t}\Big)-$$
$$-\,2\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}D^-(\xi-\eta)D^+(\eta)e^{-i(\xi-2\eta)t}d\eta\qquad(33)$$

к нелинейному уравнению в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma)$.

Решение (33) будем искать в виде

$$y(t,\xi) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi-2\eta)(t-s)} \Xi_D(\xi-\eta,\eta,s)dsd\eta +$$
$$+ T_\xi^{-1}\left(\Upsilon_-(\xi)e^{-i\xi t} + \Upsilon_+(\xi)e^{i\xi t}\right) + T_\xi^{-1}(Y(t,\xi)), \quad Y(t,\xi) \in L_{2,\gamma}(R_+,\mathcal{H}^\sigma).$$

Тогда в силу лемм 6–8 (33) примет следующий вид:

$$T_\xi y_D(t,\xi) + \Omega_\Upsilon(t,\xi) + Y(t,\xi) = \frac{1}{\varepsilon}h(t,\xi) + H(t,\xi) +$$
$$+ 2\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi-2\eta)t}\left(v_e^{1/2}\varepsilon(D_B + D_L + D_\Omega)(\xi-\eta,\eta) - D^-(\xi-\eta)D^+(\eta)\right)d\eta +$$
$$+ 2\frac{1}{\varepsilon}\Big(\Big[\frac{w_e}{v_e^{1/2}}D^-(\xi) + \varepsilon^2 v_e^{1/2}(Q_B^- + Q_L^- + Q_\Omega^-)(\xi)\Big]e^{-i\xi t} +$$
$$+ \Big[\frac{u_e}{v_e^{1/2}}D^+(\xi) + \varepsilon^2 v_e^{1/2}(Q_B^+ + Q_L^+ + Q_\Omega^+)(\xi)\Big]e^{i\xi t}\Big) +$$
$$+ 2\varepsilon^2 v_e^{1/2}(F_\Omega(t,\xi) + F_Y(t,\xi)) + 2\varepsilon v_e^{1/2}(B(T^{-1}Y, T^{-1}Y) + L(T^{-1}Y)), \quad (34)$$

где

$$y_D(t,\xi)) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi-2\eta)(t-s)} \Xi_D(\xi-\eta,\eta,s)d\eta ds,$$
$$\Omega_\Upsilon(t,\xi) = \Upsilon^+(\xi)e^{i\xi t} + \Upsilon^-(\xi)e^{-i\xi t}.$$

В правой части (34) мы получили секулярные (неинтегрируемые члены). Чтобы их уничтожить, достаточно в силу первой части леммы 6 выбрать $D(\xi,\eta)$ в $\Xi_D(\xi-\eta,\eta,s)$ из уравнения

$$D(\xi,\eta) = 2(v_e^{1/2}\varepsilon(D_B + D_L + D_\Omega)(\xi,\eta) - D^-(\xi)D^+(\eta))$$

и функции $\Upsilon^\pm(\xi)$ из уравнений

$$\Upsilon^-(\xi) = 2\frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{w_e}{v_e^{1/2}}D^-(\xi) + \varepsilon^2 v_e^{1/2}(Q_B^- + Q_L^- + Q_\Omega^-)(\xi)\Big),$$
$$\Upsilon^+(\xi) = 2\frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{u_e}{v_e^{1/2}}D^+(\xi) + \varepsilon^2 v_e^{1/2}(Q_B^+ + Q_L^+ + Q_\Omega^+)(\xi)\Big).$$

Тогда мы сведём уравнение (33) к нелинейному уравнению в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma)$:

$$Y(t,\xi) = \frac{1}{\varepsilon}h(t,\xi) + H(t,\xi) + 2\varepsilon^2 v_e^{1/2}(F_B(t,\xi) + F_\Omega(t,\xi) + F_Y(t,\xi)) +$$
$$+ 2\varepsilon v_e^{1/2}(B(T^{-1}Y, T^{-1}Y) + L(T^{-1}Y)), \quad (35)$$

существование решения которого следует из результатов теоремы 1.

14. Условие несекулярности (общий случай). Таким образом, у нас возникли секулярные неинтегрируемые члены, которые мы можем аннулировать, решив систему алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
D(\xi,\eta) &= -2D^-(\xi)D^+(\eta) + 2v_e^{1/2}\varepsilon(D_B + D_L + D_\Omega)(\xi,\eta),\\
\Upsilon^-(\xi) &= \frac{1}{\varepsilon}\frac{2w_e}{v_e^{1/2}}D^-(\xi) + 2\varepsilon v_e^{1/2}(Q_B^-(\xi) + Q_L^-(\xi) + Q_\Omega^-(\xi)),\\
\Upsilon^+(\xi) &= \frac{1}{\varepsilon}\frac{2u_e}{v_e^{1/2}}D^+(\xi) + 2\varepsilon v_e^{1/2}(Q_B^+(\xi) + Q_L^+(\xi) + Q_\Omega^+(\xi)),
\end{aligned}
$$

которую мы назовём условием несекулярности.

