Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. № 1 (30). С. 181–188

УДК 517.968.4

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕКОМПАКТНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Х. А. Хачатрян

Институт математики НАН Армении,
Армения, 375019, Ереван, пр-т Маршала Баграмяна, 24/5.

E-mail: khach82@rambler.ru

Работа посвящена исследованию некоторых классов нелинейных интегральных уравнений с некомпактными операторами типа Гаммерштейна—Немыцкого. Указанный класс уравнений не только представляет теоретический интерес, но и имеет непосредственное применение в кинетической теории газов. Доказываются теоремы существования положительных решений в различных функциональных пространствах.

Ключевые слова: *интегральное уравнение типа Гаммерштейна—Немыцкого, условие консервативности, условие Каратеодори, монотонность, уравнение Винера—Хопфа.*

Рассмотрим класс нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна—Немыцкого

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} K(x,t)H(t,\varphi(t))dt + A(x,\varphi(x)), \quad x \geqslant 0, \tag{1}$$

относительно искомой вещественной и измеримой функции $\varphi(x)$, где $K(x,t)$ — определённая на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+ \equiv [0,+\infty)$) измеримая и неотрицательная функция, удовлетворяющая условию консервативности

$$\operatorname*{esssup}_{x\in\mathbb{R}^+} \int_0^{+\infty} K(x,t)dt = 1;$$

$H(t,z)$ и $A(x,\tau)$ — определённые на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ ($\mathbb{R} \equiv (-\infty;+\infty)$) измеримые и вещественнозначные функции, удовлетворяющие условию критичности

$$H(t,0) \equiv 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad A(x,0) \equiv 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Последнее условие означает, что $\varphi(x) \equiv 0$ является решением уравнения (1).

Уравнение (1) не только представляет теоретический интерес, но и имеет применение в кинетической теории газа, а именно в задаче о течении разреженного газа в полупространстве, ограниченном твёрдой стенкой (задача Крамерса) (см.[1–3]).

В случае, когда $H(t,z) \equiv z$, $A(x,\tau) = y(x) - F(x,\tau)$, $y \in L_2(\mathbb{R}^+)$, а $F(x,\tau)$ удовлетворяет условию Гёльдера—Липшица по второму аргументу и монотонно убывает по τ, причём ядро $K(x,t)$ зависит от разности своих аргументов, уравнение (1) рассмотрено в [4]. В этой работе при некоторых дополнительных условиях на K доказано существование решения в пространстве $L_2(\mathbb{R}^+)$.

Хачатур Агавардович Хачатрян (д.ф.-м.н.), старший научный сотрудник, отдел методов математической физики.

Отметим также, что в частном случае $A(x,\tau)\equiv 0$ уравнение (1) при различных ограничениях на функции H и K исследовано в работах [5–12]. В указанных работах в основном доказаны теоремы существования положительных и ограниченных (в некоторых случаях — линейно растущих) решений.

В настоящей работе, путём наложения на функции H и A существенно разных условий, доказывается существование положительных решений в пространствах $L_\infty^0(\mathbb{R}^+)\equiv\{f\in L_\infty(\mathbb{R}^+),\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0\}$ и $L_1(\mathbb{R}^+)\cap L_\infty^0(\mathbb{R}^+)$.

Небезынтересно отметить также, что построенные решения имеют естественный физический смысл (см. [3]).

Формулировка основных результатов. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $K_0(x)\geqslant 0$, $x\in\mathbb{R}$ — некоторая измеримая функция, для которой*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_0(x)dx=1,\quad \nu(K_0)\equiv\int_{-\infty}^{+\infty} xK_0(x)dx<0, \tag{2}$$

а $0\leqslant K(x,t)\leqslant K_0(x-t)$,$\forall(x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, причём сходимость последнего интеграла в (2) понимается в смысле абсолютной сходимости. Пусть существуют числа $\eta>0$ и $\eta_0\in(0,\eta)$ такие, что выполняются следующие условия:

a) *функции $H(t,z)$ и $A(x,\tau)$ удовлетворяют условию Каратеодори по второму аргументу на множестве $\mathbb{R}^+\times[0,\eta]$;*
b) *$H(t,z)$ возрастает по z на $[0,\eta]$ при каждом фиксированном $t\in\mathbb{R}^+$, а $A(x,\tau)$ возрастает по τ на $[0,\eta]$ при каждом фиксированном $x\in\mathbb{R}^+$;*
c) *имеют место следующие неравенства:*

$$0\leqslant H(t,z)\leqslant z,\quad \forall(t,z)\in\mathbb{R}^+\times[0,\eta], \tag{3}$$
$$A(x,\rho_{\eta_0}(x))\geqslant\rho_{\eta_0}(x),\quad A(x,\eta)\leqslant\rho_\eta(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}^+,$$

