УДК 517.968.78

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВОЛНОВЫМ ОПЕРАТОРОМ И СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПРИ МЛАДШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Р. Р. Раянова

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: rayanova.rina@gmail.com

Рассмотрена краевая задача в характеристическом квадрате с данными на параллельных характеристиках для системы гиперболических уравнений с волновым оператором и сингулярным матричным коэффициентом при младшей производной. В характеристических координатах указанная система дифференциальных уравнений редуцируется к системе уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу. С использованием известного решения задачи Коши с данными на линии сингулярности матричного коэффициента задача редуцируется к системе интегральных уравнений Карлемана. На основе проведённых ранее автором данной статьи исследований по разрешимости систем обобщённых интегральных уравнений Абеля в работе найдено в явном виде решение указанной краевой задачи.

Ключевые слова: *дробное исчисление Римана—Лиувилля, функции от матриц, интегро-дифференциальные операторы матричного порядка, система обобщенных интегральных уравнений Абеля, интегральное уравнение Карлемана.*

Обозначим через M_n — множество постоянных матриц порядка n. Пусть $\Lambda(G)$ — спектр матрицы $G \in M_n$; λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ — собственные значения матрицы G.

В области $D = \{(x, y) : 0 < x + y < 1, 0 < x - y < 1\}$ рассмотрим систему уравнений

$$u_{xx} - u_{yy} - \frac{2G}{y} u_y = 0, \tag{1}$$

где $u(x, y) = \big(u_1(x, y), u_2(x, y), \ldots, u_n(x, y)\big)^\top$ — вектор искомых функций, $\Lambda(G) \in (0, 1/2)$.

Пусть $D_0 = D \cap \{y > 0\} = \{(x, y) : 0 < x + y < 1, 0 < x - y < 1, y > 0\}$, $D_1 = D \cap \{y < 0\} = \{(x, y) : 0 < x + y < 1, 0 < x - y < 1, y < 0\}$.

Обозначим $\theta_0\big(x/2, x/2\big)$ и $\theta_1\big((1 + x)/2, (x - 1)/2\big)$ — точки пересечения характеристик $x - y = 0$ и $x - y = 1$ с характеристикой другого семейства, выходящей из точки $(x, 0)$.

Задача 1. *Найти вектор-функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим свойствам:*

1) $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D_0 \cup D_1)$,
2) $u(x, y)$ *удовлетворяет системе* (1) *в области* $D_0 \cup D_1$,
3) $u(\theta_0) = \varphi(x), \quad x \in [0, 1]$,
4) $u(\theta_1) = \psi(x), \quad x \in [0, 1]$,
5) $\lim\limits_{y\to 0-} (-y)^{2G} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim\limits_{y\to 0+} y^{2G} \frac{\partial u}{\partial y}$,

---

Рина Ринатовна Раянова, ассистент, каф. прикладной математики и информатики.

где $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$, $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x))$, y^{2G} — *показательная функция матричного аргумента* [1].

Нетрудно показать, что в характеристических координатах $\xi = x - y$ и $\eta = x + y$ область D_0 преобразуется в область $H = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \eta < 1\}$, а система дифференциальных уравнений (1) редуцируется к системе дифференциальных уравнений Эйлера—Пуссона—Дарбу следующего вида:

$$u_{\xi,\eta} - G\frac{u_\eta - u_\xi}{\eta - \xi} = 0. \tag{2}$$

В характеристических координатах $\xi = x+y$ и $\eta = x-y$ область D_1 преобразуется в ту же самую область H, а система дифференциальных уравнений (1) — в систему дифференциальных уравнений Эйлера—Пуссона—Дарбу (2).

Для решения поставленной задачи воспользуемся решением задачи Коши с данными

$$u(\xi, \xi) = \tau(\xi), \quad \xi \in [0, 1], \tag{3}$$

$$\lim_{\eta-\xi\to 0+}\Big(\frac{\eta - \xi}{2}\Big)^{2G}(u_\eta - u_\xi) = \nu(\xi), \quad \xi \in (0, 1), \tag{4}$$

где τ, ν — заданные n-мерные вектор-функции.

