УДК 517.958

# ИНФИНИТНОЕ ДВИЖЕНИЕ В КЛАССИЧЕСКОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

***А. И. Михайлов***[1,2]

[1] Всероссийский научно-исследовательский институт рыбного хозяйства и океанографии, 107140, Россия, Москва, ул. Верхняя Красносельская, 17.
[2] Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Россия, 119991, Москва, ул. Губкина, 8.

E-mail: mikhailov1984@gmail.com

*В работе исследуется описание инфинитного движения в функциональной формулировке классической механики. На примере простых точно решаемых задач (прохождения через барьер и падения на центр) рассматривается два класса проблем: рассеяние и сингулярность. Вычисляются функционально механические поправки к средним значениям и дисперсиям канонических переменных, обусловленные рассеянием, в частности в простейшем случае прохождения через барьер возникает сдвиг среднего значения координаты на константу, зависящую от параметров барьера, и логарифмическая по времени поправка к дисперсии координаты свободного движения. Также показано, что функционально механический подход приводит к устранению сингулярности в кинетической энергии при падении на центр, эквивалентном решению уравнения Фридмана в космологии.*

**Ключевые слова:** *классическая механика, проблема необратимости, уравнение Лиувилля, задачи рассеяния, проблема сингулярности, вселенная Фридмана.*

**Введение.** В 2008 году И. В. Воловичем [1] была предложена переформулировка гамильтоновой динамики — классическая функциональная механика. Основной мотивацией пересмотра основ механики была проблема необратимости макроскопической динамики, возникающая при обосновании термодинамики [2]. Классический подход к решению этой проблемы, основанный на методе Боголюбова [3], предполагал вывод необратимых кинетических уравнений из обратимых уравнений механики; здесь же предлагалось обнаружить необратимость в самих микроскопических уравнениях, естественно, таким образом, чтобы в новых уравнениях микроскопической динамики так или иначе содержалась классическая механика. В новом подходе фундаментальное описание динамики задается уравнениями Лиувилля или Фоккера—Планка, где состоянием системы полагается плотность вероятности, т. е., как и в квантовой механике, состояние и наблюдаемые (например координаты в фазовом пространстве) более не совпадают. Использование плотности вероятности в качестве состояния системы обусловлено конечной точностью измерений [4], а также, в случае уравнения Фоккера—Планка, наличием малых неучтенных взаимодействий. Иными словами, исследуется реакция классической гамильтоновой системы на малые флуктуации начальных данных или движения. Сами классические траектории движения возникают как характеристики уравнения Лиувилля или как частный случай траектории стохастического процесса при отсутствии шума. Как было показано в последующих работах по функциональной механике [5–7], платой за необратимость мик-

*Андрей Игоревич Михайлов,* младший научный сотрудник, лаб. системного анализа[1]; младший научный сотрудник, научно-образовательный центр[2].

роскопических уравнений являются поправки к ньютоновским траекториям движения — средние от наблюдаемых не совпадают с наблюдаемыми, вычислительными на средних значениях начальных данных, в частности, траектории средних значений координат в фазовом пространстве будут отклонятся от траектории характеристики. Вид этих отклонений был исследован на конечных временах, пусть и сравнимых в ряде случаев со временем возвращения системы. В этой работе ставится задача исследования поправок на асимптотике инфинитного движения. Траектория может уйти на бесконечность как за бесконечное, так и за конечное время. Первому случаю соответствует задача рассеяния, второму — проблема сингулярности. Способ решения этих задач в рамках функциональной механики будет проиллюстрирован на двух простейших точно решаемых примерах — рассеянии на барьере и падении на центр соответственно.

Общая постановка задачи рассеяния в функциональной механике такова. Рассматривается уравнение Лиувилля, описывающее эволюцию функции распределения частицы, движущейся в потенциальном поле. Потенциал задается функцией с компактным носителем или же функцией, убывающей на бесконечности хотя бы степенным образом так, чтобы движение можно было считать свободным на бесконечно большом расстоянии от центра рассеяния. Далее ставится задача Коши с некоторыми начальными данными $\rho_{\text{in}}(p,q) \in L_1(\mathbb{R}^{2n})$; $p,q \in \mathbb{R}^n$; $\|\rho_{\text{in}}\|_{L_1} = 1$:

$$\partial_t \rho + [H,\rho] = 0, \quad H = \frac{p^2}{2m} + U(q); \qquad \rho(0,p,q) = \rho_{\text{in}}(p,q).$$