где

$$\rho_\delta(x)\equiv\delta\int_x^\infty K_0(t)dt,\quad \delta>0,\quad x\in\mathbb{R}^+.$$

Тогда уравнение (1) *имеет положительное решение из пространства* $L_1(\mathbb{R}^+)\cap L_\infty^0(\mathbb{R}^+)$.

Для изложения следующих результатов нам понадобятся некоторые обозначения и вспомогательные факты из линейной теории консервативных интегральных уравнений Винера—Хопфа.

Пусть $Q(x)$ — определённая на множестве $\mathbb{R}$ измеримая функция, для которой ξ_0 и ξ_1 являются первыми положительными корнями уравнений $Q(x)=$ $=x$ и $Q(x)=2x$ соответственно, причём $2\xi_1<\xi_0$, Q возрастает на отрезке $[0,\xi_0]$ и $Q\in C[0,\xi_0]$. В качестве функции Q можно рассматривать одну из следующих:

a) $Q(x)=x^\alpha$, $\alpha\in(0{,}1)$, $\xi_0=1$, $\xi_1=(1/2)^{1/(1-\alpha)}$;
b) $Q(x)=e^{x-1}$, $\xi_0=1$, $\xi_1\approx 0{,}2$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть существует функция* $K^*(x) \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$, $K^*(-x) = K^*(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, $\int_{-\infty}^{+\infty} K^*(\tau)d\tau = 1$, *для которой* $0 \leqslant K(x,t) \leqslant K^*(x-t)$, $\forall(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Пусть выполняются следующие условия:

i_1) *функции* $H(t,z)$ *и* $A(x,\tau)$ *удовлетворяют условиям* a) *и* b) *теоремы* 1 *на множестве* $\mathbb{R}^+ \times [0,\xi_0]$;

$$i_2) \quad 0 \leqslant H(t,z) \leqslant \xi_0 - Q(\xi_0 - z), \quad \forall(t,z) \in \mathbb{R}^+ \times [0,\xi_0]; \tag{4}$$

i_3) *существует число* $\eta_0 \in (0,\xi_0)$ *такое, что выполняются неравенства*:

$$A(x,\rho^*_{\eta_0}(x)) \geqslant \rho^*_{\eta_0}(x), \quad A(x,\xi_0) \leqslant \rho^*_{\xi_0}(x), \tag{5}$$

где

$$\rho^*_\delta(x) = \delta \int_x^{+\infty} K^*(t)dt, \quad \delta > 0.$$

Тогда уравнение (1) *имеет положительное решение из пространства* $L^0_\infty(\mathbb{R}^+)$.

Теперь наряду с уравнением (1) рассмотрим следующее однородное уравнение Винера—Хопфа:

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \tilde{K}(x-t)S(t)dt, \quad x \geqslant 0, \tag{6}$$

с начальным условием

$$S(0) = 1, \tag{7}$$

где

$$\tilde{K}(x) \geqslant 0,\, x \in \mathbb{R}^+, \quad \tilde{K}(\tau) = \tilde{K}(-\tau),\, \tau \in \mathbb{R}^+, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{K}(x)dx = 1, \tag{8}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^j \tilde{K}(x)dx < +\infty, \quad j = 1,2,3, \quad l_0 \equiv \operatorname*{esssup}_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{\int_x^\infty \tilde{K}(t)dt}{\tilde{K}(x)} < +\infty. \tag{9}$$

Из результатов работы [13] следует, что задача (6), (7) имеет положительное решение следующей структуры:

$$S(x) = ax + q(x), \tag{10}$$

где $a = \sqrt{2/\nu_2}$, $\nu_2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\tilde{K}(x)dx$, а $0 \leqslant q \in L_\infty(\mathbb{R}^+)$ — известная функция Хопфа.