Решение уравнения Эйлера—Пуссона—Дарбу в скалярном случае [2] нетрудно обобщить на матричный. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть спектр матрицы G принадлежит интервалу* $(0, 1/2)$. *Тогда регулярное в характеристической области H решение задачи Коши* (3), (4) *может быть записано в виде*

$$u(\xi, \eta) = k_1(G)(\eta - \xi)^{E-2G}\int_\xi^\eta [(\eta - t)(t - \xi)]^{-(E-G)}\tau(t)dt + \\ + k_2(G)2^{2G-E}\int_\xi^\eta [(\eta - t)(t - \xi)]^{-G}\nu(t)dt, \tag{5}$$

где $k_1(G) = \Gamma(2G)\Gamma^{-2}(G)$, $k_2(G) = \Gamma(E - 2G)\Gamma^{-2}(E - G)$, $\tau(\xi), \nu(\xi) \in C^2(0, 1)$, E — *единичная матрица, причём функция $\nu(\xi)$ на концах интервала* $(0, 1)$ *может иметь интегрируемые особенности.*

Располагая решением задачи Коши (5) для систем уравнений (2), можно показать, что решение системы уравнений (1) в области D_0 с данными 3) и

$$\lim_{y\to 0+} y^{2G}\frac{\partial u}{\partial y} = \nu_+(x),$$

и в области D_1 — с данными 4) и

$$\lim_{y\to 0-} y^{2G}\frac{\partial u}{\partial y} = \nu_-(x),$$

соответственно, имеют вид

$$u_+(x,y)=\Gamma^{-1}(G)\int_0^1[s(1-s)]^{-(E-G)}(x-y+2ys)^{E-G}\times$$
$$\times D^G_{0,x-y+2ys}(x-y+2ys)^{2G-E}\varphi(x-y+2ys)ds+$$
$$+\Gamma^{-2}(E-G)\Gamma(E-2G)y^{2G-E}\int_0^1[s(1-s)]^{-G}\nu_+(x-y+2ys)ds-$$
$$-\Gamma^{-1}(G)\Gamma(E-2G)\Gamma^{-1}(E-G)2^{2G-E}\times$$
$$\times\int_0^1[s(1-s)]^{-(E-G)}I^{E-2G}_{0,x-y+2ys}\nu_+(x-y+2ys)ds; \quad (6)$$

$$u_-(x,y)=-\Gamma^{-1}(G)\int_0^1[s(1-s)]^{-(E-G)}(1-x+y-2ys)^{E-G}\times$$
$$\times D^G_{x-y+2ys,1}(1-x+y-2ys)^{2G-E}\psi(x-y+2ys)ds-$$
$$-\Gamma^{-2}(E-G)\Gamma(E-2G)(-y)^{E-2G}\int_0^1[s(1-s)]^{-G}\nu_-(x-y+2ys)ds+$$
$$+\Gamma^{-1}(G)\Gamma(E-2G)\Gamma^{-1}(E-G)2^{2G-E}\times$$
$$\times\int_0^1[s(1-s)]^{-(E-G)}I^{E-2G}_{x-y+2ys,1}\nu_-(x-y+2ys)ds. \quad (7)$$

Здесь (формулы (6) и (7)) и далее предполагается, что функции $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$, $\nu_i(x)$, $i=1,2,\ldots,n$, удовлетворяют следующим условиям:

$$\nu_i(x)\in C[0,1],\quad \nu_i(x)\in C^1(0,1),\quad \nu_i'(x)\in L(0,1),\quad \nu_i(0)=\nu_i(1)=0;$$
$$\varphi_i(x)\in C[0,1],\quad \varphi_i(x)\in C^2(0,1),\quad \varphi_i''(x)\in L(0,1),\quad \varphi_i(0)=\varphi_i(1)=0;$$
$$\psi_i(x)\in C[0,1],\quad \psi_i(x)\in C^2(0,1),\quad \psi_i''(x)\in L(0,1),\quad \psi_i(0)=\psi_i(1)=0.$$

Найдём значения функций $u_+(x,y)$ и $u_-(x,y)$ на границе $y=0$:

$$u_+(x,0)=\Gamma(G)\Gamma^{-1}(2G)x^{E-G}D^G_{0+}x^{2G-E}\varphi(x)-$$
$$-\Gamma^{-1}(E-G)\Gamma(E-2G)\Gamma(G)\Gamma^{-1}(2G)2^{2G-E}I^{E-2G}_{0+}\nu_+(x), \quad (8)$$

$$u_-(x,0)=-\Gamma(G)\Gamma^{-1}(2G)(1-x)^{E-G}D^G_{1-}(1-x)^{2G-E}\psi(x)+$$
$$+\Gamma^{-1}(E-G)\Gamma(E-2G)\Gamma(G)\Gamma^{-1}(2G)2^{2G-E}I^{E-2G}_{1-}\nu_-(x). \quad (9)$$

