

УДК 519.634

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СВЯЗНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В. П. Федотов

Институт машиноведения УрО РАН,
Россия, 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.

E-mail: fedotov@imach.uran.ru

Предложен модифицированный метод граничных элементов для физико-математического моделирования связанных процессов. Физическое моделирование основано на теореме Онзагера связи обобщённых сил и потоков, где предполагается нелинейность коэффициентов взаимности. Подход иллюстрируется на примере диаграммы деформирования. Математическое моделирование основано на модификации метода граничных элементов, основанной на исключении некорректных операций численного дифференцирования и интегрирования.

Ключевые слова: фазовый переход, открытые системы, напряжения, деформации, деформационный ресурс, интегральные уравнения, функции влияния, задачи эллиптического и гиперболического типов.

Введение. Развитие методов решения задач математической физики и высокопроизводительных компьютерных комплексов позволяет помимо предварительных расчётов ставить задачу мониторинга сложных систем в условиях реальной эксплуатации.

Поведение элементов сложных систем определяется их физико-механическим откликом на силовые, температурные, диффузионные, магнитные, динамические и другие воздействия. Это приводит к постановке связанных, в основном нелинейных задач. Перекрестные эффекты определяются феноменологическими составляющими соответствующих систем уравнений, в которых необходимо учитывать характерные времена и представительные объёмы для моделирования связанных процессов. Они могут содержать не только искомые величины, но и их производные первого и второго порядков. Это требует больших вычислительных затрат и точности вычислений не только искомым величин, но и их производных минимум до второго порядка, что приводит при численном счете к некорректной задаче.

Для повышения скорости счета и точности вычислений предлагается модифицированный метод граничных элементов (МГЭ) для решения задач эллиптического, параболического и гиперболического типов как базовой основы для решения нелинейных и связанных задач математической физики. Модификация базируется на аналитическом вычислении интегралов и производных от функций влияния задач указанных трёх типов и распараллеливании на всех этапах решения задач на уровне алгоритма. Для получения аналитических формул для точного вычисления интегралов от функций влияния и их производных вводится фиксированный «базовый» элемент. Интегрирование компонент функций влияния по произвольному участку границы сводится

Владимир Петрович Федотов (д.т.н., проф.), главный научный сотрудник, лаб. прикладной механики.

к интегрированию по фиксированному «базовому» элементу с последующим линейным преобразованием сдвига и поворота. Интегрирование для всех типов задач производится один раз, в результате чего получены компактные формулы, удобные для программирования.

1. Физическое моделирование. Для мониторинга сложных систем в реальных условиях необходимо знание текущих физико-механических характеристик. Например, для анализа прочности необходимы феноменологические уравнения связи напряжений деформаций, температуры, концентрации легирующих элементов и т.п. Но получение их экспериментальными методами в действующей конструкции трудоемко, а зачастую невозможно. Дальнейшее изложение основано на предположении о невозможности получения физико-механических характеристик и введения понятий устойчивости, разрушения, ресурса и т.п. в рамках замкнутой системы, поскольку они напрямую связаны с характером обмена с внешней средой. Феноменологические соотношения взаимности связанных задач могут быть сформулированы в рамках открытых неравновесных систем на основе подхода Онзагера для связанных физико-механических задач, согласно которому устанавливается связь между обобщёнными потоками J_k и обобщёнными силами X_k :

$$J_k = L_{km} X_m.$$

Как гипотезу, имеющую подтверждение на практике, примем, что коэффициенты взаимности L_{km} , линейные по Онзагеру, могут зависеть от обобщённых сил $L_{km} = L_{km}(X_m)$. Произведение обобщённых сил X_k и обобщённых потоков I_k представляет собой скорость роста энтропии \dot{S} в изолированной системе [1]. Если система открытая, то полную скорость роста энтропии можно представить в виде двух слагаемых

$$\dot{S} = \dot{S}_e + \dot{S}_i = X_e I_e + X_i I_i, \quad (1)$$

где $\dot{S}_e = X_e I_e$ — изменение энтропии за счет обмена энергией с внешними системами, $\dot{S}_i = X_i I_i > 0$ — изменение энтропии за счет внутренних неравновесных процессов.