Введём обозначения для формулировки нижеследующей теоремы 3:

1) $c \equiv \frac{1}{a}\max\Big(al_0, 2r_0a, \operatorname*{esssup}_{x\in\mathbb{R}^+} q(x)\Big)$, где $r_0 \equiv \int_0^{+\infty} t\tilde{K}(t)dt$;

2) $\Phi_\delta^\lambda(x) \equiv \delta \left(\int_x^\infty \tilde{K}(t)dt - \frac{1}{x+\lambda} \int_x^\infty t\tilde{K}(t)dt \right)$, $x \in \mathbb{R}^+$, $\delta > 0$ — некоторое число, а $\lambda \geqslant c$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть ядро $K(x,t)$ задаётся посредством следующей формулы:*

$$K(x,t) = \tilde{K}(x-t)\frac{t+\lambda}{x+\lambda}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad \lambda \geqslant c.$$

Предположим, что существуют числа $\eta > 0$ и $\eta_0(0,\eta)$ такие, что функции $H(t,z)$ и $A(x,\tau)$ удовлетворяют условиям a), b) и условию (3) теоремы 1. Тогда, если $A(x, \Phi_{\eta_0}^\lambda) \geqslant \Phi_{\eta_0}^\lambda(x)$, $A(x,\eta) \leqslant \Phi_\eta^\lambda(x)$, то уравнение (1) имеет положительное решение из $L_\infty^0(\mathbb{R}^+)$.

Примеры функций H и A. Примеры функций H и A для теоремы 1:

1_H) $H(t,z) = H_0(t)\dfrac{z^p}{\eta^{p-1}}$, $H_0 \in C(\mathbb{R}^+)$, $0 \leqslant H_0(t) \leqslant 1$, $t \in \mathbb{R}^+$, $p > 1$, $z \in \mathbb{R}^+$;

1_A) $A(x,\tau) = \dfrac{\rho_{\eta_0+\eta_1}(x)\tau}{\tau + \rho_{\eta_1}(x)}$, $\quad \eta \geqslant \eta_0 + \eta_1$, $\eta_0, \eta_1 > 0$.

Примеры функций H и A для теоремы 2:

2_H) $H(t,z) = H_0(t)\dfrac{(\xi_0 - Q(\xi_0 - z))^p}{\xi_0^{p-1}}$, $\quad p > 1$;

2_A) $A(x,\tau) = \rho_{\eta_0+\eta_1}(x)\dfrac{\alpha\tau^2}{(\tau + \rho_{\eta_1}(x))^2}$, $\alpha \geqslant 1 + \dfrac{\eta_1}{\eta_0}$, $\xi_0 \geqslant \alpha(\eta_0 + \eta_1)$, $\eta_0, \eta_1 > 0$.

Примеры H и A для теоремы 3:

3_H) примеры 1_H и 2_H удовлетворяют всем условиям теоремы 3 для функции $H(t,z)$;

3_A) $A(x,\tau) = \Phi_{\eta_0+\eta_1}^\lambda(x)\dfrac{\tau}{\tau + \Phi_{\eta_1}(x)}$, $\quad \eta_0, \eta_1 > 0$, $\eta \geqslant \eta_0 + \eta_1$.

Доказательство основных результатов. Сначала проведём *доказательство теоремы* 2 (теорема 1 доказывается аналогичными рассуждениями). Наряду с уравнением (1) рассмотрим вспомогательное нелинейное уравнение Гаммерштейновского типа

$$\Psi(x) = \int_0^\infty K^*(x-t)Q(\Psi(t))dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{11}$$

относительно искомой функции $\Psi(x)$, где функция Q обладает вышеприведенными свойствами. Из результатов работы [8] следует, что уравнение (11) имеет положительное монотонно возрастающее и ограниченное решение $\Psi(x)$, причём $\lim\limits_{x\to\infty} \Psi(x) = \xi_0$.

