

УДК 517.958:539.3(4)

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ СВОЙСТВАМИ

В. А. Кудинов, А. Э. Кузнецова, А. В. Ерёмин, Е. В. Котова

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mails: kud-samgtu@yandex.ru, a.v.eremin@list.ru

Разработана методика получения приближённых аналитических решений квазистатических задач термоупругости (плоское напряжённое состояние, плоская деформация) для многослойных конструкций с переменными в пределах каждого слоя физическими свойствами среды. Использован рекуррентный метод построения систем координатных функций, точно удовлетворяющих граничным условиям сопряжения, заданным в виде равенства радиальных (нормальных) напряжений и перемещений в точках контакта слоёв.

Ключевые слова: многослойные конструкции, аналитическое решение, задача термоупругости, переменные физические свойства среды, система координатных функций, ортогональный метод Бубнова—Галёркина.

Точные аналитические решения задач термоупругости с переменными в пределах каждого слоя физическими свойствами среды (применительно к задачам в квазистатической постановке, то есть без учёта изменения напряжений во времени) в настоящее время не получены. Основная причина заключается в нелинейности исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а также в необходимости выполнения не только граничных условий, но и условий сопряжения между слоями, заданных в виде равенства напряжений и перемещений в точках контакта слоёв.

В настоящей работе применительно к решению указанных задач разработан рекуррентный метод построения систем координатных функций, точно удовлетворяющих граничным условиям и условиям сопряжения. Его основная идея состоит в последовательном построении координатных функций для каждого тела при использовании метода неопределённых коэффициентов.

Выполнение системы исходных дифференциальных уравнений осуществлялось путём составления их невязки и требования ортогональности невязки ко всем координатным функциям (ортогональный метод Бубнова—Галёркина). При этом решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений сводится к решению системы алгебраических линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов, число которых равно числу приближений. Реализация такого метода решения оказывается возможной благодаря использованию глобальной (одинаковой для всех слоёв) системы неизвестных коэффициентов, содержащихся в решениях для каждого отдельного слоя.

Василий Александрович Кудинов (д.ф.-м.н., проф.), заведующий кафедрой, каф. теоретических основ теплотехники и гидромеханики.

Анастасия Эдуардовна Кузнецова, ассистент, каф. теоретических основ теплотехники и гидромеханики. *Антон Владимирович Ерёмин*, ассистент, каф. теоретических основ теплотехники и гидромеханики. *Евгения Валериевна Котова*, ассистент, каф. теоретических основ теплотехники и гидромеханики.

Система дифференциальных уравнений относительно радиального перемещения для случая, когда модуль упругости и коэффициент линейного расширения в пределах каждого слоя являются произвольными функциями радиуса (рассматривается длинный полый цилиндр — плоская деформация), имеет вид [1, 2]

$$\frac{d}{dr} \left(E_i r \frac{dU_i}{dr} \right) + \left(\frac{\nu_i}{1 - \nu_i} \frac{dE_i}{dr} - \frac{E_i}{r} \right) U_i = \frac{(1 + \nu_i)r}{1 - \nu_i} \frac{d}{dr} (\alpha_i E_i T_i), \quad (1)$$

$$r_i < r < r_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где $U_i(r)$ — радиальное перемещение i -того слоя; $E_i(r)$, $\alpha_i(r)$, $T_i(r)$ — соответствующие i -тому слою модуль упругости, коэффициент линейного расширения и температура; ν_i — коэффициент Пуассона i -того слоя; r — радиальная координата; m — число слоёв.

Для случая, когда $E_i = \text{const}$ и $\alpha_i = \text{const}$, система уравнений (1) приводится к виду

$$\frac{d^2 U_i}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_i}{dr} - \frac{U_i}{r^2} - \frac{1 + \nu_i}{1 - \nu_i} \alpha_i \frac{dT_i}{dr} = 0, \quad r_i < r < r_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

Напряжения в каждом слое по известному перемещению определяются по формулам

$$\sigma_{ri} = \frac{E_i}{(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)} \left[(1 - \nu_i) \frac{dU_i}{dr} + \nu_i \frac{U_i}{r} - (1 + \nu_i) \alpha_i T_i \right]; \quad (3)$$

$$\sigma_{\theta i} = \frac{E_i}{(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)} \left[\nu_i \frac{dU_i}{dr} + (1 - \nu_i) \frac{U_i}{r} - (1 + \nu_i) \alpha_i T_i \right], \quad (4)$$

где σ_{ri} , $\sigma_{\theta i}$ — радиальное и окружное напряжения в i -том слое.