С учётом (1) запишем уравнение сохранения энергии:

$$-\frac{d\Lambda}{dt} = T_0 \dot{S} = T_0 X_e I_e + T_0 X_i I_i = 0,$$

где параметр T_0 имеет смысл температуры. Здесь $\Lambda(y_k)$ называется функцией Ляпунова, или энергетической функцией. В замкнутой системе положительно определенная функция $\Lambda(y_k)$ обладает таким свойством, что функция

$$\frac{d\Lambda(y_k)}{dt} = \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial y_k} \right) \left(\frac{dy_k}{dt} \right) = -T_0 \dot{S} = (T_0 X_i)(-J_i)$$

является знакоотрицательной, а движение системы, соответствующей $\Lambda(y_k)$, устойчиво, тогда как фазовый переход от упругости к пластичности и разрушение связаны с потерей устойчивости. Поэтому для их описания необходимо рассматривать открытую систему.

Рассмотрим физическое моделирование на примере процесса деформирования. Будем рассматривать деформированный образец как открытую систему. В качестве внутренней обобщённой силы X_i будет выступать деформация образца $\delta\varepsilon/T_0$, в качестве внутренней обобщённой потока J_i — внутреннее напряжение σ . В качестве обобщённого внешнего потока J_e возьмем внешнее напряжение σ_p . Отметим, что отождествления внешнего σ_p и внутреннего σ напряжений нет. В этом случае можно сразу записать условие сохранения энергии

$$-\frac{d\Lambda}{dt} = \delta\Psi = -\sigma_p\delta\varepsilon + \sigma\delta\varepsilon = -\sigma_p\delta\varepsilon + L(\varepsilon)\delta\varepsilon = 0.$$

Следуя Коши, будем считать, что в упругой области коэффициент Онзагера зависит от обобщенной силы следующим образом:

$$L(\varepsilon) = E(1 - k\varepsilon + m\varepsilon^2). \quad (2)$$

Поведение рассматриваемой системы (деформирование образца) полностью определяется потенциалом

$$\Psi = \int_0^\varepsilon E(1 - k\gamma + m\gamma^2)\gamma d\gamma - \sigma_p\varepsilon = \frac{E\varepsilon^2}{2} - \frac{Ek\varepsilon^3}{3} + \frac{Em\varepsilon^4}{4} - \sigma_p\varepsilon \quad (3)$$

и описывается вариационным уравнением

$$\delta\Psi = (E\varepsilon - Ek\varepsilon^2 + Em\varepsilon^3 - \sigma_p)\delta\varepsilon = 0.$$

Исследования этой системы методами синергетики [3] окончательно приводят к уравнению в упругой области:

$$\sigma = E\left(1 - \frac{1}{3}\frac{E}{\sigma_c}\varepsilon + \frac{1}{27}\frac{E^2}{\sigma_c^2}\varepsilon^2\right)\varepsilon = 0, \quad k = \frac{1}{3}\frac{E}{\sigma_p}, \quad m = \frac{1}{27}\frac{E^2}{\sigma_p^2}.$$

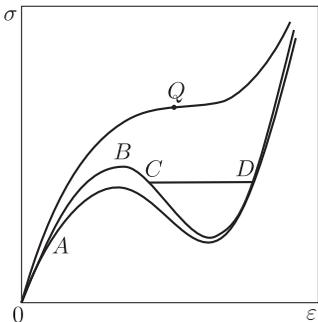


Рис. 1. Упругий участок при различных значениях k и m

Схематично отклик системы на внешнее воздействие представлен на рис. 1. Здесь Q — критическая точка. Если внешнее напряжение выше напряжения в этой точке — хрупкое разрушение. AB — метастабильное состояние, где возможен фазовый переход второго рода с образованием диссипативных структур [3], BC — неустойчивый участок, на котором возможен перескок на другую устойчивую ветвь, CD — «площадка текучести», ABC — «зуб текучести».

Для построения модели диссипативного процесса будем постулировать аддитивность процесса дислокационного упрочнения и разупрочнения от образования пространственных дефектов несплошностей [4], т.е. диаграмму $\sigma \sim \varepsilon$ представим в виде

$$\sigma = \sigma_T + \frac{\sigma_1 - \sigma_T}{\sqrt{\varepsilon_B - \varepsilon_T}}\sqrt{\varepsilon - \varepsilon_T} - \frac{\sigma_2 - \sigma_T}{(\varepsilon_B - \varepsilon_T)^2}(\varepsilon - \varepsilon_T)^2. \quad (4)$$

Здесь σ_1 и σ_2 — значения напряжений, соответствующих деформации ε_B при отсутствии в первом случае — разупрочнения, во втором случае — упрочнения.

