УДК 519.876:620.22–419.8

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ СТРУКТУР КРИВОЛИНЕЙНОГО АРМИРОВАНИЯ В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

***Ю. В. Немировский*[1], *Н. А. Фёдорова*[2]**

[1] Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
Россия, 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1.
[2] Институт космических и информационных технологий
Сибирского федерального университета,
Россия, 660074, Красноярск, ул. Киренского 26.

E-mails: nemirov@itam.nsc.ru, feodorova.natalia@mail.ru

На основе структурной модели решена задача рационального армирования криволинейными волокнами осесимметричной кольцевой пластины в полярной системе координат. Изучено влияние структурных параметров на предельное нагружение конструкции.

Ключевые слова: *структурная модель, криволинейное армирование.*

1. Постановка задачи. Напряжённо-деформированное состояние армированной пластины в полярной системе координат (ρ, θ) относительно компонент тензоров деформаций ε_ρ, ε_θ, $\varepsilon_{\rho\theta}$ и напряжений σ_ρ, σ_θ, $\sigma_{\rho\theta}$ в осесимметрическом случае (искомые функции не зависят от полярного угла θ) описывается приводимыми ниже соотношениями.

Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho}\sigma_{\rho\theta} = 0. \tag{1}$$

Пусть армирование выполнено m семействами волокон ($m = 1, 2, 3$), φ_m — углы армирования, ε_m — деформация в волокне, σ_m — напряжение в волокне, ω_m — интенсивность армирования m-тым семейством волокон. Деформации в волокне в полярной системе определим по структурной модели [1]

$$\varepsilon_\rho \cos^2 \varphi_m + \varepsilon_\theta \sin^2 \varphi_m + \varepsilon_{\rho\theta} \cos \varphi_m \sin \varphi_m = \varepsilon_m.$$

Соотношения Коши, связывающие компоненты тензора деформаций и компоненты вектора смещений u_ρ, u_θ, в условиях осесимметричной деформации имеют вид

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_\rho}{\rho}, \quad \varepsilon_{\rho\theta} = \Big(\frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} - \frac{u_\theta}{\rho}\Big). \tag{2}$$

Пусть m^* — некоторое фиксированное число семейств армирующих волокон. Закон Гука для неоднородного армированного материала с числом се-

Юрий Владимирович Немировский (д.ф.-м.н., проф.), главный научный сотрудник, лаб. физики быстропротекающих процессов.
Наталья Александровна Федорова (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. прикладной математики и компьютерной безопасности.

мейств армирующих волокон m^* запишем в виде

$$\sigma_\rho = \Omega \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\rho + \nu\varepsilon_\theta) + \sum_{m=1}^{m^*} \sigma_m \omega_m \cos^2\varphi_m,$$
$$\sigma_\theta = \Omega \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_\rho) + \sum_{m=1}^{m^*} \sigma_m \omega_m \sin^2\varphi_m, \tag{3}$$
$$\sigma_{\rho\theta} = \Omega \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{\rho\theta} + \sum_{m=1}^{m^*} \sigma_m \omega_m \cos\varphi_m \sin\varphi_m, \quad \Omega = 1 - \sum_{m=1}^{m^*} \omega_m,$$

где E, ν — соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона связующего материала.

При наложении дополнительных условий постоянства сечений волокон [2] интенсивность армирования ω_m m-тым семейством волокон удовлетворяет следующим условиям в полярной системе координат [3]:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\omega_m\cos\varphi_m) + \frac{\partial}{\partial\theta}(\omega_m\sin\varphi_m) = 0. \tag{4}$$

В рассматриваемой задаче интенсивность ω_m найдём из (4) после задания уравнений конкретных траекторий армирования $\rho = \rho(\theta)$, введения углов армирования φ_m и начальных условий выхода арматуры.

2. Разрешающая система уравнений. Сформулируем задачу об осесимметричной деформации армированной пластины в перемещениях u_ρ, u_θ. Для этого соотношения (3) подставим в уравнения равновесия (1), предварительно напряжения σ_m в волокнах найдём по формулам

$$\sigma_m = E_m(\varepsilon_\rho\cos^2\varphi_m + \varepsilon_\theta\sin^2\varphi_m + \varepsilon_{\rho\theta}\cos\varphi_m\sin\varphi_m),$$

где E_m — модуль Юнга материала m-того семейства волокон.