Пусть $y(t,p,q)$ и $x(t,p,q)$ есть характеристики уравнения Лиувилля, т. е. решения уравнений Гамильтона для импульса и координаты соответственно:

$$\dot{y} = -\frac{\partial H(y,x)}{\partial x}, \quad \dot{x} = \frac{\partial H(y,x)}{\partial y}; \qquad y(0) = p, \quad x(0) = q.$$

Тогда решение уравнение Лиувилля задаётся следующим выражением:

$$\rho(t,p,q) = \rho_{\text{in}}\big(y(-t,p,q), x(-t,p,q)\big),$$

в чём нетрудно убедиться прямой подстановкой. Решением задачи рассеяния будем называть такую плотность вероятности $\rho_{\text{out}}(p,q) \in L_1(\mathbb{R}^{2n})$; $p,q \in \mathbb{R}^n$; $\|\rho_{\text{out}}\|_{L_1} = 1$, что

$$\lim_{t\to+\infty} \big\|\rho_{\text{in}}(y(-t,p,q), x(-t,p,q)) - \rho_{\text{out}}(p, q-pt)\big\|_{L_1^*} = 0.$$

Заметим, что мы потребовали только слабой сходимости функций плотности, поскольку дальнейшие рассуждения будут опираться на поведение моментов распределения, т. е. вполне определенных линейных функционалов, что вполне согласуется с теоремами о существовании слабого предела вероятностной меры [16]. Линейный оператор, задающий преобразование $\rho_{\text{in}}(p,q) \to \rho_{\text{out}}(p,q)$, естественно называть оператором рассеяния по аналогии с матрицей рассеяния в квантовой механике. Далее мы рассмотрим простейшую задачу рассеяния, классическое решение которой прекрасно известно и не представляет трудности, однако функционально механическая постановка задачи приведёт к ряду нетривиальных эффектов — возникнут асимптотические поправки к траекториям средних значений координат и импульсов, а также старших моментов.

**1. Прохождение через барьер.** Рассмотрим задачу прохождения через барьер:

$$\partial_t\rho+[H,\rho]=0,\quad H=\frac{p^2}{2m}+U_0(\Theta(q)-\Theta(q-q_0));\qquad \rho(0,p,q)=\rho_0(p,q),$$

где $U_0=p_0^2/2m$ — высота барьера , а $q_0$ — ширина.

Задача решается методом характеристик

$$\rho(t,y,x)=\rho_0\big(y(-t,p,q),x(-t,p,q)\big),$$

где $(y(t,p,q),\,x(t,p,q))$ — траектория характеристики в фазовом пространстве ($(y,x)$ и $(p,q)$ — текущие и начальные импульс и координата соответственно), представляющая в данном случае кусочно-линейную ломаную:

$$y(t,p,q)=\begin{cases} p, & t<-\frac{q}{p};\\ \sqrt{(p-p_0)(p+p_0)}, & -\frac{q}{p}<t<-\frac{q}{p}+\frac{q_0}{\sqrt{(p-p_0)(p+p_0)}};\\ p, & t>-\frac{q}{p}+\frac{q_0}{p-p_0};\end{cases}$$

$$x(t,p,q)=\begin{cases} q+pt, & t<-\frac{q}{p};\\ \sqrt{p^2-p_0^2}\big(t+\frac{q}{p}\big), & -\frac{q}{p}<t<-\frac{q}{p}+\frac{q_0}{\sqrt{(p-p_0)(p+p_0)}};\\ q+pt-\big(\frac{q_0p}{\sqrt{p^2-p_0^2}}-q_0\big), & t>-\frac{q}{p}+\frac{q_0}{\sqrt{(p-p_0)(p+p_0)}}.\end{cases}$$

Заметим, что последнее равенство можно представить в виде $x(t,p,q) = x_0(t,p,q)+x_1(t,p,q)$, где $x_0(t,p,q)$ — траектория свободного движения в конфигурационном пространстве;

$$\lim_{t\to+\infty}x_0(t,p,q)-x(t,p,q)=\frac{q_0p}{\sqrt{p^2-p_0^2}}-q_0.$$

Здесь мы рассмотрели случай траекторий с импульсом выше критического $(p>p_0)$, если импульс ниже критического, то

$$y(t,p,q)=\begin{cases} p, & t<-q/p;\\ -p, & t>-q/p;\end{cases}\qquad x(t,p,q)=\begin{cases} q+pt, & t<-q/p;\\ -pt, & t>-q/p.\end{cases}$$

