УДК 517.956.6

О ЗАДАЧЕ С ОБОБЩЁННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

О. А. Репин[1,2]***, С. К. Кумыкова***[3]

[1] Самарский государственный экономический университет,
443090, Россия, Самара, ул. Советской Армии, 141.
[2] Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
[3] Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова
Россия, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

E-mails: matstat@mail.ru, bsk@rect.kbsu.ru

Для уравнения смешанного типа с перпендикулярными линиями вырождения исследована нелокальная задача, когда на эллиптической части границы области задано условие Дирихле, а в гиперболических частях обобщённые производные от значений решения на характеристиках поточечно связаны со значениями решения и нормальных производных от неё на линиях параболического вырождения.

Ключевые слова: *нелокальная задача, регулярное решение, операторы дробного интегро-дифференцирования, задача Коши, уравнение Фредгольма, сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши, регуляризатор, уравнение Абеля.*

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$|y|^k u_{xx} + \operatorname{sign}(xy)|x|^k u_{yy} = 0, \quad k > 0 \tag{1}$$

в конечной односвязной области Ω, ограниченной кривой Жордана σ с концами в точках $A(1;0)$, $B(0;1)$, расположенной в первом квадрате $x > 0$, $y > 0$, и характеристиками

$$BC : (-x)^p + y^p = 1, \quad CD : x + y = 0, \quad AD : x^p + (-y)^p = 1,$$

$2p = k + 2$ уравнения (1).

Обозначим через Ω_1 и Ω_2 гиперболические части смешанной области Ω, где $x > 0$ и $x < 0$ соответственно, а через Ω_3 — эллиптическую часть области Ω; I_1 (I_2) — интервал $0 < x < 1$ $(0 < y < 1)$ прямой $y = 0$ $(x = 0)$.

Пусть $(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} f)(x)$ и $(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta} f)(x)$ — операторы обобщённого дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a, b; c; z)$, введённые в работе [1] (см. также [2, с. 326–327]) и имеющие при действительных α, β, η и $x > 0$ вид

$$(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} f)(x) = \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F\Big(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; 1 - \frac{t}{x}\Big) f(t)dt \quad (\alpha > 0), \tag{2}$$

$$(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} f)(x) = \Big(\frac{d}{dx}\Big)^n (I_{0+}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n} f)(x) \qquad (\alpha \leqslant 0, n = [-\alpha] + 1); \tag{3}$$

Олег Александрович Репин (д.ф.-м.н., проф.), зав. кафедрой, каф. математической статистики и эконометрики[1]; профессор, каф. прикладной математики и информатики[2].
Светлана Каншубиевна Кумыкова (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. теории функций и функционального анализа.

$$(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x)=\frac{(1-x)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_x^1(t-x)^{\alpha-1}F\Big(\alpha+\beta,-\eta;\alpha;\frac{t-x}{1-x}\Big)f(t)dt\ \ (\alpha>0),\tag{4}$$

$$(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x)=\Big(-\frac{d}{dx}\Big)^n(I_{1-}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n}f)(x)\qquad(\alpha\leqslant 0,n=[-\alpha]+1).\tag{5}$$

Определение. Под регулярным в области Ω решением уравнения (1) понимается функция $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)\cap C^2(\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3)$, удовлетворяющая уравнению (1) и такая, что $u_y(x,0)$, $u_x(0,y)$ на концах интервалов I_1, I_2 могут обращаться в бесконечность порядка не выше $1-2\beta$.

Задача А. *Найти регулярное в области* Ω *решение* $u(x,y)$ *уравнения* (1), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(x,y)=\varphi(x,y)\quad\forall(x,y)\in\sigma,$$

$$\begin{gathered}a_1(x)I_{0+}^{\beta-1,1-2\beta,0}u[\Theta_0^1(t)]+b_1(x)I_{1-}^{\beta-1,1-2\beta,0}u[\Theta_1^1(t)]+\\+c_1(x)u_y(x,0)+d_1(x)u(x,0)=f_1(x)\quad\forall x\in I_1,\\ a_2(y)I_{0+}^{\beta-1,1-2\beta,0}u[\Theta_0^2(t)]+b_2(y)I_{1-}^{\beta-1,1-2\beta,0}u[\Theta_1^2(t)]+\\+c_2(y)u_x(0,y)+d_2(y)u(0,y)=f_2(y)\quad\forall y\in I_2,\end{gathered}\tag{6}$$