Напряжения σ_ρ, σ_θ, $\sigma_{\rho\theta}$ с учётом структурных характеристик примут вид

$$\sigma_\rho = m_1(\varepsilon_\rho + \nu\varepsilon_\theta) + \sum_{m=1}^{m^*} E_m\omega_m(\varepsilon_\rho\cos^2\varphi_m + \varepsilon_\theta\sin^2\varphi_m + \\ + \varepsilon_{\rho\theta}\sin\varphi_m\cos\varphi_m)\cos^2\varphi_m,$$
$$\sigma_\theta = m_1(\varepsilon_\rho + \nu\varepsilon_\theta) + \sum_{m=1}^{m^*} E_m\omega_m(\varepsilon_\rho\cos^2\varphi_m + \varepsilon_\theta\sin^2\varphi_m + \\ + \varepsilon_{\rho\theta}\sin\varphi_m\cos\varphi_m)\sin^2\varphi_m,$$
$$\sigma_{\rho\theta} = m_2\varepsilon_{\rho\theta} + \sum_{m=1}^{m^*} E_m\omega_m(\varepsilon_\rho\cos^2\varphi_m + \varepsilon_\theta\sin^2\varphi_m + \\ + \varepsilon_{\rho\theta}\sin\varphi_m\cos\varphi_m)\sin\varphi_m\cos\varphi_m.$$

Соотношения для напряжений σ_ρ, σ_θ, $\sigma_{\rho\theta}$ запишем в виде

$$\begin{gathered}\sigma_\rho = a_{11}\varepsilon_\rho + a_{12}\varepsilon_\theta + a_{13}\varepsilon_{\rho\theta}, \quad \sigma_\theta = a_{12}\varepsilon_\rho + a_{22}\varepsilon_\theta + a_{23}\varepsilon_{\rho\theta}, \\ \sigma_{\rho\theta} = a_{13}\varepsilon_\rho + a_{23}\varepsilon_\theta + a_{33}\varepsilon_{\rho\theta} \quad \Big(m_1 = \Omega\frac{E}{1-\nu^2},\ m_2 = \Omega\frac{E}{1+\nu}\Big),\end{gathered} \tag{5}$$

где введены коэффициенты

$$a_{11} = m_1 + \sum_{m=1}^{m^*} E_m\omega_m \cos^4\varphi_m, \quad a_{12} = \nu m_1 + \sum_{m=1}^{m^*} E_m\omega_m \cos^2\varphi_m \sin^2\varphi_m,$$

$$a_{13} = \sum_{m=1}^{m^*} E_m\omega_m \cos^3\varphi_m \sin\varphi_m, \qquad a_{22} = m_1 + \sum_{m=1}^{m^*} E_m\omega_m \sin^4\varphi_m,$$

$$a_{23} = \sum_{m=1}^{m^*} E_m\omega_m \cos\varphi_m \sin^3\varphi_m, \quad a_{33} = m_2 + \sum_{m=1}^{m^*} E_m\omega_m \cos^2\varphi_m \sin^2\varphi_m.$$

После подстановки (5) в уравнения равновесия (1) с учётом (2) получим относительно компонент перемещений следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} a_{11}\frac{d^2u_\rho}{d\rho^2} + a_{13}\frac{d^2u_\theta}{d\rho^2} + \Big(\frac{da_{11}}{d\rho} + \frac{a_{11}}{\rho}\Big)\frac{du_\rho}{d\rho} + \Big(-\frac{a_{23}}{\rho} + \frac{da_{13}}{d\rho}\Big)\frac{du_\theta}{d\rho} + \\ + \Big(\frac{1}{\rho}\frac{da_{12}}{d\rho} - \frac{a_{22}}{\rho^2}\Big)u_\rho + \Big(-\frac{1}{\rho}\frac{da_{13}}{d\rho} + \frac{a_{23}}{\rho^2}\Big)u_\theta = 0, \\ a_{13}\frac{d^2u_\rho}{d\rho^2} + \frac{a_{33}}{2}\frac{d^2u_\theta}{d\rho^2} + \Big(\frac{da_{13}}{d\rho} + \frac{a_{23}}{\rho} + \frac{2a_{13}}{\rho}\Big)\frac{du_\rho}{d\rho} + \\ + \Big(-\frac{a_{33}}{\rho} + \frac{da_{33}}{d\rho} + \frac{2a_{33}}{\rho}\Big)\frac{du_\theta}{d\rho} + \Big(\frac{1}{\rho}\frac{da_{23}}{d\rho} + \frac{a_{23}}{\rho^2}\Big)u_\rho + \\ + \Big(-\frac{1}{\rho}\frac{da_{33}}{d\rho} - \frac{a_{33}}{\rho^2}\Big)u_\theta = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