С целью упрощения математических преобразований основную идею метода рассмотрим на примере решения задачи термоупругости для двухслойного длинного полого цилиндра ($m = 2$) с постоянными в пределах каждого слоя физическими свойствами среды. При этом отметим, что без каких-либо изменений этот метод может быть применён и к решению задач термоупругости для многослойных конструкций с переменными свойствами.

Граничные условия применительно к двухслойному полному цилиндру имеют вид

$$\left[a_1 \frac{dU_1}{dr} + \nu_1 \frac{U_1}{r} \right]_{r=r_1} = c_1 \alpha_1 T_1|_{r=r_1}, \quad (5)$$

$$\left[a_2 \frac{dU_2}{dr} + \nu_2 \frac{U_2}{r} \right]_{r=r_3} = c_2 \alpha_2 T_2|_{r=r_3}; \quad (6)$$

$$\eta_1 E_1 \left[a_1 \frac{dU_1}{dr} + \nu_1 \frac{U_1}{r} - c_1 \alpha_1 T_1 \right]_{r=r_2} = \eta_2 E_2 \left[a_2 \frac{dU_2}{dr} + \nu_2 \frac{U_2}{r} - c_2 \alpha_2 T_2 \right]_{r=r_2}; \quad (7)$$

$$U_1(r_2) = U_2(r_2), \quad (8)$$

где $a_1 = 1 - \nu_1$; $a_2 = 1 - \nu_2$; $c_1 = 1 + \nu_1$; $c_2 = 1 + \nu_2$; $\eta_1 = [(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)]^{-1}$; $\eta_2 = [(1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2)]^{-1}$.

Из соотношений (5), (6) следует, что радиальные напряжения на внутренней ($r = r_1$) и внешней ($r = r_3$) поверхностях цилиндра равны нулю. Соотношения (7), (8) представляют собой условия сопряжения между слоями, записанные в виде равенства радиальных напряжений (соотношение (7)) и перемещений (соотношение (8)) в точке контакта слоёв $r = r_2$.

С целью упрощения процесса получения решения приведем задачу (2)–(8) к безразмерному виду. Для этого введём следующие безразмерные переменные и параметры: $\vartheta_i = U_i/U_M$, $\rho = r/r_3$, $\rho_1 = r_1/r_3$, $\rho_2 = r_2/r_3$, $\rho_3 = r_3/r_3 = 1$, $\varepsilon_1 = E_1/E_1 = 1$, $\varepsilon_2 = E_2/E_1$, $\mu_1 = \alpha_1/\alpha_1 = 1$, $\mu_2 = \alpha_2/\alpha_1$; $\Theta_i = T_i/T_M$, $\sigma_{ri}^* = \sigma_{ri}^*/\sigma_M$, $\sigma_{\theta i}^* = \sigma_{\theta i}/\sigma_M$; $i = 1, 2$, где U_M , T_M , σ_M — масштабные перемещение и температура.

С учётом принятых обозначений задача (2), (5)–(8) принимает вид

$$\frac{d^2 \vartheta_i}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\vartheta_i}{d\rho} - \frac{\vartheta_i}{\rho^2} - \beta_i \mu_i \alpha_1 r_3 \frac{T_M}{U_M} \frac{d\Theta_i}{d\rho} = 0; \quad (9)$$

$$\left[a_1 \frac{d\vartheta_1}{d\rho} + \nu_1 \frac{\vartheta_1}{\rho} \right]_{\rho=\rho_1} = \frac{c_1 \mu_1 \alpha_1 r_3 T_M}{U_M} \Theta_1 \Big|_{\rho=\rho_1}, \quad (10)$$