где

$$\beta=\frac{k}{2k+4},\quad 0<\beta<\frac12,\quad\frac{1}{2p}=\frac12-\beta,$$

$\Theta_0^i(x)$ *и* $\Theta_1^i(x)$ *— точки пересечения характеристик уравнения* (1), *выходящих из точек* $(x,0)\in I_1$ *и* $(0,y)\in I_2$ *с характеристиками* OD, AD *и* OC, BC *соответственно;* $\varphi(x,y)$, $a_i(t)$, $b_i(t)$, $c_i(t)$, $d_i(t)$, $f_i(t)$ *— заданные непрерывные функции такие, что*

$$\begin{gathered}a_i^2(t)+b_i^2(t)+c_i^2(t)+d_i(t)^2\neq 0,\quad t\in I_i,\quad i=1,2,\\ \varphi(x,y)\in C^1(\sigma),\quad a_i(t),b_i(t),c_i(t),d_i(t),f_i(t)\in C^{(2,h)}(\overline{I_i}),\quad h>0.\end{gathered}\tag{7}$$

Отметим, что задача А относится к классу краевых задач со смещением (по терминологии А. М. Нахушева [3]).

Нелокальные задачи для уравнений с двумя линиями вырождения были объектом исследования в публикациях [4–7].

2. Единственность решения задачи А. Решение задачи Коши для уравнения (1) с данными на линии вырождения $y=0$ в области Ω_1 даётся формулой [4, 8]

$$\begin{gathered}u(x,y)=-2^{3-4\beta}p\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}xy\int_{a^{\frac1p}}^{b^{\frac1p}}t^{2p-1}(t^{2p}-a^2)^{\beta-1}(b^2-t^{2p})^{\beta-1}\tau_1(t)dt-\\-2^{4\beta-1}p\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\int_{a^{\frac1p}}^{b^{\frac1p}}t^{2p-2}(t^{2p}-a^2)^{-\beta}(b^2-t^{2p})^{-\beta}\nu_1(t)dt,\end{gathered}\tag{8}$$

где $a = x^p - (-y)^p$, $b = x^p + (-y)^p$, $\tau_1(x) = u(x,0)$, $\nu_1(x) = u_y(x,0)$, а в области Ω_2 даётся формулой

$$u(x,y) = -2^{3-4\beta} p \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} xy \int_{c^{\frac{1}{p}}}^{d^{\frac{1}{p}}} t^{2p-1}(t^{2p}-c^2)^{-1+\beta}(d^2-t^{2p})^{-1+\beta}\tau_2(t)dt-$$
$$- 2^{4\beta-1} p \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)} \int_{c^{\frac{1}{p}}}^{d^{\frac{1}{p}}} t^{2p-2}(t^{2p}-c^2)^{-\beta}(d^2-t^{2p})^{-\beta}\nu_2(t)dt, \quad (9)$$

где $\tau_2(t) = u(t,0)$, $\nu_2(x) = u_t(0,t)$, $c = y^p - (-x)^p$, $d = y^p + (-x)^p$.

Из (8) в силу (2)–(5) после некоторых преобразований находим

$$u[\Theta_0^1(x)] = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)} \left(I_{0+}^{\beta,0,\beta-1}\widetilde{\tau}_1(t)\right)(x) - 2^{4\beta-2}\times$$
$$\times \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)} \left(I_{0+}^{1-\beta,2\beta-1,\beta-1} t^{-\frac{1}{2p}}\widetilde{\nu}_1(t)\right)(x),$$

$$u[\Theta_1^1(x)] = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)} \left(I_{1-}^{\beta,0,\beta-1}\widetilde{\tau}_1(t)\right)(x) - 2^{4\beta-2}\times$$
$$\times \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)} \left(I_{1-}^{1-\beta,2\beta-1,\beta-1} t^{-\frac{1}{2p}}\widetilde{\nu}_1(t)\right)(x),$$

где $\tau_1(x) = \widetilde{\tau}_1(x^{2p})$, $\nu_1(x) = \widetilde{\nu}_1(x^{2p})$.