К системе (6) присоединим четыре граничных условия на внешнем и внутреннем контурах кольцевой пластины. Пусть на внутреннем контуре при $\rho = \rho_1$ заданы перемещения:

$$u_\rho = C_1^*, \quad u_\theta = C_2^* \tag{7}$$

(при $C_1^* = 0$, $C_2^* = 0$ имеем жёстко закрепленный вал, при $C_1^* = 0$, $C_2^* \neq 0$ — возможно скручивание вала).

На внешнем контуре $\rho = \rho_2$ заданы радиальное и касательное усилия p_n, p_τ. С учётом соотношений (5) и (2) условия на внешнем контуре примут вид

$$\begin{gathered} a_{11}\frac{du_\rho}{d\rho} + a_{12}\frac{u_\rho}{\rho} + a_{13}\Big(\frac{du_\theta}{d\rho} - \frac{u_\theta}{\rho}\Big)\Big|_{\rho=\rho_2} = p_n, \\ a_{13}\frac{du_\rho}{d\rho} + a_{23}\frac{u_\rho}{\rho} + a_{33}\Big(\frac{du_\theta}{d\rho} - \frac{u_\theta}{\rho}\Big)\Big|_{\rho=\rho_2} = p_\tau. \end{gathered} \tag{8}$$

Возможны следующие комбинации в граничных условиях: на внутреннем контуре задано одно из усилий и одно из перемещений, на внешнем —

оставшееся усилие и перемещение. Система (6) и граничные условия (7), (8) представляют собой обобщённую двухточечную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В граничные условия (7), (8) для общего случая армирования входят как обе неизвестные функции u_ρ, u_θ, так и их производные. Коэффициенты системы содержат полный набор структурных характеристик материала: число m^* семейств армирующих волокон, механические характеристики материалов связующего и волокна, интенсивность ω_m и тригонометрические функции углов армирования φ_m.

3. Армирование по спиралям. Выполним в рамках поставленной задачи армирование кольцевой пластины по криволинейным траекториям, которые являются семействами логарифмических и алгебраических спиралей [4]. Для построения разрешающей системы необходимо определить коэффициенты a_{ij} системы (6). В каждом конкретном случае заданных семейств спиралей вычислим интенсивность ω_m и углы армирования φ_m.

`1. Армирование по семействам логарифмических спиралей.` Пусть дано семейство логарифмических спиралей вида $\rho = Cb^\theta$, C — параметр семейства, b — параметр спирали, при $b > 1$ спираль развертывается вокруг полюса против хода часовой стрелки (рис. 1), если $b < 1$, то спираль закручивается по часовой стрелке (рис. 2). Вычислим угол армирования

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{1}{\ln b},$$

то есть для логарифмической спирали угол армирования — некоторая константа. Определим интенсивность армирования $\omega_1(\rho)$ из уравнения (4) при заданных углах армирования, в нем производную по θ вычисляем по формуле

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial\rho}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\rho}$$

с учётом уравнения траектории $\rho = Cb^\theta$. В результате имеем

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\omega_1) + \rho\frac{\partial}{\partial\rho}(\omega_1) = 0. \tag{9}$$