Удобно представить начальное распределение как комбинацию двух распределений с импульсами выше и ниже критического $\rho_0=(1-\alpha)\rho_-+\alpha\rho_+$, где

$$\alpha=\int_{-\infty}^{0}\int_{p_0}^{+\infty}\rho(0,p,q)dpdq,$$

далее мы будем вычислять моменты распределения $\rho_+$, предполагая также, что носитель распределения принадлежит области $q<0$, т. е. начальное распределение сосредоточено справа от барьера:

$$\overline{x}_+=\int_{-\infty}^{0}\int_{p_0}^{+\infty}dpdq\rho(0,p,q)x(t,p,q)=\langle x\rangle_{0+}-\langle x\rangle_{1+},$$

$$\lim_{t\to+\infty}\langle x\rangle_{0+}-\langle x\rangle_{+}=\int_{p_0}^{+\infty}dp\frac{q_0p}{\sqrt{(p-p_0)(p+p_0)}}-q_0<\infty.$$

Вычислим импульс $p_c(t,q)$, которым должна обладать частица с начальной координатой $q$, для того чтобы преодолеть барьер в момент времени $t$:

$$\frac{q_0}{\sqrt{(p_c^2-p_0^2)}}+\frac{-q}{p_c}=t.$$

Нам не требуется находить корни алгебраического уравнения четвёртого порядка точно, достаточно найти приближенное решение в асимптотике $p_c\to p_0$:

$$p_c\approx p_0\sqrt{1+(\tau/(t-T(q)))^2}\approx p_0(1+(\tau/2(t-T(q)))^2);$$
$$\tau=p_0/q_0,\quad T(q)=-q/p_0.$$

Вычислим первый момент:

$$\lim_{t\to+\infty}x_0(t,p,q)-x(t,p,q)=\frac{q_0p}{\sqrt{p^2-p_0^2}}-q_0;$$

$$\lim_{t\to+\infty}\langle x\rangle_{0+}-\langle x\rangle_{+}=\int_{p_0}^{+\infty}\int dqdp\rho(0,p,q)\frac{q_0p}{\sqrt{(p-p_0)(p+p_0)}}-q_0=$$
$$=q_0\sqrt{(p_+^2-p_0^2)}.$$

Преобразуем выражение для дисперсии:

$$\langle(x-\langle x\rangle_+)^2\rangle_+=\langle(x_0-\langle x_0\rangle_+-(x_1-\langle x_1\rangle_+))^2\rangle_+=$$
$$=\langle(x_0-\langle x_0\rangle_+)^2\rangle_+-2(\langle x_0x_1\rangle_+-\langle x_0\rangle_+\langle x_1\rangle_+)+\langle x_1^2\rangle_+-\langle x_1\rangle_+^2.$$

Будем вычислять поправки к дисперсии:

$$\langle x_0x_1\rangle_+=\int_{p_0}^{+\infty}\int dqdp\rho(0,p,q)\frac{q_0p^2t}{\sqrt{(p-p_0)(p+p_0)}}.$$

Первая поправка является линейной функции времени, вторая же, обусловленная дисперсией зависящего от начального импульса сдвига, оказывается формально расходящимся интегралом

$$\int_{p_0}^{+\infty}\int dqdp\rho(0,p,q)\frac{q_0^2p^2}{(p-p_0)(p+p_0)}=\infty.$$

Однако эта расходимость связана лишь с тем, что дисперсия в функциональной механике неограниченно возрастает во времени. Поэтому переход к пределу и взятие интеграла нельзя наивно поменять местами, а следует аккуратно учесть зависимость нижнего предела интегрирования от времени. Для того чтобы выделить асимптотику по времени, надо один раз проинтегрировать по частям

$$
\begin{aligned}
\langle x_1^2\rangle_+ \sim \int_{-\infty}^{0} dq \int_{p_c(t,q)}^{+\infty} \frac{q_0^2 p^2 \rho(0,p,q)dp}{(p-p_0)(p+p_0)} \sim \\
\sim -\int_{-\infty}^{0} dq \frac{q_0^2 p_0^2 \rho(0,p_0,q)}{2p_0} \ln((p_c-p_0)/p_0) = \\
= q_0^2 p_0 \int_{-\infty}^{0} dq\rho(0,p_0,q) \ln(2(t-T(q))/\tau).
\end{aligned}
$$