Подставляя $u[\Theta_0^1(x)]$ и $u[\Theta_1^1(x)]$ в краевое условие (6), учитывая композиционные свойства обобщённых операторов [2, с. 327]

$$\left(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}(I_{0+}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta}f)(t)\right)(x) = (I_{0+}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta}f)(x) \quad (\gamma > 0),$$
$$\left(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}(I_{1-}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta}f)(t)\right)(x) = (I_{1-}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta}f)(x) \quad (\gamma > 0)$$

и легко проверяемые равенства

$$(I_{0+}^{0,0,\eta}f)(x) = (I_{1-}^{0,0,\eta}f)(x) = f(x),$$
$$(I_{0+}^{-\alpha,\alpha,\eta}f)(x) = (D_{0+}^{\alpha}f)(x), \quad (I_{1-}^{-\alpha,\alpha,\eta}f)(x) = (D_{1-}^{\alpha}f)(x), \quad \alpha > 0,$$

где $(D_{0+}^{\alpha}f)(x)$ и $(D_{1-}^{\alpha}f)(x)$ — дробные производные Римана—Лиувилля [2, с. 44], получим

$$\left[2^{4\beta-2}\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)}\left(a_1(x)+b_1(x)\right)x^{-\frac{1}{2p}} - c_1(x)\right]\widetilde{\nu}_1(x) =$$
$$= \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}\left[a_1(x)D_{0+}^{1-2\beta}\widetilde{\tau}_1(t) + b_1(x)D_{1-}^{1-2\beta}\widetilde{\tau}_1(t)\right] + d_1(x)\widetilde{\tau}_1(x) + f_1(x). \quad (10)$$

Аналогично устанавливается функциональное соотношение между $\widetilde{\tau}_2(y)$ и $\widetilde{\nu}_2(y)$, принесенное на I_2 из области Ω_2, которое имеет вид

$$\left[2^{4\beta-2}\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)}\left(a_2(y)+b_2(y)\right)y^{-\frac{1}{2p}}-c_2(y)\right]\widetilde{\nu_2}(y)=$$
$$=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}\left[a_2(y)D_{0+}^{1-2\beta}\widetilde{\tau_2}(t)+b_2(y)D_{1-}^{1-2\beta}\widetilde{\tau_2}(t)\right]+d_2(y)\widetilde{\tau_2}(t)+f_2(y), \quad (11)$$

где $\tau_2(y)=\widetilde{\tau_2}(y^{2p})$, $\nu_2(y)=\widetilde{\nu_2}(y^{2p})$.

Докажем справедливость следующей теоремы.

Теорема. *В области* Ω *не может существовать более одного регулярного решения поставленной задачи, если выполнены условия*

$$E_1(x)=2^{4\beta-2}\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)}x^{-\frac{1}{2p}}\left[a_1(x)+b_1(x)\right]-c_1(x)\neq 0 \quad \forall x\in\overline{I_1},$$

$$\left(\frac{x^k a_1(x)}{E_1(x)}\right)'\leqslant 0, \quad \left(\frac{x^k b_1(x)}{E_1(x)}\right)'\geqslant 0, \quad \left(\frac{x^k d_1(x)}{E_1(x)}\right)'\geqslant 0, \quad \forall x\in\overline{I_1}, \quad (12)$$

$$E_2(y)=2^{4\beta-2}\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)}y^{-\frac{1}{2p}}\left[a_2(y)+b_2(y)\right]-c_2(y)\neq 0 \quad \forall y\in\overline{I_2},$$

$$\left(\frac{y^k a_2(y)}{E_2(y)}\right)'\leqslant 0, \quad \left(\frac{y^k b_2(y)}{E_2(y)}\right)'\geqslant 0, \quad \left(\frac{y^k d_2(y)}{E_2(y)}\right)'\geqslant 0, \quad \forall\, y\in\overline{I_2},$$

$$a_i(1)=0, \quad b_i(0)=0, \quad i=1,2. \quad (13)$$

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ — решение однородной задачи. Тогда в области эллиптичности Ω_3 уравнения (1) имеет место равенство [4, с. 135]

$$\iint_{\Omega_3}(y^k u_x^2+x^k u_y^2)dxdy+\int_0^1 x^k\tau_1(x)\nu_1(x)dx+\int_0^1 y^k\tau_2(y)\nu_2(y)dy\equiv 0. \quad (14)$$