Убедимся, что

$$\xi_0 - \Psi(x) \geqslant \rho_{\eta_0}^*(x), \quad x \geqslant 0. \tag{12}$$

Действительно, из (11), с учётом свойств ядра K^* и функции Q имеем

$$\xi_0 - \Psi(x) = \xi_0 - \int_0^\infty K^*(x-t)Q(\Psi(t))dt =$$
$$= \xi_0 \int_x^\infty K^*(\tau)d\tau + \int_0^\infty K^*(x-t)(\xi_0 - Q(\Psi(t)))dt \geqslant \rho^*_{\xi_0}(x) \geqslant \rho^*_{\eta_0}(x).$$

Теперь для уравнения (1) рассмотрим следующие итерации:

$$\varphi_{n+1}(x)=\int_0^\infty K(x,t)H(t,\varphi_n(t))dt+A(x,\varphi_n(x)), \varphi_0(x) = \rho^*_{\eta_0}(x),\ n \in \mathbb{N}_0. \quad (13)$$

Сперва по индукции докажем, что

$$\varphi_n(x) \ \text{ возрастает по } n. \quad (14)$$

В силу условия (5) имеем

$$\varphi_1(x) \geqslant A(x,\varphi_0(x)) = A(x,\rho^*_{\eta_0}(x)) \geqslant \rho^*_{\eta_0}(x) = \varphi_0(x),$$
$$\varphi_1(x) \leqslant \int_0^\infty K(x,t)H(t,\xi_0)dt + A(x,\xi_0) \leqslant \xi_0 \int_0^\infty K^*(x-t)dt + \rho^*_{\xi_0}(x) = \xi_0.$$

Предполагая, что $\xi_0 \geqslant \varphi_n(x) \geqslant \varphi_{n-1}(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, из (13) с учётом монотонности функций H и A получим

$$\varphi_{n+1}(x) \geqslant \int_0^\infty K(x,t)H(t,\varphi_{n-1}(t))dt + A(x,\varphi_{n-1}(x)) = \varphi_n(x)$$

и

$$\varphi_{n+1}(x) \leqslant \int_0^\infty K^*(x-t)H(t,\xi_0)dt + A(x,\xi_0) \leqslant \xi_0.$$

Теперь убедимся в справедливости следующего неравенства:

$$\varphi_n(x) \leqslant \xi_0 - \Psi(x), \quad n \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R}^+. \quad (15)$$

Действительно, при $n = 0$ неравенство (15) сразу следует из (12). Пусть $\varphi_n(x) \leqslant \xi_0 - \Psi(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда с учётом (4), (5) из (13) будем иметь:

$$\varphi_{n+1}(x) \leqslant \int_0^\infty K^*(x-t)H(t,\xi_0 - \Psi(x))dt + A(x,\xi_0) \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^\infty K^*(x-t)(\xi_0 - Q(\Psi(t)))dt + \rho^*_{\xi_0}(x) =$$
$$= \xi_0 - \int_0^\infty K^*(x-t)Q(\Psi(t))dt = \xi_0 - \Psi(x).$$

Следовательно, из (14) и (15) получаем поточечную сходимость последовательности $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$, причём

$$0 \leqslant \rho^*_{\eta_0}(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \xi_0 - \Psi(x) \in L^0_\infty(\mathbb{R}^+), \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (16)$$

По теореме Б. Леви (см. [14]), функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (1). Из (16) следует, что $\varphi \in L_\infty^0(\mathbb{R}^+)$. $\square$

Замечание. Из приведённых рассуждений с учётом результатов работы [8] можем утверждать, что результаты теоремы 2 остаются в силе, если вместо чётности ядра K^* потребовать выполнение неравенства

$$\int_{-\infty}^{0} K^*(\tau)d\tau \geqslant \frac{1}{2}.$$

Теперь *докажем теорему* 3. Как известно, при условиях (8), (9) имеют место следующие факты (см. [9]):

$$\int_0^\infty \tilde{K}(x-t)\frac{t+\lambda}{x+\lambda}dt = 1 - \Phi_1^\lambda(x), \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{17}$$

и

$$\Phi_\delta^\lambda(x) \geqslant 0, \quad \text{при} \quad \delta > 0,\ \lambda \geqslant c,\ x \in \mathbb{R}^+. \tag{18}$$

Ниже мы существенным образом будем использовать соотношение (17) и неравенство (18). Введём следующие последовательные приближения:

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_0^\infty K(x,t)H(t,\varphi_n(t))dt + A(x,\varphi_n(x)), \tag{19}$$

$$\varphi_0(x) = \eta - \frac{\eta S(x)}{ax+\lambda a}, \quad n \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}^+,$$

где $S(x)$ задаётся согласно формуле (10).