Аналогичным образом можно рассчитать асимптотику моментов высшего порядка:

$$
\begin{aligned}
\langle (x-\langle x\rangle_+)^n\rangle_+ = \langle (x_0-\langle x_0\rangle_+ - (x_1-\langle x_1\rangle_+))^n\rangle_+ = \\
= \sum_l C_n^l (-1)^l \langle (x_0-\langle x_0\rangle_+)^{n-l}(x_1-\langle x_1\rangle_+)^l\rangle_+ = \\
= \sum_l \sum_k^l C_n^l C_l^k (-1)^{l+k} \langle (x_0-\langle x_0\rangle_+)^{n-l} x_1^k\rangle_+ \langle x_1\rangle_+^{l-k}.
\end{aligned}
$$

Результатом последовательного интегрирования по частям будет многочлен следующего вида:

$$
\begin{aligned}
\langle (x_0-\langle x_0\rangle_+)^{n-l} x_1^k\rangle_+ \sim \int_{-\infty}^{0} dq \int_{p_c(t,q)}^{+\infty} \frac{q_0^k p^{n+k-l} \rho(0,p,q)dp}{(p-p_0)^{(k/2}(p+p_0)^{(k/2}} \sim \\
\sim q_0^k p_0^{n-l} \sum^k (-1)^{k-m} a_m (t/\tau)^m.
\end{aligned}
$$

Таким образом, рассеяние добавляет полиномиальную и логарифмическую поправки (для чётных моментов) к асимптотике моментов.

**2. Проблема сингулярности и функциональная механика.** Итак, исследовав частный случай рассеяния на ограниченном потенциале с компактным носителем, мы видели, что функционально механическое описание изменяет асимптотику инфинитного движения. Теперь рассмотрим другой важный случай инфинитного (в фазовом пространстве) движения — падение на центр, т. е. систему с неограниченным снизу гамильтонианом:

$$
H = \frac{P^2}{2m} - \frac{A}{Q}; \qquad A > 0, \quad m > 0.
$$

Здесь $P$ и $Q$ — канонические импульс и координата соответственно. Гамильтонианы такого рода возникают не только в ньютоновской теории гравитации, но и в ОТО, где роль канонической координаты будет играть радиус вселенной [10]. В последнем случае инфинитность движения, т. е. обращение канонического импульса в бесконечность за конечное время, интерпретируется как наличие космологической сингулярности — вписанное ниже решение будет описывать динамику замкнутой однородной вселенной в модели Фридмана. Была высказана гипотеза [9], что функционально механическое рассмотрение, вводящее «размазку», т. е. интегрирование по начальным данным, может устранить сингулярность. В данной работе указанная гипотеза будет подтверждена для части наблюдаемых — усредненные канонический импульс и кинетическая энергия остаются конечными в любой момент времени. Прежде чем вычислять функционально механические средние, необходимо найти явную зависимость классических траектории $P(t,p,q)$ и $Q(t,p,q)$ от начальных данных $p, q$:

$$\dot{P} = \frac{mA}{Q^2}, \quad \dot{Q} = \frac{P}{m}; \qquad P(0) = p, \quad Q(0) = q.$$

Введём следующую параметризацию времени $t$ через фазу $\varphi$:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{A}} R\big((\varphi - \varphi_0) - \sin(\varphi - \varphi_0)\big). \tag{1}$$

Эта замена переменных определена на всей действительной оси, поскольку функция в правой части монотонна. Тогда движение будет описываться циклоидой

$$Q(t,p,q) = R(1 - \cos(\varphi - \varphi_0)),$$

$$P(t,p,q) = m\dot{q} = m\frac{\partial q/\partial\varphi}{\partial t/\partial\varphi} = \sqrt{mA}\frac{\sin(\varphi - \varphi_0)}{1 - \cos(\varphi - \varphi_0)} = \\ = \sqrt{mA}\,\mathrm{ctg}((\varphi - \varphi_0)/2), \tag{2}$$

где $0 \leqslant t < +\infty$, $0 \leqslant \varphi_0 < 2\pi : R > 0$. Траектория однозначно определяется начальной фазой $\varphi_0$ и амплитудой $R$. Выразим начальные условия через фазу и амплитуду циклоиды:

$$Q(0,p,q) = q = R(1 - \cos(\varphi_0)), \quad P(0,p,q) = p = \sqrt{mA}\,\mathrm{ctg}((-\varphi_0)/2).$$

Вычислим зависимость амплитуды и фазы от начальных данных, воспользовавшись сохранением энергии и уравнением (2):

$$R = -\frac{A}{(2m)^{-1}p^2 - A/q}, \quad \varphi_0 = 2\,\mathrm{arcctg}(-p/\sqrt{mA}).$$