Доказательство существования решения $D(\xi,\eta)$, $\Upsilon^\pm(\xi)$ условия несекулярности аналогично доказательству разрешимости условия несекулярности в [1]. И, как мы отмечали выше, разрешимость условия несекулярности позволяет свести уравнение (34) к уравнению (35) в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^\sigma)$, существование решения которого следует из результатов теоремы 1. Это заканчивает исследование общего случая комплекснозначных начальных данных.

Замечание. Приведённые выше рассуждения имеют общий характер, что позволяет перенести доказательства на двумерное и трёхмерное кинетические уравнения, естественно, с большими техническими сложностями, что не является предметом печатаемой статьи. Более того, свойства дискретных кинетических уравнений близки к свойствам кинетического уравнения Больцмана—Пайерса [7], что даёт надежду на доказательство подобных результатов для кинетического уравнения Больцмана—Пайерса.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 09–01–12024, 09–01–00288, 11–01–12082-офи_м).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Е. В. Радкевич*, “О существовании глобальных решений задачи Коши для дискретных кинетических уравнений (непериодический случай)” // *Пробл. мат. анал.*, 2012. Т. 62; англ. пер.: *E. V. Radkevich*, “The existence of global solutions to the cauchy problem for discrete kinetic equations” // *J. Math. Sci., New York*, 2012. Vol. 181, no. 2. Pp. 232-280.
2. *T. E. Broadwell*, “Study of rarified shear flow by the discrete velocity method” // *J. Fluid Mech.*, 1964. Vol. 19, no. 3. Pp. 401–414.
3. *С. К. Годунов, У. М. Султангазин*, “О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана” // *УМН*, 1971. Т. 26, № 3(159). С. 3–51; англ. пер.: *S. K. Godunov, U. M. Sultangazin*, “On discrete models of the kinetic Boltzmann equation” // *Russian Math. Surveys*, 1971. Vol. 26, no. 3. Pp. 1–56.
4. *L. Boltzmann*, “On the Maxwell method to the reduction of hydrodynamic equations from the kinetic gas theory” / *Rep. Brit. Assoc.* London, 1894. Pp. 579; русск. пер.: *Л. Больцман*, “О максвелловском методе вывода уравнений гидродинамики из кинетической теории газов” / В сб.: *Избранные труды*: Молекулярно-кинетическая теория газов. Термодинамика. Статистическая механика. Теория излучения. Общие вопросы физики; ред. Л. С. Полак. М.: Наука, 1984. С. 307–308.
5. *В. В. Веденяпин*, Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001. 112 с. [*V. V. Vedenyapin*, Kinetic Boltzmann and Vlasov Equations. Moscow: Fizmatlit, 2001. 112 pp.]
6. *S. Chapman, T. G. Cowling*, The mathematical theory of non-uniform gases. An account

of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction and diffusion in gases. Cambridge: Cambridge University Press, 1970. xxiv+423 pp.

7. *R. Peierls*, "Zur kinetischen Theorie der Wärmeleitung in Kristallen" // *Ann. Phys.*, 1929. Vol. 395, no. 8. Pp. 1055–1101.

Поступила в редакцию 18/X/2012;
в окончательном варианте — 25/XII/2012.

MSC: 35Q20; 35C20, 35Q82, 82B40

ON PROBLEM OF NONEXISTENCE OF DISSIPATIVE ESTIMATE FOR DISCRETE KINETIC EQUATIONS

E. V. Radkevich

M. V. Lomonosov Moscow State University,
Faculty of Mechanics and Mathematics,
Vorob'evy gory, Moscow, Russia, 119899.

E-mail: `evrad07@gmail.com`

The existence of a global solution to the discrete kinetic equations in Sobolev spaces is proved, its decomposition by summability is obtained, the influence of its oscillations generated by the interaction operator is explored. The existence of a submanifold $\mathcal{M}_{diss}$ of initial data (u^0, v^0, w^0) for which the dissipative solution exists is proved. It's shown that the interaction operator generates the solitons (progressive waves) as the nondissipative part of the solution when the initial data (u^0, v^0, w^0) deviate from the submanifold $\mathcal{M}_{diss}$. The amplitude of solitons is proportional to the distance from (u^0, v^0, w^0) to the submanifold $\mathcal{M}_{diss}$. It follows that the solution can stabilize as $t \to \infty$ only on compact sets of spatial variables.

Key words: *dissipative estimates, discrete kinetic equations.*

Original article submitted 18/X/2012;
revision submitted 25/XII/2012.

Evgenii V. Radkevich (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Professor, Dept. of Differential Equations.