$$\left[a_2 \frac{d\vartheta_2}{d\rho} + \nu_2 \frac{\vartheta_2}{\rho} \right]_{\rho=1} = \frac{c_2 \mu_2 \alpha_1 r_3 T_M}{U_M} \Theta_2 \Big|_{\rho=1}; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \eta_1 \varepsilon_1 \left[a_1 \frac{d\vartheta_1}{d\rho} + \nu_1 \frac{\vartheta_1}{\rho} - \frac{c_1 \mu_1 \alpha_1 r_3 T_M}{U_M} \Theta_1 \right]_{\rho=\rho_2} = \\ = \eta_2 \varepsilon_2 \left[a_2 \frac{d\vartheta_2}{d\rho} + \nu_2 \frac{\vartheta_2}{\rho} - \frac{c_2 \mu_2 \alpha_1 r_3 T_M}{U_M} \Theta_2 \right]_{\rho=\rho_2}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\vartheta_1(\rho_2) = \vartheta_2(\rho_2), \quad (13)$$

где $\beta_i = (1 + \nu_i)/(1 - \nu_i)$; $i = 1, 2$.

Формулы (3), (4) в безразмерном случае примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ri}^* &= \frac{\eta_i \varepsilon_i}{\sigma_M} \left[a_i \frac{d\vartheta_i(\rho)}{d\rho} + \nu_i \frac{\vartheta_i(\rho)}{\rho} - \frac{c_i \mu_i \alpha_1 r_3 T_M}{U_M} \Theta_i(\rho) \right]; \\ \sigma_{\theta i}^* &= \frac{\eta_i \varepsilon_i}{\sigma_M} \left[\nu_i \frac{d\vartheta_i(\rho)}{d\rho} + a_i \frac{\vartheta_i(\rho)}{\rho} - \frac{c_i \mu_i \alpha_1 r_3 T_M}{U_M} \Theta_i(\rho) \right]. \end{aligned}$$

В качестве модельного примера предположим, что температура в каждом слое описывается функцией

$$T_i(r) = D_i + R_i r \quad (i = 1, 2), \quad (14)$$

где $D_1 = 140,32$; $R_1 = -2880$; $D_2 = 53,375$; $R_2 = -625$.

Соотношение (14) в безразмерном виде для каждого слоя запишется так:

$$\theta_1(\rho) = 1,4032 - 1,584\rho, \quad \theta_2(\rho) = 0,53375 - 0,34375\rho.$$

Решение задачи (9)–(13) принимается в виде [3]

$$\vartheta_i(\rho) = \Phi_1(\rho) + \sum_{k=2}^n q_k \varphi_{1k}(\rho), \quad (15)$$

$$\vartheta_2(\rho) = \Phi_2(\rho) + \sum_{k=2}^n q_k \varphi_{2k}(\rho), \quad (16)$$

где $\Phi_1(\rho) = F_1 + F_2\rho + F_3\rho^2$, $\Phi_2(\rho) = F_4\rho$ — функции, неизвестные коэффициенты F_i которых определяются так, чтобы выполнялись неоднородные граничные условия (10), (11) и условия сопряжения (12), (13); $\varphi_{1k} = B_{1k} + B_{2k}\rho + B_{3k}\rho^k$, $\varphi_{2k} = 1 + B_{4k}\rho^k$ — координатные функции, неизвестные коэффициенты B_{ik} которых находятся из однородных граничных условий (10) и условий сопряжения (12), (13), то есть при равенстве нулю всех членов, находящихся в произведении с $\theta_1(\rho)$ и $\theta_2(\rho)$; q_k — неизвестные коэффициенты (одинаковые для каждого слоя), определяемые из выполнения дифференциальных уравнений (9).

Рассмотрим последовательность определения функций $\Phi_1(\rho)$ и $\Phi_2(\rho)$. Сначала находится функция $\Phi_2(\rho)$, неизвестный коэффициент F_4 которой определяется так, чтобы выполнялось неоднородное граничное условие (11). Подставляя $\Phi_2(\rho)$ в (11), находим

$$F_4 = \frac{c_2\mu_2\alpha_1r_3T_M}{U_M(a_2 + \nu_2)}\Theta_2(1).$$

Неизвестные коэффициенты F_1, F_2, F_3 функции $\Phi_1(\rho)$ находятся так, чтобы выполнялось неоднородное граничное условие (10) и условия сопряжения (12), (13). Подставляя $\Phi_1(\rho)$ и $\Phi_2(\rho)$ в (10), (12), (13), относительно коэффициентов F_1, F_2, F_3 получаем следующую систему трёх алгебраических линейных уравнений:

$$\begin{aligned} & \left[a_1 \frac{d\Phi_1(\rho)}{d\rho} + \nu_1 \frac{\Phi_1(\rho)}{\rho} - \frac{c_1\mu_1\alpha_1r_3T_M}{U_M} \Theta_1(\rho) \right]_{\rho=\rho_1} = 0; \\ & \eta_1 \varepsilon_1 \left[a_1 \frac{d\Phi_1(\rho)}{d\rho} + \nu_1 \frac{\Phi_1(\rho)}{\rho} - \frac{c_1\mu_1\alpha_1r_3T_M}{U_M} \Theta_1(\rho) \right]_{\rho=\rho_2} = \\ & = \eta_2 \varepsilon_2 \left[a_2 \frac{d\Phi_2(\rho)}{d\rho} + \nu_2 \frac{\Phi_2(\rho)}{\rho} - \frac{c_2\mu_2\alpha_1r_3T_M}{U_M} \Theta_2(\rho) \right]_{\rho=\rho_2}; \\ & \Phi_1(\rho_2) - \Phi_2(\rho_2) = 0. \end{aligned}$$

Неизвестный коэффициент B_{4k} координатных функций $\varphi_{2k}(\rho)$ находится из однородного граничного условия (11). Подставляя $\varphi_{2k}(\rho)$ в (11), положив правую часть равной нулю, получаем

$$\left[a_2 \frac{d\varphi_{2k}(\rho)}{d\rho} + \nu_2 \frac{\varphi_{2k}(\rho)}{\rho} \right]_{\rho=1} = 0, \quad k = 2, 3, \dots, n. \quad (17)$$

Из решения алгебраического уравнения (17) находим

$$B_{4k} = -\nu_2/(\nu_2 + ka_2).$$

Неизвестные коэффициенты B_{1k}, B_{2k}, B_{3k} координатных функций $\varphi_{1k}(\rho)$ находятся из однородного граничного условия (10) и однородных условий сопряжения (12), (13). Подставляя $\varphi_{1k}(\rho)$ и $\varphi_{2k}(\rho)$ в (10), (12), (13), положив

члены, находящиеся в произведении с $\Theta_1(\rho)$ и $\Theta_2(\rho)$, равными нулю, относительно неизвестных коэффициентов B_{1k} , B_{2k} , B_{3k} получаем следующую систему трёх алгебраических линейных уравнений:

$$\begin{aligned} & \left[a_1 \frac{d\varphi_{1k}(\rho)}{d\rho} + \nu_1 \frac{\varphi_{1k}(\rho)}{\rho} - \frac{c_1 \mu_1 \alpha_1 r_3 T_M}{U_M} \Theta_1(\rho) \right]_{\rho=\rho_1} = 0; \\ & \eta_1 \varepsilon_1 \left[a_1 \frac{d\varphi_{1k}(\rho)}{d\rho} + \nu_1 \frac{\varphi_{1k}(\rho)}{\rho} - \frac{c_1 \mu_1 \alpha_1 r_3 T_M}{U_M} \Theta_1(\rho) \right]_{\rho=\rho_2} = \\ & = \eta_2 \varepsilon_2 \left[a_2 \frac{d\varphi_{2k}(\rho)}{d\rho} + \nu_2 \frac{\varphi_{2k}(\rho)}{\rho} - \frac{c_2 \mu_2 \alpha_1 r_3 T_M}{U_M} \Theta_2(\rho) \right]_{\rho=\rho_2}; \\ & \varphi_{1k}(\rho_2) - \varphi_{2k}(\rho_2) = 0. \end{aligned}$$

После нахождения коэффициентов F_i и B_{ik} соотношения (15), (16) при любых значениях неизвестных коэффициентов q_k будут точно удовлетворять граничным условиям (10), (11) и условиям сопряжения (12), (13). Для определения неизвестных коэффициентов q_k составим невязки уравнений (9) и потребуем ортогональности невязок ко всем координатным функциям $\varphi_{1k}(\rho)$ и $\varphi_{2k}(\rho)$:

$$\begin{aligned} & \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\frac{d^2 \vartheta_1}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\vartheta_1}{d\rho} - \frac{\vartheta_1}{\rho^2} - \beta_1 \mu_1 \alpha_1 r_3 \frac{T_M}{U_M} \frac{d\Theta_1}{d\rho} \right) \varphi_{1j}(\rho) \rho d\rho + \\ & + \int_{\rho_2}^1 \left(\frac{d^2 \vartheta_2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\vartheta_2}{d\rho} - \frac{\vartheta_2}{\rho^2} - \beta_2 \mu_2 \alpha_1 r_3 \frac{T_M}{U_M} \frac{d\Theta_2}{d\rho} \right) \varphi_{2j}(\rho) \rho d\rho = 0, \quad (18) \end{aligned}$$

$j = 2, 3, \dots, n$.