Полагая $f_1(x)\equiv 0$, $f_2(y)\equiv 0$, установим справедливость неравенств

$$\int_0^1 t^k\tau_i(t)\nu_i(t)\,dt\geqslant 0, \quad i=1,2, \quad t=x,y. \quad (15)$$

При $i=1$, $t=x$, $f_1(x)\equiv 0$ соотношение (10) примет вид

$$\widetilde{\nu_1}(x)=m_1(x)(D_{0+}^{1-2\beta}\widetilde{\tau_1})(x)+m_2(x)(D_{1-}^{1-2\beta}\widetilde{\tau_1})(x)+m_3(x)\widetilde{\tau_1}(x),$$

где

$$m_1(x)=\frac{\Gamma(2\beta)a_1(x)}{\Gamma(\beta)E_1(x)}, \quad m_2(x)=\frac{\Gamma(2\beta)b_1(x)}{\Gamma(\beta)E_1(x)}, \quad m_3(x)=\frac{d_1(x)}{E_1(x)}. \quad (16)$$

Рассмотрим интеграл

$$\Gamma(2\beta)\int_0^1 x^k\widetilde{\tau_1}(x)\widetilde{\nu_1}(x)dx=\int_0^1 x^k m_1(x)\widetilde{\tau_1}(x)\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\widetilde{\tau_1}(t)\,dt}{(x-t)^{1-2\beta}}dx-$$

$$-\int_0^1 x^k m_2(x)\widetilde{\tau_1}(x)\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{\widetilde{\tau_1}(t)dt}{(t-x)^{1-2\beta}}dx+\Gamma(2\beta)\int_0^1 x^k m_3(x)(\widetilde{\tau_1}(x))^2dx.$$

Введём следующие обозначения:

$$\frac{\sin(2\pi\beta)}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\widetilde{\tau_1}(t)\,dt}{(x-t)^{1-2\beta}}=\tau_1^*(x),\quad -\frac{\sin(2\pi\beta)}{\pi}\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{\widetilde{\tau_1}(t)\,dt}{(t-x)^{1-2\beta}}=\tau_1^{**}(x).$$

С учётом формулы обращения интегрального уравнения Абеля [9, с. 47] найдём

$$\widetilde{\tau_1}(x)=\int_0^x \frac{\tau_1^*(t)dt}{(x-t)^{2\beta}},\quad \widetilde{\tau_1}(x)=\int_x^1 \frac{\tau_1^{**}(t)\,dt}{(t-x)^{2\beta}}. \tag{17}$$

Воспользуемся известной формулой для функции $\Gamma(\mu)$ [10, с. 385]

$$\int_0^\infty t^{\mu-1}\cos(kt)dt=\frac{\Gamma(\mu)}{k^\mu}\cos\Big(\frac{\mu\pi}{2}\Big)\quad (k>0, 0<\mu<1).$$

Полагая $k=|x-\xi|$, $\mu=2\beta$, получим

$$\frac{1}{|x-\xi|^{2\beta}}=\frac{1}{\Gamma(2\beta)\cos(\pi\beta)}\int_0^\infty t^{2\beta-1}\cos(t|x-\xi|)dt. \tag{18}$$

На основании формулы (18) после смены порядка интегрирования, а затем интегрирования по частям с учётом (13), (16) и (17) будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\Gamma^2(2\beta)\sin(2\pi\beta)\cos(\pi\beta)\int_0^1 x^k\widetilde{\tau_1}(x)\widetilde{\nu_1}(x)dx=$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{2\beta-1}dt\int_0^1 \widetilde{m_1}(x)\bigg[\Big(\int_0^x \tau_1^*(\xi)\cos(t\xi)d\xi\Big)^2+\Big(\int_0^x \tau_1^*(\xi)\sin(t\xi)d\xi\Big)^2\bigg]dx+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{2\beta-1}dt\int_0^1 \widetilde{m_2}(x)\bigg[\Big(\int_x^1 \tau_1^{**}(\xi)\cos(t\xi)d\xi\Big)^2+\Big(\int_x^1 \tau_1^{**}(\xi)\sin(t\xi)d\xi\Big)^2\bigg]dx+$$
$$+\frac{1}{\pi}\Gamma^2(2\beta)\sin(2\pi\beta)\cos(\pi\beta)\int_0^1 \widetilde{m_3}(x)\left(\widetilde{\tau_1}(x)\right)^2dx,$$

где $\widetilde{m_i}(x)=x^k m_i(x)$, $i=1,2,3$.