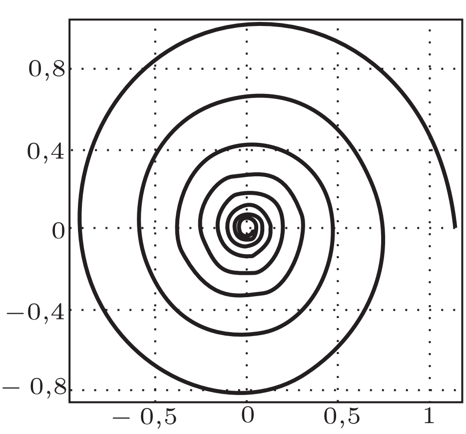

Рис. 1

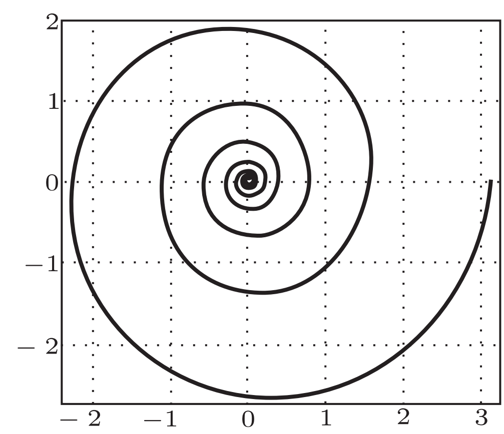

Рис. 2

В (9) частную производную заменяем обычной производной по ρ, так как исключили зависимость от окружной координаты. Интегрируя (9) с учётом заданной интенсивности армирования ω_0 на внутреннем контуре $\rho = \rho_1$, получим следующее выражение для интенсивности армирования по логарифмической спирали

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\rho_1/\rho}.$$

2. Армирование по семействам спиралей Архимеда. Зададим спираль Архимеда $\rho = a\theta$, a — коэффициент пропорциональности [4]. Иллюстрация кривой приведена на рис. 3. Угол армирования находим из соотношения $\operatorname{tg}\varphi = \theta = \rho/a$, вычисляем $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ через $\operatorname{tg}\varphi$, после подстановки в (4) получаем следующее уравнение для интенсивности армирования $\omega_1(\rho)$:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\omega_1 \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}\varphi^2}}\Big) = 0,$$

оператор дифференцирования по окружной координате вдоль траектории армирования равен

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = a\frac{\partial}{\partial\rho}.$$

Тогда интенсивность армирования в произвольной точке кольцевой пластины найдем по формуле

$$\omega_1 = C\sqrt{1+\operatorname{tg}\varphi}/\rho.$$

Пусть на внутреннем контуре $\rho = \rho_1$ задан угол вхождения арматуры φ_0 и задана интенсивность армирования ω_0, что соответствует условиям технологического процесса. После вычисления константы интегрирования из условий на внутреннем контуре пластины интенсивность армирования имеет вид

$$\omega_1 = \frac{\omega_0\sqrt{\rho_1^2 + \rho^2\operatorname{tg}^2\varphi_0}}{\rho\sqrt{1+\operatorname{tg}\varphi^2}}.$$

Для тангенса угла армирования получим выражение $\operatorname{tg}\varphi = (\rho/\rho_1)\operatorname{tg}\varphi_0$.

3. Спираль Ферма. Спираль Ферма задается уравнением $\rho^2 = a^2\theta$, a — коэффициент пропорциональности. Для тангенса угла армирования получим выражение $\operatorname{tg}\varphi = 2\rho^2/a^2$. С учётом условий на внутреннем контуре определяем параметр a^2: $a^2 = 2\rho_1/\operatorname{tg}\varphi_0$, ограничение на условия на внутреннем контуре $\operatorname{tg}\varphi_0 > 0$.

Оператор дифференцирования по окружной координате вдоль траектории армирования определим по формуле

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{a^2}{2\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}.$$

Тогда уравнение для интенсивности армирования $\omega(\rho)$ в произвольной точке кольцевой пластины примет вид

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\rho\omega}{\sqrt{a^4+4\rho^4}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\rho^2\omega}{\sqrt{a^4+4\rho^4}} = 0. \qquad (10)$$

Найдём решение уравнения (10):

$$\omega = C_1 \frac{\sqrt{a^2 + 2a\rho + 2\rho^2}\sqrt{a^2 - 2a\rho + 2\rho^2}}{\sqrt{\rho^3}}.$$

Сформулированные выше условия на внутреннем контуре дают соотношения для определения константы интегрирования, и окончательно для интенсивности армирования по спирали Ферма имеем

$$\omega = \frac{\omega_0\sqrt{\rho_1^3}}{\sqrt{a^2 + 2a\rho_1 + 2\rho_1^2}\sqrt{a^2 - 2a\rho_1 + 2\rho_1^2}} \frac{\sqrt{a^2 + 2a\rho + 2\rho^2}\sqrt{a^2 - 2a\rho + 2\rho^2}}{\sqrt{\rho^3}},$$

где $a^2 = 2\rho_1/\operatorname{tg}\varphi_0$.

Вид траектории армирования по спирали Ферма приведен на рис. 4.