Подставляя эти выражения в (1), найдём сдвиг времени $t_0$, обеспечивающий ненулевую начальную фазу $\varphi_0$ в начальный момент времени $t = 0$:

$$t_0 = \sqrt{\frac{m}{A}} R(\varphi_0 - \sin\varphi_0).$$

Функциональную связь между начальным импульсом и начальной фазой удобнее выразить в форме явной зависимости тригонометрических функций фазы от импульса:

$$\cos(\varphi_0) = \frac{p^2 - mA}{p^2 + mA}, \quad \sin(\varphi_0) = -\frac{2p\sqrt{mA}}{p^2 + mA}.$$

Введём следующий набор функций:

$$T_k(p,q) = t_0(p,q) + 2\pi k\sqrt{\frac{m}{A}}R(p,q), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда функция $P(t,p,q)$ будет определена во всех точках расширенного фазового пространства за исключением поверхностей $T_k(p,q) = t$:

$$\operatorname{dom} P(t,p,q) = \Big\{\big\{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \setminus \{(t,p,q) : T(p,q) = t\}\big\}\Big\} \bigcap \big\{\{\mathbb{R}_+\} \times \{(p,q) : H(p,q) < 0\}\big\}.$$

Благодаря тому, что начальная фаза $\varphi_0(p,q) \equiv \varphi_0(p)$ является функцией только канонического импульса, можно установить явный вид поверхностей $T_k(p,q) = t$ в форме функций $q = q_k(t,p)$:

$$q_k(t,p) = \Big[\frac{p^2}{2mA} + \frac{1}{t}\sqrt{\frac{m}{A}}(\varphi_0 - \sin\varphi_0 + 2\pi k)\Big]^{-1},$$

что позволяет записать область определения $P(t,p,q)$ в следующем виде:

$$\operatorname{dom} P(t,p,q) = \Big\{\big\{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \setminus \{(t,p,q) : q = q_k(t,p)\}\big\}\Big\} \bigcap \big\{\{\mathbb{R}_+\} \times \{(p,q) : H(p,q) < 0\}\big\}.$$

При рассмотрении задачи Коши для уравнения Лиувилля мы будем рассматривать начальную плотность $\rho(p,q)$ со следующей областью определения:

$$D = \operatorname{dom}\rho(p,q) = \big\{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \setminus \{(p,q) : T_k(p,q) = 0\}\big\} \bigcap \{(p,q) : H(p,q) < 0\}.$$

Эта область может быть описана явно:

$$D = \{(p,q) : 0 < q < 2m/p^2\}.$$

Может быть сделано следующее утверждение:

$$\forall (p,q) \in D, \lim_{t \to T_k(p,q)} P(t,p,q) = \infty.$$

Теорема. *Для любой интегрируемой функции плотности $\rho(p,q)$ с компактными носителем $K$ в $D$ следующие несобственные интегралы:*

$$\langle P\rangle(t) = \int_K P(t,p,q)\rho(p,q)dpdq, \quad \langle P^2\rangle(t) = \int_K P^2(t,p,q)\rho(p,q)dpdq$$

*определены и являются непрерывными ограниченными функциями $t$ на всей действительной оси.*

Зафиксируем некоторые начальные значения $(p_0,q_0) \in K$ и выберем такой момент времени, когда траектория, начинающаяся в этой точке, уйдёт на бесконечность, т. е. чтобы

$$T - t_0(p_0,q_0) = 2\pi n\sqrt{\frac{m}{A}}R(p_0,q_0),$$

тогда
$$\varphi(T,p,q)-\varphi_0(p,q)=2\pi n+\chi(p,q).$$
Будем рассматривать пучок траекторий, близких к выбранной с началом в точке $(p_0\neq 0,q_0)\in K$, т. е. будем считать, что $\operatorname{supp}\rho\subset O_\varepsilon(p_0,q_0\subset K)$, где $\varepsilon = = \operatorname{diam} O_\varepsilon$, а $O_\varepsilon(p_0,q_0)$ — некоторая окрестность малого диаметра. Вычислим зависящие от начальных данных малые поправки к фазе, разложив (1) до первого неисчезающего члена:
$$T-t_0(p,q)=\sqrt{\frac{m}{A}}R(p,q)\Big(2\pi n-\frac{\chi^3(p,q)}{6}\Big).$$
Введём следующую параметризацию:
$$q=q_0(1+\xi),\quad p=p_0(1+\eta),\quad R=R_0(1+r),\quad \chi_0=\varphi_0(p,q)-\varphi_0(p_0,q_0).$$
Разложим функциональные зависимости параметров траектории от начальных данных в ряд Тейлора до первого порядка:
$$r=\frac{p_0^2}{mA}\eta+\frac{R_0}{q_0}\xi,\quad \sin\varphi_0(p_0,q_0)\chi_0=\frac{p_0^4\eta}{(p_0^2+mA)^2},$$