Второе слагаемое правой части отражает известный из физики металлов механизм дислокационного упрочнения, для которого справедлива параболическая связь напряжений и плотности дислокаций ρ , которая, в свою очередь, линейно связана со сдвиговыми деформациями $\rho \sim \varepsilon$, третье слагаемое является решением линейного кинетического уравнения накопления поврежденности.

Для определения σ_1 и σ_2 используются обычно два очевидных условия:

$$\sigma(\varepsilon_B) = \sigma_B; \quad \left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_B} = 0,$$

из которых следует $\sigma_1 = (4\sigma_B - \sigma_T)/3$, $\sigma_2 = (\sigma_B + 2\sigma_T)/3$.

Рассмотрим моделирование диаграммы $\sigma \sim \varepsilon$ стали X70 при следующих исходных данных: внешнее напряжение $\sigma_p = 590$ МПа, предел текучести $\sigma_T = 430$ МПа, временное сопротивление $\sigma_B = 636,75$ МПа, деформация временного сопротивления $\delta_B = 11,455$ %. На рис. 2 показано сравнение модели и эксперимента.

Следует отметить, что при необходимости можно использовать более сложные кинетические уравнения, и это приведет к другому виду последнего слагаемого (4), однако, как показано в [2], приведенная модель (4) даёт достаточное для расчётов приближение к экспериментальным данным для многих металлов при различных температурах и концентрациях примесей.

2. Деформационный ресурс и разрушение. Согласно предлагаемой модели поведение образца (материальной точки) определяется внешним воздействием и внутренним откликом материала на каждой стадии. Под разрушением материала в точке будем понимать критическую ситуацию, когда энергия внешнего воздействия сравнивается с внутренним потенциальным и диссипативным энергетическим откликом материала. Текущий ресурс в каждый момент деформации будет определяться разностью энергий внешнего воздействия и внутренней реакции материала.

Энергия внешнего воздействия определяется формулой

$$W_p = \int_0^t \sigma_p(\tau) \varepsilon(\tau) d\tau.$$

На первой стадии упругий потенциал определён формулой (3), тогда

$$\Psi_e = \int_0^\varepsilon E(1 - k\gamma + m\gamma^2)\gamma d\gamma = \frac{E\varepsilon^2}{2} - \frac{Ek\varepsilon^3}{3} + \frac{Em\varepsilon^4}{4}.$$

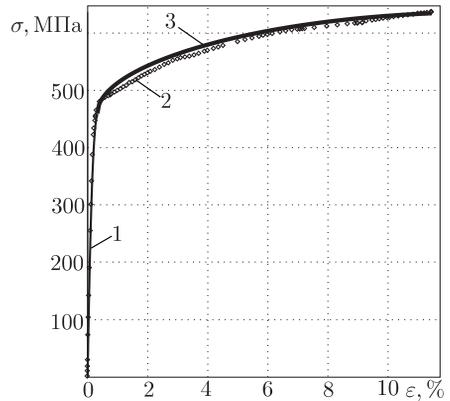


Рис. 2. Диаграмма деформирования стали X70: 1 — упругость; 2 — упрочнение; 3 — эксперимент

Для простоты изложения опустим неустойчивое состояние системы с образованием зуба и площадки текучести.

На второй стадии действуют два диссипативных механизма, которые определяются формулой (4), тогда энергетический отклик вычисляется по формуле

$$\Psi_{\text{dis}} = \int_{\varepsilon_{\text{dis}}}^{\varepsilon} \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_T}{(\varepsilon_B - \varepsilon_T)^{1/2}} (\gamma - \varepsilon_T)^{1/2} - \frac{\sigma_2 - \sigma_T}{(\varepsilon_B - \varepsilon_T)^2} (\gamma - \varepsilon_T)^2 \right] d\gamma.$$

На последней стадии разупрочнения, если оно есть, поведение системы определяется третьим слагаемым функции (4), а энергия — интегралом

$$\Psi_{\text{soft}} = \int_{\varepsilon_{\text{dis}}}^{\varepsilon} \left[\frac{\sigma_2 - \sigma_T}{(\varepsilon_B - \varepsilon_T)^2} (\gamma - \varepsilon_T)^2 \right] d\gamma.$$

Текущий остаточный ресурс системы определяется разностью

$$\Psi_{\text{res}} = W_p - \Psi_e - \Psi_{\text{dis}} - \Psi_{\text{soft}}. \quad (5)$$

Уравнение $\Psi_{\text{res}} = 0$, или в приведенном виде $\Psi = \Psi_{\text{res}}/W_p = 0$, позволяет определить значение деформации ε_{fr} , при которой произойдет разрушение. Отметим: разрушение может произойти на любой из рассматриваемых стадий, тогда соответствующие слагаемые в (5) отсутствуют. На рис. 3 представлен приведенный ресурс деформирования, соответствующий свойствам материала по модели (4).