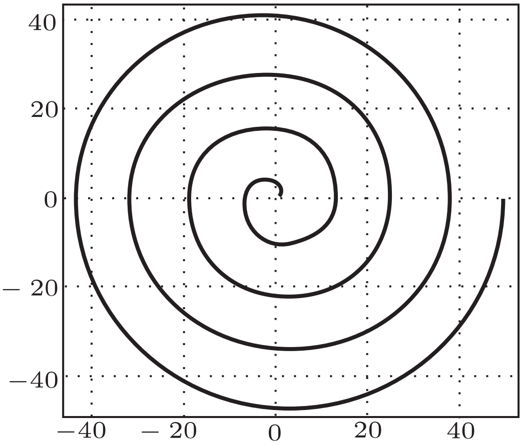

Рис. 3

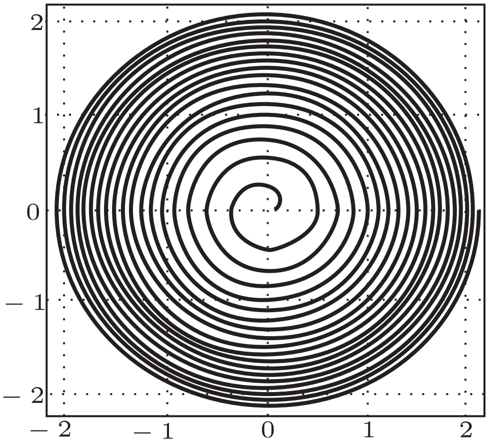

Рис. 4

4. «Велоколесо». Спицы велоколеса в полярной системе координат представляют семейство прямых, заданных уравнением $\rho = a/\sin\theta$, где a — константа, параметр велоколеса, $-\pi < \theta < 0$, $\theta \neq \pi/2$. Вычислим ρ'_θ, найдём θ через ρ из уравнения траектории: $\theta = \arcsin a/\rho$, получим выражение тангенса угла армирования $\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{tg}\theta$ через полярный радиус

$$\operatorname{tg}\varphi = \mp\frac{a}{\sqrt{\rho^2 - a^2}}.$$

Оператор дифференцирования по окружной координате вдоль траектории армирования равен

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = -\frac{a\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\rho}.$$

В результате условие постоянства сечений волокон примет вид

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\omega_1\sqrt{\rho^2 - a^2}\right) + \rho\sqrt{\rho^2 - a^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\omega_1}{\rho}\right) = 0.$$

Пусть ρ_1 — внутренний радиус кольцевой пластины, θ_0 — заданный угол выхода, тогда $a = \rho_1 \sin\theta_0$. С учетом условий на внутреннем контуре $\omega_1\big|_{\rho=\rho_1} = \omega_0$ получим интенсивность армирования

$$\omega_1 = \frac{\omega_0\sqrt{\rho}(\rho_1^2 - (\rho_1 \sin\theta_0)^2)^{1/4}}{\sqrt{\rho_1}(\rho^2 - (\rho_1 \sin\theta_0)^2)^{1/4}}.$$

Армирование вдоль спиц велоколеса для кольцевой пластины находит применение в современной промышленности. В настоящей работе рассматривается армирование по траекториям, представляющим комбинации спиц велоколеса и семейств рассмотренных выше спиралей.

`5. Изогональное армирование.` Наряду с криволинейными структурами армирования по спиралям, рассматриваемыми в кольцевых пластинах, строим изогональные траектории армирования (т.е. линии, пересекающие кривые данного однопараметрического семейства под одним и тем же заданным углом $\alpha = \mathrm{arctg} k$) [5]. Процедура нахождения изогональных траекторий к данным координатным линиям криволинейной ортогональной системы координат описана в монографии [6].

Для семейства логарифмических спиралей семейство изогональных к ним траекторий описывается уравнением вида

$$\rho = C_1 \exp\Big(\frac{1-k}{1+k}\theta\Big),$$

где C_1 — произвольная константа, $k = \mathrm{tg}\,\alpha$. Иллюстрации армирования концентрического кольца по логарифмическим спиралям и изогональным им траекториям для значений $k = 3$, $k = 0{,}7$ приведены на рис. 5, 6, где параметр семейств траекторий принимает три значения, изогональные траектории изображены пунктирными линиями.