Подставляя (15), (16) в (18), после определения интегралов относительно неизвестных коэффициентов q_k будем иметь систему $n - 2$ алгебраических линейных уравнений.

Исходные данные для решения задачи следующие [3–5]: $r_1 = 0,014$ м; $r_2 = 0,039$ м; $r_3 = 0,055$ м; $\nu_1 = \nu_2 = 0,2$; $E_1 = 19,5 \cdot 10^9$ кг/м²; $\sigma_M = 0,1107$; $E_2 = 13 \cdot 10^9$ кг/м²; $\alpha_1 = 15 \cdot 10^{-6}$ /К; $\alpha_2 = 11 \cdot 10^{-6}$ /К; $T_M = 100$ °С; $U_M = 10^{-3}$ м.

Результаты расчётов безразмерных радиальных и окружных напряжений по формулам (15), (16) во втором приближении даны на рис. 1. Отметим, что соотношения (15), (16) в данном случае точно удовлетворяют граничным

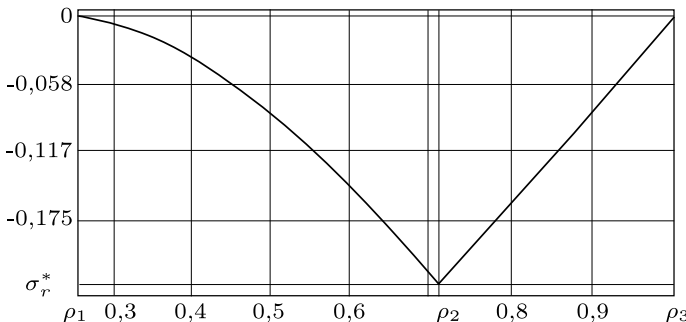


Рис. 1. Изменение радиальных напряжений (второе приближение)

условиям и условиям сопряжения (10)–(13), точность выполнения уравнений (9) зависит от числа приближений (от числа членов рядов (15), (16)).

Результаты расчётов напряжений σ_{ri}^* и $\sigma_{\theta i}^*$ даны на рис. 1, 2. Их анализ позволяет сделать вывод о том, что радиальные напряжения σ_r^* имеют отрицательный знак (сжатие). Радиальные напряжения на внешних поверхностях стенок ($\rho = \rho_1$ и $\rho = 1$), как это следует из граничных условий (10), (11), равны нулю. Окружные напряжения σ_θ^* в пределах первого слоя имеют отрицательный знак, а в пределах второго — положительный (растяжение). В точке контакта слоёв ($\rho = \rho_2$) ввиду различия числовых значений модулей упругости и коэффициентов линейного расширения, а также вследствие непрерывности перемещений наблюдается скачок первого рода для функции окружных напряжений.

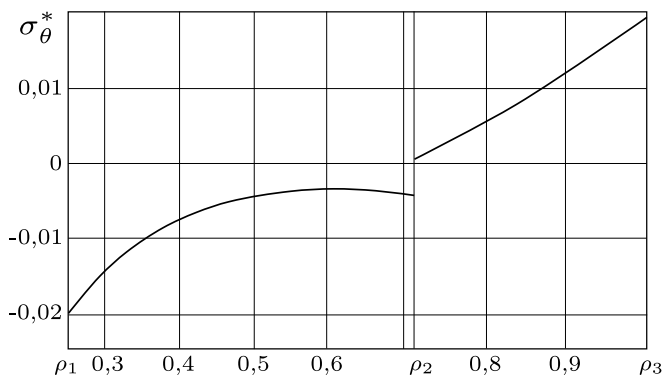


Рис. 2. Изменение окружных напряжений (второе приближение)