$$t_0(p,q)-t_0(p_0,q_0)=\sqrt{\frac{m}{A}}R_0\big((\varphi_0(p_0,q_0)-\sin\varphi_0(p_0,q_0))r+ \\ +\big(1-\cos\varphi_0(p_0,q_0))\chi_0\big),$$

$$\sqrt{\frac{m}{A}}R_0\Big(2\pi nr-\frac{\chi^3}{6}\Big)=t_0(p_0,q_0)r-\sqrt{\frac{m}{A}}q_0\chi_0,$$
$$\chi=\Big(6\Big(r\big(2\pi n-\varphi_0(p_0,q_0)+\sin\varphi_0(p_0,q_0)\big)-\frac{q_0}{R_0}\chi_0\Big)\Big)^{1/3}.$$
Значения среднего импульса и средней энергии оцениваются следующими сходящимися интегралами[1] :
$$\langle p\rangle=\int_{O_\varepsilon}\frac{2\sqrt{mA}}{\chi(p,q)}\rho(p,q)dpdq=\int_{\tilde O_{\tilde\varepsilon}}\frac{2\sqrt{mA}p_0q_0}{(C\xi+D\eta)^{1/3}}\tilde\rho(\eta,\xi)d\eta d\xi<\infty,$$
$$\Big\langle\frac{p^2}{2m}\Big\rangle=\int_{O_\varepsilon}\frac{2A}{\chi^2(p,q)}\rho(p,q)dpdq=\int_{\tilde O_{\tilde\varepsilon}}\frac{2Ap_0q_0}{(C\xi+D\eta)^{2/3}}\tilde\rho(\eta,\xi)d\eta d\xi<\infty,$$
где константы определяются начальными значениями «средней» траектории:
$$C=6\big(2\pi n-\varphi_0(p_0,q_0)+\sin\varphi_0(p_0,q_0)\big)\frac{R_0}{q_0},$$

[1] Области интегрирования $O_\varepsilon$ и $\tilde O_{\tilde\varepsilon}$ отличаются тем, что последняя в силу замены переменных является малой окрестностью (0,0) диаметра $\varepsilon/\sqrt{q_0^2+p_0^2}$. Диаметр также остаётся малым в силу того, что $(p_0,q_0)\in K\subset D$, а компакт $K$ отделён от начала координат.

$$D = 6\big(2\pi n - \varphi_0(p_0,q_0) + \sin\varphi_0(p_0,q_0)\big)\frac{p_0^2}{mA} - \frac{q_0}{R_0}\frac{p_0^4}{(p_0^2+mA)^2\sin\varphi_0(p_0,q_0)}.$$

Выражения для констант значительно упростятся, если положить $p_0 = 0$. Тогда $\chi_0 = 2p/\sqrt{mA}$ и, пренебрегая в окончательном выражении для $\chi$ квадратичным по импульсам членом разложения $r$, получим ($n = 1$)

$$\Big\langle \frac{p^2}{2m} \Big\rangle = \int_{\tilde{O}_{\tilde{\varepsilon}}} \frac{2AR_0}{(6\pi\xi - \frac{12}{\sqrt{mA}}p)^{2/3}}\tilde{\rho}(p,\xi)dpd\xi \sim \\ \sim \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\tilde{O}_{\tilde{\varepsilon}}} \frac{2AR_0}{(6\pi\xi - \frac{12}{\sqrt{mA}}p)^{2/3}}dpd\xi \sim \varepsilon^{-2/3}.$$

Здесь для простоты было сделано предположение, что плотность вероятности постоянна на своем носителе и из условия нормировки имеет порядок $\tilde{\rho} \sim \varepsilon^{-2}$.

Поскольку выбор начальных значения $(p_0, q_0) \in D$ и конкретной формы окрестности $O_\varepsilon(p_0, q_0)$ был произволен, то средние импульс и кинетическая энергия конечны не только для заранее зафиксированного момента времени, когда выбранная траектория уходит на бесконечность, но и для любого другого момента времени. Это означает, что функции $\langle P\rangle(t)$ и $\langle P^2\rangle(t)$ определены на всей действительной оси, при этом носитель $\rho(p,q)$ может быть не только малой окрестностью, но и любым компактом из $D$ — конечность интеграла по компакту обеспечивается конечностью интегралов из каждой окрестности конечного покрытия.