Отсюда в силу условий (12) и выполнения $\sin(2\pi\beta)\cos(\pi\beta)>0$ получаем неравенство (15).

Опираясь на соотношение (11), нетрудно доказать неравенство (15) и в случае $i=2$, $t=y$, $f_2(y)\equiv 0$.

Из соотношений (14) и (15) сразу следует справедливость теоремы единственности решения задачи A. □

3. Существование решения задачи A. Переходя к доказательству существования решения задачи A, будем полагать, что кривая σ совпадает с «нормальным» контуром σ_0: $x^{2p}+y^{2p}=1$.

В работе [11, с. 789] приведено решение задачи Хольмгрена (задача H) для уравнения (1) в области Ω_3, которое определяется формулой

$$u(x,y)=\int_0^1\varphi(t)\delta\left[G(t,(1-t)^{2p})^{\frac{1}{2p}};x,y\right]dt+$$
$$+\int_0^1 t^k\nu_1(t)G(t,0;x,y)dt+\int_0^1 t^k\nu_2(t)G(0,t;x,y)dt,\quad(19)$$

где $G(\xi,\eta;x,y)$ — функция Грина задачи H,

$$\delta[G]=\eta^k\frac{\partial G}{\partial\xi}\frac{d\eta}{ds}-\xi^k\frac{\partial G}{\partial\eta}\frac{d\xi}{ds},$$
$$\varphi(x)\in C[0,1],\quad\varphi(0)=\varphi(1)=0;\quad x\nu_1(x),\,y\nu_2(y)\in C(0,1)\cap L_1[0,1].$$

Справедливость формулы (19) установлена в монографии [12, с. 67–73].

Для упрощения вычислений положим $\varphi(x,y)=0$, $a_1(t)=a_2(t)=a(t)$, $b_1(t)=b_2(t)=b(t)$, $t=x,y$, $d_1(x)=d_2(y)=0$.

Функциональные соотношения между $\widetilde{\tau_i}(x)$ и $\widetilde{\nu_i}(x)$, принесённые на I_i $(i=1,2)$ из эллиптической части Ω_3, имеют вид [4, с. 137]

$$\widetilde{\tau_i}(x)=-\frac{\gamma}{2p}\int_0^1\xi^{\beta-\frac12}\left[\frac{1}{|\xi-x|^{2\beta}}-\frac{1}{|1-\xi x|^{2\beta}}\right]\widetilde{\nu_i}(\xi)d\xi-$$
$$-\frac{\gamma}{2p}\int_0^1\xi^{\beta-\frac12}\left[\frac{1}{(\xi+x)^{2\beta}}-\frac{1}{(1+\xi x)^{2\beta}}\right]\widetilde{\nu_j}(\xi)d\xi,\quad(20)$$

где

$$\gamma=\frac{\Gamma^2(\beta)}{\pi 2^{2-4\beta}\Gamma(2\beta)},\quad j=1,2,\quad i\neq j.$$

Функциональные соотношения между $\widetilde{\tau_i}(x)$ и $\widetilde{\nu_i}(x)$, принесённые на I_i $(i=1,2)$ из гиперболических $\Omega_1(\Omega_2)$ частей смешанной области Ω, записываются в виде

$$E_i(x)\widetilde{\nu_i}(x)=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}\left[a(x)D_{0+}^{1-2\beta}\widetilde{\tau_i}(x)+b(x)D_{1-}^{1-2\beta}\widetilde{\tau_i}(x)\right]+f_i(x),\quad(21)$$

где $i,j=1,2$, $i\neq j$.