Заключение. На основе использования систем координатных функций, точно удовлетворяющих граничным условиям и условиям сопряжения, разработана методика получения приближённых аналитических решений квазистатических задач термоупругости для многослойных конструкций на примере цилиндра с переменными в пределах каждого слоя физическими свойствами среды. Отличительной особенностью метода является использование глобальной (одинаковой для каждого слоя) системы неизвестных коэффициентов, позволяющей с помощью ортогонального метода Бубнова—Галёркина свести решение исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений к решению системы алгебраических линейных уравнений, число неизвестных которой (принятых коэффициентов q_k) равно числу приближений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. А. Д. Коваленко, Введение в термоупругость. Киев: Наук. думка, 1965. 202 с. [A. D. Kovalenko, Introduction to Thermoelasticity. Kiev: Nauk. Dumka, 1965. 202 pp.]
2. S. Timoshenko, J. N. Goodier, Theory of Elasticity. New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1951. xviii+506 pp.; русск. пер.: С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер, Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
3. Кудинов В. А., Карташов Э. М., Калашников В. В., Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. М.: Высш. шк., 2005. 430 с. [V. A. Kudinov, É. M. Kartashov, V. V. Kalashnikov, Analytical solutions of problem of heat and mass transfer and thermoelasticity for multilayered structures. Moscow: Vyssh. shk., 2005. 430 pp.]

4. В. А. Кудинов, А. В. Еремин, Е. В. Котова, “Получение аналитических решений задач термоупругости для многослойных тел с переменными свойствами” / В сб.: *Третья международная конференция «Математическая физика и её приложения»*: Материалы конф. (Самара, 27 августа – 1 сентября, 2012 г.); ред. чл.-корр. РАН И. В. Волович, д.ф.-м.н., проф. В. П. Радченко. Самара: СамГТУ, 2012. С. 184–185. [V. A. Kudinov, A. V. Eremin, E. V. Kotova, “Analytical solutions of problems of thermoelasticity for multilayered bodies with variable properties” / In: *The Third International Conference “Mathematical Physics and Its Applications”*: Book of Abstracts (August 27 – September 01, 2012 Samara, Russia); eds. I. V. Volovich, V. P. Radchenko. Samara: Samara State Technical Univ., 2012. Pp. 184–185].
5. В. А. Кудинов, А. В. Еремин, Е. В. Котова, “Получение точных аналитических решений задач термоупругости для многослойных конструкций” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. №2(27). С. 188–191. [V. A. Kudinov, A. V. Eremin, E. V. Kotova, “Obtaining exact analytical solutions of the thermoelasticity problem for multilayer cylindrical structures” // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012. no. 2(27). Pp. 188–191].

Поступила в редакцию 29/X/2012;
в окончательном варианте — 01/II/2013.

MSC: 74F05; 74C05, 80A20

ANALYTICAL SOLUTIONS OF PROBLEMS OF THERMOELASTICITY FOR MULTILAYERED BODIES WITH VARIABLE PROPERTIES

V. A. Kudinov, A. E. Kuznetsova, A. V. Eremin, E. V. Kotova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mails: kud-samgtu@yandex.ru, a.v.eremin@list.ru

The technics for the construction of approximate analytical solutions for the quasistatic problems of thermoelasticity (plane-stressed state, plane deformation) for the multilayered bodies with variable within limits of each layer physical properties of medium. The recursive method is used for the construction of systems of coordinate functions, satisfying the boundary matching conditions, given as the equality of radial (normal) stresses and displacements in the layer-contact points.

Key words: multilayer constructions, analytical solution, thermoelasticity problem, environmental variable physical properties, system of coordinate functions, Bubnov–Galyorkin orthogonal method.

Original article submitted 29/X/2012;
revision submitted 01/II/2013.

Vasiliy A. Kudinov (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Head of Dept., Dept. of Theoretical Basis of Heat Engineering & Flow Mechanics.

Anastasiya E. Kuznetsova, Assistant, Dept. of Theoretical Basis of Heat Engineering & Flow Mechanics. Anton V. Eremin, Assistant, Dept. of Theoretical Basis of Heat Engineering & Flow Mechanics. Evgeniya V. Kotova, Assistant, Dept. of Theoretical Basis of Heat Engineering & Flow Mechanics.