Докажем, что выполняются следующие утверждения:

1) $\varphi_n(x)$ убывает по n;
2) $\varphi_n(x) \geqslant \Phi_{\eta_0}(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}^+$.

В силу (17) и свойств функций H и A из (19) будем иметь

$$\varphi_1(x) = \int_0^\infty \tilde{K}(x-t)\frac{t+\lambda}{x+\lambda}\Big(\eta - \frac{\eta S(t)}{at+\lambda a}\Big)dt + A(x,\eta) \leqslant$$
$$\leqslant \eta - \Phi_\eta^\lambda(x) - \frac{\eta}{a(x+\lambda)}\int_0^\infty \tilde{K}(x-t)S(t)dt + \Phi_\eta^\lambda(x) =$$
$$= \eta - \frac{\eta S(t)}{ax+\lambda a} = \varphi_0(x).$$

С другой стороны,

$$\varphi_0(x) = \eta - \frac{\eta S(t)}{ax+\lambda a} = \eta - \frac{\eta}{a}\int_0^\infty K(x,t)\frac{S(t)}{t+\lambda}dt =$$
$$= \Phi_\eta^\lambda(x) + \int_0^\infty K(x,t)\Big(\eta - \frac{\eta S(t)}{at+\lambda a}\Big)dt \geqslant \Phi_\eta^\lambda(x) \geqslant \Phi_{\eta_0}^\lambda(x), \quad \text{ибо} \quad \lambda \geqslant c.$$

Следовательно, $\varphi_1(x) \geqslant A(x,\varphi_0(x)) \geqslant A(x,\Phi_{\eta_0}^\lambda(x)) \geqslant \Phi_{\eta_0}^\lambda(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Предполагая, что $\varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n-1}(x)$ и $\varphi_n(x) \geqslant \Phi^{\lambda}_{\eta_0}(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, из (19) получим $\varphi_{n+1}(x) \leqslant \varphi_n(x)$ и $\varphi_{n+1}(x) \geqslant \Phi^{\lambda}_{\eta_0}(x)$. Таким образом, последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет предел при $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$, причём этот предел (в силу теоремы Б. Леви) удовлетворяет уравнению (1) и соотношениям

$$0 \leqslant \Phi^{\lambda}_{\eta_0}(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \eta - \frac{\eta S(x)}{ax + \lambda a}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{20}$$

Так как $\lambda \geqslant \operatorname*{esssup}\limits_{x\in\mathbb{R}^+} q(x)/a$, выполняется $0 \leqslant \eta - \frac{\eta S(x)}{ax+\lambda a} \leqslant \frac{\eta a\lambda}{ax+\lambda a} \underset{x\to\infty}{\to} 0$, тогда из (20) следует, что $\varphi \in L^0_{\infty}(\mathbb{R}^+)$. $\square$