Исключив из (20) и (21) $\widetilde{\tau_i}(x)$, а затем используя известные соотношения [13]:

$$D_{0+}^{1-2\beta}\left(\int_0^1\xi^{\beta-\frac12}\frac{\widetilde{\nu_1}(\xi)\,d\xi}{|\xi-x|^{2\beta}}\right)=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(2\beta)}\left[\pi\operatorname{tg}(\pi\beta)x^{\beta-\frac12}\widetilde{\nu_1}(x)+\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{1-2\beta}\frac{t^{\beta-\frac12}\widetilde{\nu_1}(t)\,dt}{t-x}\right],$$

$$D_{0+}^{1-2\beta}\left(\int_0^1\xi^{\beta-\frac12}\frac{\widetilde{\nu_1}(\xi)d\xi}{|1-\xi x|^{2\beta}}\right)=\frac{1}{\Gamma(2\beta)}\int_0^1 t^{\beta-\frac12}\left(\frac{1}{x}\right)^{1-2\beta}\frac{\widetilde{\nu_1}(t)dt}{1-xt},$$
$$D_{0+}^{1-2\beta}\left(\int_0^1\xi^{\beta-\frac12}\widetilde{\nu_1}(\xi)\frac{d\xi}{(\xi+x)^{2\beta}}\right)=\frac{1}{\Gamma(2\beta)}\int_0^1 t^{\frac12-\beta}\left(\frac{x}{t}\right)^{2\beta-1}\frac{\widetilde{\nu_1}(t)dt}{x+t},$$

$$D_{0+}^{1-2\beta}\left(\int_0^1 \xi^{\beta-\frac{1}{2}}\frac{\widetilde{\nu_1}(\xi)d\xi}{(1+\xi x)^{2\beta}}\right)=\frac{1}{\Gamma(2\beta)}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}-\beta}x^{2\beta-1}\frac{\widetilde{\nu_1}(t)dt}{1+xt}$$

и аналогичные равенства при действии оператора $D_{1-}^{1-2\beta}$, получим систему сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\widetilde{\nu_i}(x)$ $(i,j=1,2,\ i\neq j)$:

$$\begin{gathered}\left[E_i(x)+\pi x^{\beta-\frac{1}{2}}\mathrm{tg}(\pi\beta)\,(a(x)+b(x))\,\frac{2p\Gamma(\beta)}{\gamma}\right]\widetilde{\nu_i}(x)+\\ +a(x)\int_0^1\left[\left(\frac{\xi}{x}\right)^{1-2\beta}\frac{1}{\xi-x}-\left(\frac{1}{x}\right)^{1-2\beta}\frac{1}{1-\xi x}\right]\xi^{\beta-\frac{1}{2}}\widetilde{\nu_i}(\xi)d\xi+\\ +a(x)\int_0^1\left[\left(\frac{\xi}{x}\right)^{1-2\beta}\frac{1}{\xi+x}-\left(\frac{1}{x}\right)^{1-2\beta}\frac{1}{1+\xi x}\right]\xi^{\beta-\frac{1}{2}}\widetilde{\nu_j}(\xi)d\xi-\\ -b(x)\int_0^1\left(\frac{1-\xi}{1-x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{\xi-x}+\frac{1}{1-\xi x}\right)\xi^{\beta-\frac{1}{2}}\widetilde{\nu_i}(\xi)d\xi+\\ +b(x)\int_0^1\left(\frac{1+\xi}{1-x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{\xi+x}-\frac{1}{1+\xi x}\right)\xi^{\beta-\frac{1}{2}}\widetilde{\nu_j}(\xi)d\xi=\frac{2p\Gamma(\beta)}{\gamma}f_i(x).\end{gathered}\tag{22}$$

Полагая

$$\mu_1(x)=x^{\beta-\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\nu_1}(x)+\widetilde{\nu_2}(x)\right),\quad \mu_2(x)=x^{\beta-\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\nu_1}(x)-\widetilde{\nu_2}(x)\right),$$
$$F_1(x)=\frac{2p\Gamma(\beta)}{\gamma}\left(f_1(x)+f_2(x)\right),\quad F_2(x)=\frac{2p\Gamma(\beta)}{\gamma}\left(f_1(x)-f_2(x)\right),$$