Для семейств спиралей Архимеда уравнение изогональных траекторий имеет вид

$$\rho = C_2 e^{-k\theta}(1+k\theta)^{2/k},$$

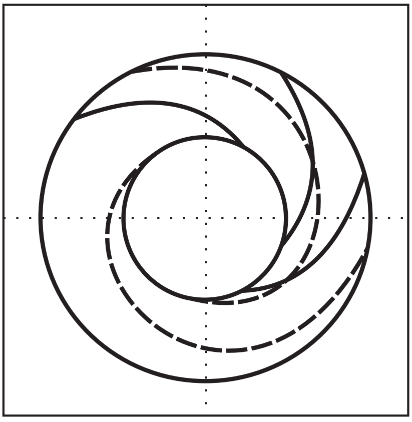

Рис. 5

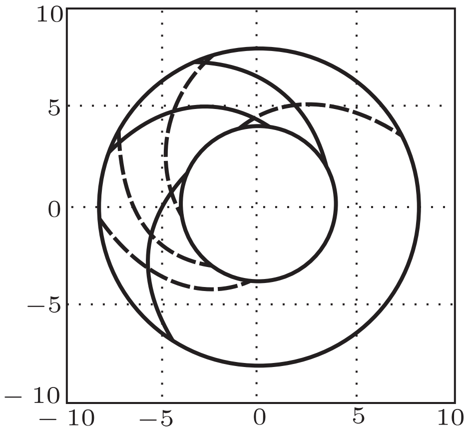

Рис. 6

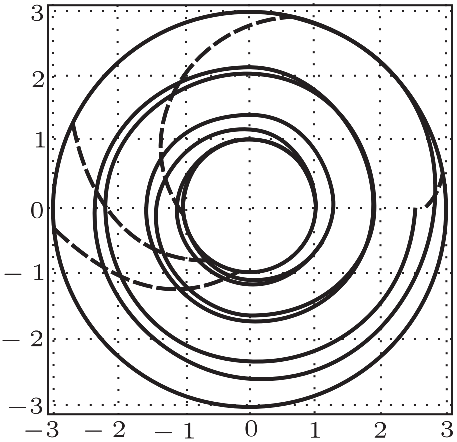

Рис. 7

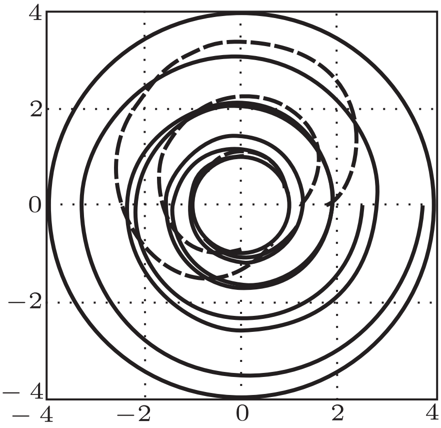

Рис. 8

где C_2 — произвольная константа. Армирование по спиралям Архимеда и изогональным им траекториям в кольцевой пластине для значений $k = 0{,}7$, $k = 1{,}4$ приведены на рис. 7, 8.

Коэффициенты системы (6) учитывают способы армирования семействами волокон в направлении любых изогональных траекторий, что дает широкое разнообразие структур армирования и позволяет в рамках единой схемы решения (6) получать композиционную конструкцию с заранее заданными свойствами.

4. Условия прочности армированного материала. Проверка условий разрушения упруго армированного материала имеет свои особенности [7]. Сформулируем кратко условия прочности армированного материала. Пусть материал изотропного связующего имеет различные пределы прочности при растяжении σ_c^+ и сжатии σ_c^-. Тогда в случае плоского напряжённого состояния условие прочности Баландина для неоднородного материала через напряжения σ_ρ^c, σ_θ^c, $\sigma_{\rho\theta}^c$ в связующем для полярной системы координат имеют вид

$$(\sigma_\rho^c)^2 + (\sigma_\theta^c)^2 - \sigma_\rho^c\sigma_\theta^c + 3(\sigma_{\rho\theta}^c)^2 + (\sigma_c^- - \sigma_c^+)(\sigma_\rho^c + \sigma_\theta^c) < \sigma_c^+\sigma_c^-. \qquad (11)$$

Левую часть соотношения (11) назовём функцией Баландина.