Следует отметить, что после σ_B диаграмма приходит в неустойчивое состояние

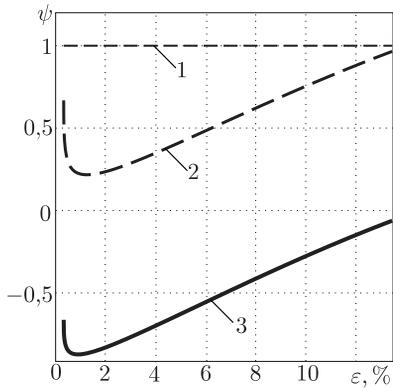


Рис. 3. Деформационный ресурс: 1 — внешняя энергия; 2 — внутренний отклик; 3 — остаточный ресурс

и для вычисления распределенных характеристик необходимо применение аппарата статистической механики, однако для вычисления интегральных характеристик, входящих в (5), детерминированные зависимости (4) могут быть достаточны для первого приближения.

3. Математическое моделирование. Для решения связанных физико-механических задач предлагается модифицированный метод граничных элементов [4, 5]. Построение общего алгоритма для таких задач не представляется возможным, поэтому здесь рассматриваются алгоритмы решения базовых задач математической физики, конкретизация алгоритма для каждой реальной задачи требует отдельного рассмотрения.

Эллиптические задачи. Решение линейной упругой задачи определяется интегральным соотношением

$$u_i(\xi) = \int_{S_f} [u_{ij}^*(\xi, x) f_j^*(x) - f_{ij}^*(\xi, x) u_j(x)] dS(x) + \int_{S_u} [u_{ij}^*(\xi, x) f_j(x) - f_{ij}^*(\xi, x) u_j^*(x)] dS(x), \quad (6)$$

где $u_{ij}^*(\xi, x)$, $f_{ij}^*(\xi, x)$ — тензоры влияния; $u_j(x)$, f_j — поверхностные перемещения и напряжения, звездочкой обозначены известные величины. Разбивая границу области на элементы и устремляя внутреннюю точку ξ на границу, получим из (6) систему $2p$ уравнений относительно u_j^q и f_j^q :

$$\frac{1}{2}u_i^{(p)} = \sum_{q=1}^N \left(f_j^{(q)*} \int_{S^{(q)}} u_{ij}^*(x^{(p)}, x) dS(x) - u_j^{(q)} \int_{S^{(q)}} f_{ij}^*(x^{(p)}, x) dS(x) \right) + \sum_{q=N+1}^{N+M} \left(f_j^{(q)} \int_{S^{(q)}} u_{ij}^*(x^{(p)}, x) dS(x) - u_j^{(q)*} \int_{S^{(q)}} f_{ij}^*(x^{(p)}, x) dS(x) \right).$$

Здесь звёздочками обозначены известные величины.

Модификация заключается в аналитическом интегрировании тензоров влияния по базовому элементу (рис. 4) с последующим аффинным преобразованием. Влияние любого отрезка границы АВ на точку ξ будет эквивалентно влиянию базового отрезка OC на точку $\bar{\xi}$.

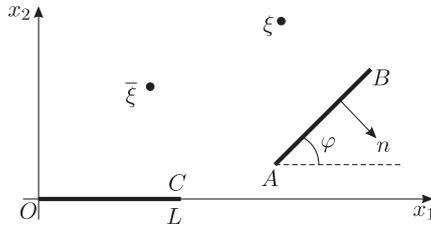


Рис. 4. Базовый элемент

Например,

$$\int_{OC} u_{ij}^*(\bar{\xi}, x) dS(x) = -\frac{1}{2} A_1 \bar{\xi}_2 \left(\ln(\bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2) - \ln((\bar{\xi}_1 - L)^2 + \bar{\xi}_2^2) \right),$$

$$A_1 = -(8\pi\mu(1 - \nu))^{-1}.$$

Остальные значения интегралов приведены в [5].