перепишем систему (22) в виде

$$A(x)\mu_i(x)+\int_0^1\frac{K(x,\xi)\mu_i(\xi)\,d\xi}{\xi-x}=F_i(x),\tag{23}$$

где

$$A(x)=\frac{2p\Gamma(\beta)}{\gamma}\left[x^{\frac{1}{2}-\beta}E_i(x)+\pi\,\mathrm{tg}(\pi\beta)\,(a(x)+b(x))\right],$$

$$\begin{gathered}K(x,\xi)=2a(x)\left[\left(\frac{\xi}{x}\right)^{1-2\beta}\frac{\xi}{\xi+x}-\left(\frac{1}{x}\right)^{1-2\beta}\frac{\xi-x}{1-\xi^2x^2}\right]-\\ -b(x)\left[\left(\frac{1-\xi}{1-x}\right)^{1-2\beta}\frac{(1-x)(1+\xi)}{1-\xi x}-\left(\frac{1+\xi}{1+x}\right)^{1-2\beta}\frac{(1-\xi)(1-x)(\xi-x)}{(\xi+x)(1+\xi x)}\right],\end{gathered}$$

$$F_i(x)=\frac{2p\Gamma(\beta)}{\gamma}(f_1(x)\pm f_2(x)),\quad i,j=1{,}2,\quad i\neq j.$$

Ядро $K(x,\xi)$ уравнения (23) при $x=\xi$ непрерывно. При $x\neq\xi$ и $x=0,1$ $K(x,\xi)$ на концах отрезка $[0,1]$ допускает особенность порядка $1-2\beta$ и, следовательно, при $\xi\neq x$ ядро $K(x,\xi)/(\xi-x)$ может допускать особенность $[x(1-x)]^{2\beta-1}$, т.е. слабую особенность. Из вида функций $F_i(x)$ в силу условий (7) можно заключить, что правая часть $F_i(x)\in C^{(2,h)}(\overline{I_i})$, $h>0$, $i=1,2$.

Условие $A^2(x)+[\pi K(x,x)]^2 \neq 0$ гарантирует существование регуляризатора [14], приводящего уравнение (23) к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Отсюда и из единственности искомого решения следует существование решения задачи A.

По найденным $\tau_i(t)$, $\nu_i(t)$ решение задачи (1)–(3) определяется по формулам (8) и (9) в областях Ω_1 и Ω_2 как решение задачи Коши, а в области Ω_3 как решение задачи Хольмгрена по формуле (19).

В случае, когда $c_i(t)$, $d_i(t) = 0$, $i = 1, 2$, существование решения задачи A доказывается так же, как в работе [4].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *M. Saigo*, “A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions” // *Math. Rep. Kyushu Univ.*, 1977/78. Vol. 11, no. 2. Pp. 135–143.
2. *С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев*, Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с. [*S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev*, Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications. Minsk: Nauka i Tekhnika, 1987. 688 pp.]
3. *А. М. Нахушев*, Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с. [*A. M. Nakhushev*, Problems with shifts for partial differential equations. Moscow: Nauka, 2006. 287 pp.]
4. *М. С. Салахитдинов, Б. Менгзияев*, “Об одной краевой задаче со смещением для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения” // *Диффер. уравн.*, 1977. Т. 13, № 1. С. 133–139. [*M. S. Salakhitdinov, B. Mengziyayev*, “On a boundary value problem with shift for an equation of mixed type with two lines of degeneracy” // *Differ. Uravn.*, 1977. Vol. 13, no. 1. Pp. 133–139].
5. *М. М. Смирнов*, “Об одной задаче со смещением для уравнения смешанного типа 2-го рода с двумя линиями вырождения” // *Изв. вузов. Матем.*, 1982. № 3. С. 68–75; англ. пер.: *M. M. Smirnov*, “On a problem with shift for a second order mixed equation with two linear degeneracies” // *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1982. Vol. 26, no. 3. Pp. 85–93.
6. *О. А. Репин, Т. В. Шувалова*, “Нелокальная краевая задача для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения” // *Диффер. уравн.*, 2008. Т. 44, № 6. С. 848–851; англ. пер.: *O. A. Repin, T. V. Shuvalova*, “Nonlocal boundary value problem for an equation of the mixed type with two degeneration lines” // *Differ. Equ.*, 2008. Vol. 44, no. 6. Pp. 876–880.
7. *А. А. Килбас, О. А. Репин*, “О разрешимости краевой задачи для уравнения смешанного типа с частной дробной производной Римана—Лиувилля” // *Диффер. уравн.*, 2010. Т. 46, № 10. С. 1453–1460; англ. пер.: *A. A. Kilbas, O. A. Repin*, “Solvability of a boundary value problem for a mixed-type equation with a partial Riemann-Liouville fractional derivative” // *Differ. Equ.*, 2010. Vol. 46, no. 10. Pp. 1457–1464.
8. *R. Konti*, “Sul problema di Cauchy per le equazioni di tipo misto $y^k z_{xx} - x^k z_{yy} = 0$. II. (Italian)” // *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat., III. Ser.*, 1950. Vol. 2, no. 1–4. Pp. 105–130.
9. *С. Г. Михлин*, Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959. 232 с. [*S. G. Mikhlin*, Lectures on Linear Integral Equations. Moscow: Fizmatgiz, 1959. 232 pp.]
10. *Ф. Трикоми*, Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Иностр. лит., 1957. 443 с. [*F. Tricomi*, Lectures on partial differential equations. Moscow: Inostr. Lit., 1957. 443 pp.]
11. *К. Б. Сабитов, Г. Г. Шарафутдинова*, “Задача Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения” // *Диффер. уравн.*, 2003. Т. 39, № 6. С. 788–800; англ. пер.: *K. B. Sabitov, G. G. Sharafutdinova*, “The Tricomi problem for a mixed type equation with two orthogonal degeneration lines” // *Differ. Equ.*, 2003. Vol. 39, no. 6. Pp. 830–843.