По условию задачи предполагается, что искомая вектор-функция $u(x,y)\in C(\overline{D})$. Это означает, что $u_+(x,0)=u_-(x,0)=u(x,0)$. Приравнивая правые части равенств (8) и (9), приходим к системе интегральных уравнений типа системы обобщённых уравнений Абеля:

$$l_1(G)I^{E-2G}_{0+}\nu(x)+l_1(G)I^{E-2G}_{1-}\nu(x)=$$
$$=l_2(G)x^{E-G}D^G_{0+}x^{2G-E}\varphi(x)-l_2(G)(1-x)^{E-G}D^G_{1-}(1-x)^{2G-E}\psi(x),$$

где $l_1(G)=\Gamma^{-1}(E-G)\Gamma(E-2G)\Gamma(G)\Gamma^{-1}(2G)2^{2G-E}$ и $l_2(G)=\Gamma(G)\Gamma^{-1}(2G)$.

Полученная система интегральных уравнений сводится к системе интегральных уравнений Карлемана. Действительно, записывая интегральные операторы I_{0+}^{E-2G} и I_{1-}^{E-2G} по определениям левостроннего и правостороннего матричного интегрального оператора Римана—Лиувиля [3, 4], получим

$$l_1(G)\Gamma^{-1}(E-2G)\left(\int_0^x (x-t)^{-2G}\nu(t)dt + \int_x^1 (t-x)^{-2G}\nu(t)dt\right) = f(x),$$

где

$$f(x) = l_2(G)x^{E-G}D_{0+}^{G}x^{2G-E}\varphi(x) - l_2(G)(1-x)^{E-G}D_{1-}^{G}(1-x)^{2G-E}\psi(x).$$

В итоге имеем

$$\int_0^1 |x-t|^{-2G}\nu(t)dt = g(x), \qquad (10)$$

где

$$g(x) = \Gamma(E-G)2^{E-2G}\big(x^{E-G}D_{0+}^{G}x^{2G-E}\varphi(x) - (1-x)^{E-G}D_{1-}^{G}(1-x)^{2G-E}\psi(x)\big).$$

Используя результаты работы [5], решение системы интегральных уравнений (10) можно найти как частный случай решения системы обобщённых интегральных уравнений Абеля

$$AI_{0+}^{E-2G}\varphi + BI_{1-}^{E-2G}\varphi = g(x)$$

при $A = B = E$.

Пусть $\Omega = [a,b]$, где $-\infty < a < b < +\infty$. Будем говорить, что вектор-функция $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ с областью определения $D_f = \Omega$ удовлетворяет условию Гёльдера порядка $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, если

$$\forall x_1, x_2 \in \Omega \quad |f_k(x_1) - f_k(x_2)| \leqslant A_k|x_1 - x_2|^{\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где A_k — постоянные, а λ_k — показатель Гёльдера.

Определение 1. Через $H^\lambda = H^\lambda(\Omega)$ обозначим класс вектор-функций $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ с областью определения $D_f = \Omega$, каждая компонента которых удовлетворяет на Ω условию Гёльдера со своими фиксированными значениями A_k и λ_k.

Определение 2. Через $H^* = H^*(a,b)$ обозначим класс вектор-функций $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$, для которых существуют такие мультииндексы $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)$ и $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$, что

$$f(x) = \frac{f^*(x)}{(x-a)^{1-\epsilon}(b-x)^{1-\delta}},$$

где $f^*(x) \in H^\lambda([a,b])$ и каждой компоненте вектора $f(x)$ соответствуют свои фиксированные значения мультииндексов λ, ϵ и δ.

Определение 3. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс. Через H_α^* обозначим класс вектор-функций $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ таких, что

$$f(x) = \frac{f^*(x)}{(x-a)^{1-\alpha-\epsilon}(b-x)^{1-\alpha-\delta}},$$

где $0 < \epsilon_k < 1 - \alpha_k$, $0 < \delta_k < 1 - \alpha_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, а каждая компонента вектора $f^*(x)$ принадлежит своему классу $\tilde{H}_{\alpha_k}$, который определён в [6].