Для того чтобы доказать непрерывность $\langle P\rangle(t)$ и $\langle P^2\rangle(t)$, разобьём область интегрирования на две части:

$$\int_K P(t,p,q)\rho(p,q)dpdq = \int_{K\setminus\bigcup_p O_\varepsilon(p,q_k(t,p)} P^b(t,p,q)\rho(p,q)dpdq + \\ + \int_{\bigcup_p O_\varepsilon(p,q_k(t,p))} P^b(t,p,q)\rho(p,q)dpdq.$$

Первый из интегралов является гладкой функцией, поскольку подынтегральное выражение бесконечно дифференцируемо на области интегрирования — исходном компакте с удалённой малой окрестностью кривых (компакт всегда пересекает только конечное число таких кривых), на которой сосредоточены особые точки. Второй интеграл можно оценить следующим образом:

$$\int_{\bigcup_p O_\varepsilon(p,q_k(t,p))} P^b(t,p,q)\rho(p,q)dpdq \leqslant \\ \leqslant \sup_K \rho(p,q)\int_{\bigcup_p O_\varepsilon(p,q_k(t,p))} P^b(t,p,q)dpdq \leqslant \mathrm{const}\cdot l[q_k(t,p)]\varepsilon^{(3-b)/3},$$

где $l[q_k(t,p)]$ — длины особых кривых, пересекающих компакт $K$. Теперь легко оценить разность значений функции в точках $t$ и $t' \to t$:

$$|\langle P^b\rangle(t) - \langle P^b\rangle(t')| \leqslant \mathrm{const}\cdot l[q_k(t,p)]\varepsilon^{(3-b)/3}.$$

Таким образом, мы показали, что функции $\langle P^b\rangle(t)$ непрерывны на всей действительной оси для $0 \leqslant b < 3$, в том числе и при $b = 1$ и $b = 2$.

Заметим, что вопрос о дифференцируемости средних импульса и кинетической энергии остается открытым, поскольку $\langle P\rangle \sim \langle 1/Q^2\rangle \sim \int \frac{dpdq}{\chi^4(p,q)} = \infty$ — производная канонического импульса, а также дисперсия кинетической энергии и моменты старшего порядка остаются сингулярными. Иными словами, возвращаясь к космологической интерпретации уравнений динамики, малые неточности в наблюдении текущего состояния вселенной, т. е. при определении её современного радиуса, приводят к конечной плотности энергии в нулевой момент времени, но при этом погрешность измерения бесконечно велика.

Таким образом, малые неточности в измерении начальных данных, учитываемые функциональной механикой, существенно меняют характер движения, устраняя сингулярности в части наблюдаемых, т. е. функциональная механика оказывается способом эффективной регуляризации.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (проект НШ № 2928.2012.1_м).

Автор выражает искреннею признательность И. В. Воловичу за постановку задачи, а также благодарит А. С. Трушечкина и других участников спецсеминара НОЦ МИАН по проблемам необратимости за ценные обсуждения.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *И. В. Волович*, “Проблема необратимости и функциональная формулировка классической механики” // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2008. №8/1(67). С. 35–55, arXiv: 0907.2445 [cond-mat.stat-mech]. [*I. V. Volovich*, “Time Irreversibility Problem and Functional Formulation of Classical Mechanics” // *Vestnik SamGU. Estestvennonauchn. Ser.*, 2008. no. 8/1(67). Pp. 35–55].
2. *И. В. Волович*, “Уравнения Боголюбова и функциональная механика” // *ТМФ*, 2010. Т. 164, №3. С. 354–362; англ. пер.: *I. V. Volovich*, “Bogoliubov equations and functional mechanics” // *Theoret. and Math. Phys.*, 2010. Vol. 164, no. 3. Pp. 1128–1135.
3. *Н. Н. Боголюбов*, Проблемы динамической теории в статистической физике. М.-Л.: Гостехиздат, 1946. 119 с. [*N. N. Bogolyubov*, Problems of Dynamical Theory in Statistical Physics. Moscow, Leningrad: Gostekhizdat, 1946. 119 pp.]
4. *А. С. Трушечкин*, “Необратимость и роль измерительного прибора в функциональной формулировке классической механики” // *ТМФ*, 2010. Т. 164, №3. С. 435–440; англ. пер.: *A. S. Trushechkin*, “Irreversibility and the role of an instrument in the functional formulation of classical mechanics” // *Theoret. and Math. Phys.*, 2010. Vol. 164, no. 3. Pp. 1198–1201.
5. *I. V. Volovich, A. S. Trushechkin*, “Functional Classical Mechanics and Rational Numbers” // *p-Adic Numb. Ultr. Anal. Appl*, 2009. Vol. 1, no. 4. Pp. 361–367, arXiv: 0910.1502 [math-ph].
6. *E. V. Piscovskiy, I. V. Volovich,*, “On the Correspondence Between Newtonian and Functional Mechanics” / In: *Quantum Bio-Informatic IV* / Quantum Probability and White Noise Analisis, 28; eds. L. Accardy, W. Freudenberg, M. Ohya. Singapure: World Sci, 2011. Pp. 363–372.
7. *А. И. Михайлов*, “Функциональная механика: эволюция моментов функции распределения и теорема о возвращении” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. №1(22). С. 124–133; англ. пер.: *A. I. Mikhaylov*, “Functional mechanics: Evolution of the moments of distribution function and the Poincaré recurrence theorem” // *p-Adic Numb. Ultr. Anal. Appl*, 2011. Vol. 3, no. 3. Pp. 205–211.
8. *О. В. Грошев*, “Оператор Лиувилля и функциональная механика” / В сб.: *Третья международная конференция «Математическая физика и её приложения»*: Материалы