Предлагаемый подход позволяет построить эффективную итерационную процедуру для учёта нелинейности процесса, характерного для связанных задач. Физическая модель удовлетворяет требованию фазового перехода второго рода при переходе от упругости к пластичности, что математически исключает угловую точку, производная в которой отсутствует, а задача определения границы раздела упругой и пластической областей является некорректной. Формулировка задачи в обобщенном смысле, т.е. через граничные интегральные уравнения, позволяет учитывать нелинейность только через изменение свободного вектора разрешающей системы, не меняя её матрицы, что существенно экономит время расчёта. Нелинейные свойства можно учесть так:

$$2\mu\varepsilon_{ij} + \frac{2\mu\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \sigma_{ij}^a = \sigma_{ij}^e - \sigma_{ij}^a,$$

где согласно (2)

$$\sigma_{ij}^a = \frac{2E(-kI_\varepsilon + mI_\varepsilon^2)}{2(1 + \nu)} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right),$$

— начальные напряжения на каждой стадии итерации, I_ε — интенсивность деформаций. После стандартных преобразований [5] задача сведётся к системе граничных интегральных уравнений. Входящие в систему интегралы вычисляются аналитически. В итерационном процессе интегралы по поверхности уже вычислены, изменяются только интегралы по области от известных функций.

Гиперболические задачи. В гиперболических задачах помимо граничных условий возникают начальные условия в области для искомой функции и ее производной по времени, что требует вычисления соответствующих интегралов. Применяя к ним второе тождество Грина и проводя преобразования, сокращающие «неберущиеся» интегралы, перейдём к граничному интегральному уравнению

$$\begin{aligned}
 u(\xi, t_F) = & - \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} \frac{(t_F - \tau)H(c(t_F - \tau) - r)}{2\pi r \sqrt{c^2(t_F - \tau)^2 - r^2}} n_r d\Gamma(x) d\tau - \\
 & - \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} \nabla u(x, \tau) \frac{H(c(t_F - \tau) - r)}{2\pi \sqrt{c^2(t_F - \tau)^2 - r^2}} d\Gamma(x) d\tau + \\
 & + \frac{1}{c^2} \int_{\Gamma} \psi(x) \frac{\partial U^*}{\partial n} d\Gamma(x) + \frac{1}{c^2} \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi(x)}{\partial n} U^*(\xi, x, t_F, t_0) d\Gamma(x) + \\
 & + \frac{1}{c^2} \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} U_\tau^* d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} \varphi(x) \frac{n_r}{2\pi r} d\Gamma(x).
 \end{aligned}$$

При интегрировании выражений необходимо различать различные случаи расположения волны влияния от точки ξ относительно базового элемента. Скорость распространения волны конечна, а значит, влияние точки ξ на базовый элемент проявится только после того, как волна, возникающая в точке ξ в момент времени τ , достигнет базового элемента. Будем различать следующие пять случаев:

- 1) волна еще не достигла базового элемента; множество таких точек будем обозначать как

$$M_1 = \{ \xi \in \Omega : c(t_F - \tau) - r(\xi, x) < 0, \quad x \in [a, b] \},$$

где $r(\xi, x)$ — расстояние между точками ξ и x ;

- 2) волна достигла некоторых внутренних точек базового элемента, но не достигла его границ; множество таких точек будем обозначать в виде

$$\begin{aligned}
 M_2 = \{ \xi \in \Omega : c(t_F - \tau) - r(\xi, a) < 0 \cap c(t_F - \tau) - r(\xi, b) < 0 \\
 \cap \exists x \in (0, b) : c(t_F - \tau) - r(\xi, x) > 0 \};
 \end{aligned}$$

- 3) волна достигла только правой границы базового элемента; множество таких точек будем обозначать как

$$M_3 = \{ \xi \in \Omega : c(t_F - \tau) - r(\xi, a) < 0 \cap c(t_F - \tau) - r(\xi, b) > 0 \};$$

- 4) волна достигла только левой границы базового элемента; множество таких точек будем обозначать как

$$M_4 = \left\{ \xi \in \Omega : c(t_F - \tau) - r(\xi, a) > 0 \cap c(t_F - \tau) - r(\xi, b) < 0 \right\};$$

- 5) волна полностью достигла базового элемента; множество таких точек будем обозначать как

$$M_5 = \{ \xi \in \Omega : c(t_F - \tau) - r(\xi, x) > 0, x \in [a, b] \}.$$

Аналитические формулы для интегралов по всем положениям точки влияния ξ приведены в [4, 5].