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть матрица* $G \in M_n$, *спектр* $\Lambda(G) \subset (0, 1/2)$. *Пусть матрица* $T \in M_n$ *является матрицей преобразования* G *к жордановому виду* $\Lambda_G = TGT^{-1}$. *Пусть вектор* $Tg(x) \in H^*_\alpha$, *где* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_k = 1 - 2\lambda_k$, $\lambda_k \in \Lambda(G)$. *Тогда единственное решение системы интегральных уравнений* (10) *в классе вектор-функций, таких, что* $T\nu(x) \in H^*$, *имеет вид*

$$\nu(x) = \Big(L\Gamma(E - 2G)\Big)^{-1} D_{a+}^{E-2G}\Big(E - Z(x) D_{a+}^{2G} I_{b-}^{2G} Z^{-1}(x)\Big) g(x), \tag{11}$$

где

$$Z(x) = \left(\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\right)^{E-2G}, \quad L = 4\cos^2\Big(\frac{\pi}{2}(E - 2G)\Big).$$

Подставляя найденное в формуле (11) выражение для вектора $\nu(x)$ в формулы (6), (7), найдём окончательно выражения искомых вектор-функций $u_+(x, y)$ и $u_-(x, y)$, определяющих решение задачи 1 в областях $\overline{D_0}$ и $\overline{D_1}$ соответственно, а следовательно, и решение $u(x, y)$ в области $\overline{D} = \overline{D_0} \cup \overline{D_1}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ф. Р. Гантмахер*, Теория матриц. М.: Наука, 1988. 549 с. [*F. R. Gantmakher*, Theory of matrices. Moscow: Nauka, 1988. 549 pp.]
2. *А. А. Андреев*, “О методе Римана для одной системы уравнений гиперболического типа с кратными характеристиками” / В сб.: *Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики*. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1981. С. 13–16. [*A. A. Andreev*, “On the Riemann method for one system hyperbolic equations with multiple characteristics” / In: *Correct Boundary Value Problems for Nonclassical Equations of Mathematical Physics*. Novosibirsk: IM SOAN SSSR, 1981. Pp. 13–16].
3. *А. А. Андреев*, “Нелокальные краевые задачи для одной модельной вырождающейся системы гиперболического типах” / В сб.: *Краевые задачи для уравнений математической физики*. Куйбышев: Куйбыш. гос. пед. ин-т, 1990. С. 3–6. [*A. A. Andreev*, “Nonlocal boundary value problems for a model degenerate system of hyperbolic type” / In: *Boundary value problems for equations in mathematical physics*. Kuybyshev: Kuybyshev. Gos. Ped. Inst., 1990. Pp. 3–6].
4. *А. А. Андреев*, “Об одном обобщении операторов дробного интегро-дифференцирования и его приложениях” / В сб.: *Интегральные уравнения и краевые задачи математической физики*: Матер. Всессоюзной конф.. Владивосток, 1990. С. 91. [*A. A. Andreev*, “On one generalization of fractional integro-differentiation operators and its applications” / In: *Integral Equations and Boundary Value Problems of Mathematical Physics*. Vladivostok, 1990. Pp. 91].
5. *Р. Р. Исмагилова*, “Решение полного матричного аналога обобщённого уравнения Абеля с постоянными коэффициентами” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 1(22). С. 93–98. [*R. R. Ismagiliva*, “The solution of the full matrix analogue of the generalized Abel equation with constant coefficients” // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2011. no. 1(22). Pp. 93–98].

6. *С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев*, Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с. [*S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev*, Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications. Minsk: Nauka i Tekhnika, 1987. 688 pp.]

Поступила в редакцию 29/X/2012;
в окончательном варианте — 27/I/2013.

MSC: 35L80

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF HYPERBOLIC EQUATIONS WITH THE WAVE OPERATOR AND A SINGULAR COEFFICIENT AT LOWER DERIVATIVE

R. R. Rayanova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: `rayanova.rina@gmail.com`

The boundary value problem with data given on the parallel characteristics for the system of hyperbolic equations with the wave operator and the singular matrix coefficient at the lower derivative is considered in the characteristic square. This system of differential equations in the characteristic coordinates can be reduced to the system of Euler–Poisson–Darboux equations. Using the known solution of Cauchy problem with data given on the singularity line of matrix coefficient, we reduce the problem to the Carleman system of integral equations.The explicit solution of the considered boundary value problem is constructed using the results of previous research on the solvability of the systems of generalized Abel integral equations, made by the author.

Key words: *Riemann–Liouville fractional calculation, matrix functions, integral-differentional operators of matrix order, system of generalized Abel integral equations, Carleman integral equation.*

Original article submitted 29/X/2012;
revision submitted 27/I/2013.

Rina R. Rayanova, Assistent, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.