конф. (Самара, 27 августа – 1 сентября, 2012 г.); ред. чл.-корр. РАН И. В. Волович, д.ф.-м.н., проф. В. П. Радченко. Самара: СамГТУ, 2012. С. 105. [*O. V. Groshev*, "Liouville operator and functional mechanics" / In: *The Third International Conference "Mathematical Physics and Its Applications"*: Book of Abstracts (August 27 – September 01, 2012 Samara, Russia); eds. I. V. Volovich, V. P. Radchenko. Samara: Samara State Technical Univ., 2012. Pp. 105].

9. *И. В. Волович*, "Функциональная механика и черные дыры" / В сб.: *Третья международная конференция «Математическая физика и её приложения»*: Материалы конф. (Самара, 27 августа – 1 сентября, 2012 г.); ред. чл.-корр. РАН И. В. Волович, д.ф.-м.н., проф. В. П. Радченко. Самара: СамГТУ, 2012. С. 92. [*I. V. Volovich*, "Functional mechanics and black holes" / In: *The Third International Conference "Mathematical Physics and Its Applications"*: Book of Abstracts (August 27 – September 01, 2012 Samara, Russia); eds. I. V. Volovich, V. P. Radchenko. Samara: Samara State Technical Univ., 2012. Pp. 92].
10. *C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler*, Gravitation. San Francisco: W. H. Freeman, 1973. 1215 pp.; русск. пер.: *Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер*, Гравитация: в 3-х т. М.: Мир, 1977 (Т. 1, 480 с.; Т. 2, 527 с.; Т. 3, 512 с.).
11. *В. В. Козлов*, Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре. М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 320 с. [*V. V. Kozlov*, Thermal equilibrium in the sense of Gibbs and Poincaré, Institut Komp'yuternykh Issledovanij. Moscow, Izhevsk, 2002. 320 pp.]

Поступила в редакцию 17/I/2013;
в окончательном варианте — 26/II/2013.

**MSC: 82C05**

## INFINITE MOTION IN THE CLASSICAL FUNCTIONAL MECHANICS

***A. I. Mikhailov***[1,2]

[1] Russian Federal Research Institute of Fisheries and Oceanography,
17, Verkhnyaya Krasnosel'skaya st., Moscow, 107140, Russia.
[2] Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences,
8, Gubkina st., Moscow, 119991, Russia

E-mail: `mikhailov1984@gmail.com`

*In the paper the description of infinite movement in the functional formulation of classical mechanics is investigated. On the example of simple exactly solvable problems (passing through the barrier and falling in the center) the two classes of problems of scattering and singularity are considered. The functional mechanics corrections, arising from scattering, to the mean values and variance of canonical variables are calculated. In particular in the simplest case of transmission through the barrier the shift of the mean value coordinate by a constant arises , this constant depends on the parameters of the barrier, and logarithmic correction to the variance of the free motion coordinate. Also it is shown, that functional mechanics approach leads to the elimination of singularities in the kinetic energy of the falling in the center, which is equivalent to the solution of the Friedman equation in cosmology.*

**Key words:** *classical mechanics,irreversibility problem, Liouville equation, problem of scattering, problem of singularity, Friedman universe.*

Original article submitted 17/I/2013;
revision submitted 26/II/2013.

*Andrey I. Mikhailov*, Junior Researcher, Lab. of Bioresource Systems Analysis[1]; Junior Researcher, Research and Education Center[2].