Для параболических задач построение интегральных уравнений подобно предыдущему, отличие заключается только в аналитическом интегрировании соответствующих функций влияния.

4. Заключение. Решение связанных задач математической физики требует рассмотрения двух проблем: 1) разработки физических моделей нелинейных функциональных соотношений связности между обобщёнными потоками и силами, а также физическими параметрами процессов, которые учитывают характерные времена и объёмы материальных точек; 2) разработки математических методов и алгоритмов, позволяющих решать громоздкие системы дифференциальных уравнений в частных производных достаточно быстро и обеспечивающих высокую точность вычислений не только искомым функций, но и их первых и вторых производных. В работе предложен подход, базирующийся на неравновесной термодинамике открытых систем и позволивший не только рассматривать связанные процессы деформирования, диффузии, теплопроводности, но и отслеживать состояния неустойчивости систем с определением фазовых переходов, деформационного ресурса и разрушения. Модифицированный метод граничных элементов за счёт предварительного аналитического счёта позволил существенно сократить вычислительное время и за счёт точного вычисления производных и интегралов от функций влияния дают возможность исключить некорректные операции численного дифференцирования и интегрирования. Непрерывные в области решения дают возможность исключить сеточное и конечно-элементное дробление самой области, что вызывает трудности для связанных процессов с различными характерными представительными объёмами. Следует отметить, что предлагаемый подход пока нельзя назвать универсальным, но с его помощью в единой методологии можно рассматривать отдельные классы связанных задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программ Президиума РАН № 15 (проект № 12–П–1–1031 «Математическое моделирование нелинейных связанных физико-механических процессов на основе модифицированного метода граничных элементов») и № 18 (проект № 12–П–1–1028 «Алгоритмы и математическое обеспечение для вычислительных систем сверхвысокой производительности»)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *I. Gyarmati*, Non-equilibrium Thermodynamics. Field Theory and Variational Principles. Berlin: Springer, 1970. xi+184 pp.; русск. пер.: *И. Дьярмати*, Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. М.: Мир, 1974. 301 с.

2. *J. M. T. Tompson*, Instabilities and catastrophes in science and engineering. Chichester: Wiley, 1981. xvi+242 pp.; русск. пер.: *Дж. М. Томпсон*, Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М.: Мир, 1985. 256 с.
3. *I. Prigogine*, Introduction to thermodynamics of irreversible processes, 3d ed. New York: Interscience Publishers, 1967. xv+147 pp.; русск. пер.: *И. Пригожин*, Введение в термодинамику необратимых процессов. М.: Иностран. лит., 1960. 127 с.
4. *В. П. Федотов, А. А. Контеев*, “Модифицированный метод граничных элементов для задач о колебаниях плоских мембран” // *Тр. ИММ УрО РАН*, 2009. Т. 15, №2. С. 211–221; англ. пер.: *V. P. Fedotov, A. A. Konteev*, “Modified boundary element method for problems on oscillations of flat membranes” // *Proc. Inst. Math. Mech.*, 2009. Vol. 267, no. 1. Pp. S78–S89.
5. *В. П. Федотов, Л. Ф. Сневак*, Решение связанных диффузионно-деформационных задач на основе алгоритмов параллельного действия. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. 172 с. [*V. P. Fedotov, L. F. Spevak*, Solution of Coupled Diffusive-Deformation Problems on the Basis of Parallel Algorithms. Ekaterinburg: UrO RAN, 2007. 172 pp.]

Поступила в редакцию 02/XI/2012;
в окончательном варианте — 24/XII/2012.

MSC: 65M38, 74S15; 35Q74

MODIFIED BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR THE SOLUTION OF CONNECTED PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS

V. P. Fedotov

Institute of Engineering Science, Ural Branch of RAS,
34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620049, Russia.

E-mail: fedotov@imach.uran.ru

The modified boundary element method for physico-mathematical modeling of the multifactorial processes is offered for discussion. Physical modeling based on the Onsager's theorem about the relationship between generalized forces and fluxes where we assume the coefficients of reciprocity are nonlinear. The approach is illustrated by the example of the strain diagram. Mathematical modeling is based on a modification of the BEM where all incorrect procedures of the numerical differentiation and integration were replaced by preliminary analytical calculations.

Key words: *phase transition, open systems, stresses, strains, deformation resource, integral equation, influence function, elliptic and hyperbolic problems.*

Original article submitted 02/XI/2012;
revision submitted 24/XII/2012.