12. *К. Б. Сабитов, Г. Г. Биккулова, А. А. Гималтдинова*, К теории уравнений смешанного типа с двумя линиями изменения типа. Уфа: Гилем, 2006. 150 с. [*K. B. Sabitov, G. G. Bikkulova, A. A. Gimaltdinova*, On the theory of equations of mixed type with two lines of degeneration. Ufa: Gilem, 2006. 150 pp.]
13. *С. К. Кумыкова*, "Об одной задаче с нелокальными краевыми условиями на характеристиках для уравнения смешанного типа" // *Диффер. уравн.*, 1974. Т. 10, № 1. С. 78–88. [*S. K. Kumykova*, "On a problem with nonlocal boundary conditions on the characteristics of the mixed type equation" // *Differ. Uravn.*, 1974. Vol. 10, no. 1. Pp. 78–88].
14. *Н. И. Мусхелишвили*, Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1946; англ. пер.: *N. I. Muskhelishvili*, Singular Integral Equations. Groningen: Noordhoff, 1953.

Поступила в редакцию 22/X/2012;
в окончательном варианте — 16/XI/2012.

MSC: 35M10; 26A33, 35A05

ON THE PROBLEM WITH GENERALIZED OPERATORS OF FRACTIONAL DIFFERENTIATION FOR MIXED TYPE EQUATION WITH TWO DEGENERACY LINES

O. A. Repin[1,2]**, *S. K. Kumykova***[3]

[1] Samara State Economic University,
141, Sovetskoy Armii st., Samara, 443090, Russia.
[2] Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.
[3] Kabardino-Balkarian State University,
173, Chernyshevskogo st., Nalchik, 360004, Russia.

E-mails: `matstat@mail.ru`, `bsk@rect.kbsu.ru`

The nonlocal problem for mixed-type equation with perpendicular lines of degeneracy is investigated for the case when the Dirichlet condition is given on the elliptic boundary, and the generalized derivatives of the solution values on the characteristics are pointwise related to the solution and its normal derivatives values on the lines of a parabolic degeneracy in its hyperbolic parts.

Key words: *nonlocal problem, regular solution, operators of fractional integro-differentiation, Cauchy problem, Fredholm equation, singular integral equation with Cauchy kernel, regularizer, Abel equation.*

Original article submitted 22/X/2012;
revision submitted 16/XI/2012.

Oleg A. Repin (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Head of Dept., Dept. of Mathematical Statistics & Econometrics[1]; Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science[2].
Svetlana K. Kumykova (Ph. D.(Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Function Theory.