Автор выражает благодарность проф. А. Х. Хачатряну за полезные замечания.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян*, “Вопросы нелинейной теории динамики разреженного газа” // *Матем. моделирование*, 2004. Т. 16, № 1. С. 67–74. [*N. B. Engibaryan, A. Kh. Khachatryan*, “On nonlinear theory dynamics of dilute gas” // *Matem. Mod.*, 2004. Vol. 16, no. 1. Pp. 67–74].
2. *C. Cercignani*, Theory and application of the Boltzmann equation. Edinburg, London: Scottish Academic Press, 1975. 415 pp.; русск. пер.: *К. Черчиньяни*, Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
3. *А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян*, “Качественные различия решений для одной модели уравнения Больцмана в линейном и нелинейном случаях” // *ТМФ*, 2012. Т. 172, № 3. С. 497–504; англ. пер.: *A. Kh. Khachatryan, Kh. A. Khachatryan*, “Qualitative difference between solutions for a model of the Boltzmann equation in the linear and nonlinear cases” // *Theoret. and Math. Phys.*, 2012. Vol. 172, no. 3. Pp. 1315–1320.
4. *P. S. Milojević*, “A global description of solutions to nonlinear perturbations of the Wiener–Hopf integral equations” // *Electronic Journal of Differential Equations (EJDE)*, 2006. Vol. 2006, 51. 14 pp.
5. *Х. А. Хачатрян*, “Однопараметрическое семейство решений одного класса нелинейных уравнений типа Гаммерштейна на полуоси” // *ДАН*, 2009. Т. 429, № 5. С. 595–599; англ. пер.: *Kh. A. Khachatryan*, “One-parameter family of solutions for one class of hammerstein nonlinear equations on a half-line” // *Dokl. Math.*, 2009. Vol. 80, no. 3. Pp. 872–876.
6. *R. Precup*, Methods in nonlinear integral equations. New York: Springer Verlag, 2007. 232 pp.
7. *C. D. Panchal*, “Existence theorems for equation of Hammerstein type” // *Quart. J. Math.*, 1984. Vol. 35, no. 3. Pp. 311–319.
8. *A. Kh. Khachatryan, Kh. A. Khachatryan*, “On an integral equation with monotonic nonlinearity” // *Mem. Differential and Equations Math. Phys.*, 2010. Vol. 51. 59–72 pp.
9. *Х. А. Хачатрян*, “Об одном классе интегральных уравнений типа Урысона с сильной нелинейностью” // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012. Т. 76, № 1. С. 173–200; англ. пер.: *Kh. A. Khachatryan*, “On a class of integral equations of Urysohn type with strong non-linearity” // *Izv. Math.*, 2012. Vol. 76, no. 1. Pp. 163–189.
10. *G. Emmanuele*, “An existense theorem for Hammerstein integral equations” // *Portugaliae Mathematica*, 1994. Vol. 51, no. 4. Pp. 607–611.
11. *А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян*, “Об одном нелинейном интегральном уравнении типа уравнения Гаммерштейна с некомпактным оператором” // *Матем. сб.*, 2010. Т. 201, № 4. С. 125–136; англ. пер.: *A. Kh. Khachatryan, Kh. A. Khachatryan*, “A nonlinear integral equation of Hammerstein type with a noncompact operator” // *Sb. Math.*, 2010. Vol. 201, no. 4. Pp. 595–606.

12. *Л. Г. Арабаджян*, "О существовании нетривиальных решений некоторых линейных и нелинейных уравнений типа свертки" // *Укр. мат. журн*, 1989. Т. 41, № 12. С. 1587–1595; англ. пер.: *L. G. Arabadzhyan*, "Existence of nontrivial solutions of some linear and nonlinear equations of convolution type" // *Ukrainian Math. J.*, 1989. Vol. 41, no. 12. Pp. 1359–1367.
13. *Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян*, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения" / Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал., Т. 22. М.: ВИНИТИ, 1984. С. 175–244; англ. пер.: *L. G. Arabadzhyan, N. B. Engibaryan*, "Convolution equations and nonlinear functional equations" // *J. Soviet Math.*, 1987. Vol. 36, no. 6. Pp. 745–791.
14. *А. Н. Колмогоров, В. С. Фомин*, Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 544 с. [*A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin*, Elements of the theory of functions and functional analysis. Moscow: Nauka, 1981. 544 pp.]

Поступила в редакцию 04/X/2012;
в окончательном варианте — 26/XII/2012.

MSC: 45G10; 45M20, 45L05

ON SOME CLASSES OF NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS WITH NONCOMPACT OPERATORS

Kh. A. Khachatryan

Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Armenia,
24/5, Marshal Baghramyan Ave., Yerevan, Armenia, 375019.

E-mail: `khach82@rambler.ru`

The work is devoted to the investigation of some classes of nonlinear integral equations of Hammerstein–Nemitski type with noncompact operators. Above mentioned class of equations, beside the theoretical interest has immediately an application in kinetic theory of gases. The existence theorems for positive solutions in different functional spaces are proved.

Key words: *Hammerstein–Nemitski type integral equation, condition of conservativity, Caratheodory's condition, monotonicity, Wiener–Hopf equation.*

Original article submitted 04/X/2012;
revision submitted 26/XII/2012.

Khachatur A. Khachatryan (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Senior Research Scientist, Dept. of Methods of Mathematical Physics.