Для семейств армирующих волокон предполагаем, что пределы прочности (текучести) m-того семейства волокон при растяжении σ_m^+ и сжатии σ_m^- различны. Армирующие семейства волокон остаются упругими, если выполняются неравенства [8]

$$-\sigma_m^- < E_m(\varepsilon_\rho l_{1m}^2 + 2\varepsilon_{\rho\theta} l_{1m} l_{2m} + \varepsilon_\theta l_{2m}^2) < \sigma_m^+. \qquad (12)$$

В (12) использованы обозначения $l_{m1} = \cos(\varphi_m)$, $l_{m2} = \sin(\varphi_m)$, где m — число семейств армирующих волокон, E_m — модуль Юнга m-того семейства волокон. Таким образом, для проверки прочности армированного материала необходимо анализировать два условия: условие на прочность материала связующего (11) и условие на прочность армирующих волокон (12).

На основании вышеизложенного следует ввести понятие предельного упругого состояния в некоторой точке рассматриваемой конструкции, по достижении которого хотя бы в одной точке либо в связующем, либо в волокне происходит выход за пределы упругости (напряжение превышает предел текучести). В данной точке может возникнуть микроразрушение.

5. Численное решение задачи. Численную схему строим относительно обезразмеренных переменных: линейный размер пластины относим к внешнему радиусу, в соотношениях для напряжений все величины относим к максимальному модулю Юнга армирующих семейств волокон. Система (6) и сформулированные граничные условия представляют собой обобщенную двухточечную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Коэффициенты в (6) содержат полный набор структурных характеристик: число семейств армирующих волокон, механические характеристики материалов связующего и волокон, интенсивность и тригонометрические функции углов армирования.

Для численного решения обезразмеренная система (6) сводилась к системе четырёх дифференциальных уравнений первого порядка, затем строилась разностная схема, аппроксимирующая систему дифференциальных уравнений и краевые условия со вторым порядком точности. Полученная при этом система линейных уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов решается методом ортогональной прогонки [9].

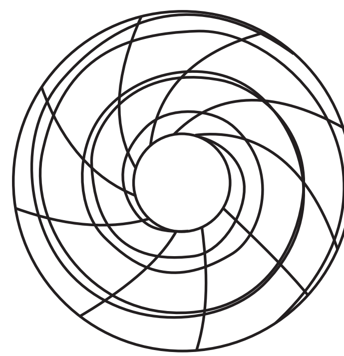

Рис. 9

Постановка задачи свелась к реализации единой схемы, которая учитывает её разнообразные механические формулировки и различные способы армирования.

В численном эксперименте рассмотрена кольцевая пластина с тремя типами структур армирования: траекториями армирования являются семейства спиралей Архимеда и логарифмических спиралей (I) (рис. 9), семейство спиралей Архимеда и «спицы велоколеса» (II), семейство логарифмических спиралей и «спицы велоколеса» (III) (рис. 10). В качестве материала связующего выбран алюминий, армирование производится стальными волокнами. Механические характеристики металлокомпозита [10] и за-

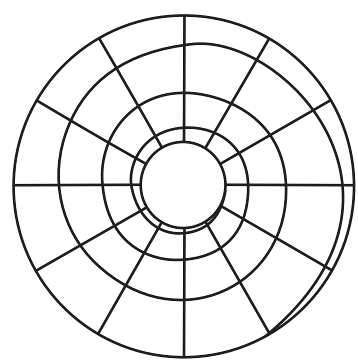

Рис. 10

Таблица 1

Механические и геометрические характеристики композита

Amp	ν	E, ГПА	E_1, ГПА	E_2, ГПА	ω_{01}	ω_{02}	$\mathrm{tg}\,\varphi_0$
−2,0	0,3	70,0	200,0	200,0	0,3	0,3	0,7
−1,5	0,3	70,0	200,0	200,0	0,05	0,04	0,7
0,5	0,3	70,0	200,0	200,0	0,32	0,1	0,7
2,0	0,3	70,0	200,0	200,0	0,51	0,18	0,7

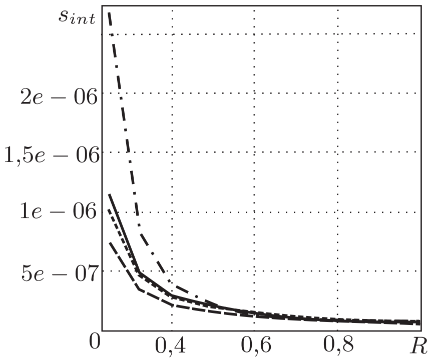

Рис. 11. Структура I

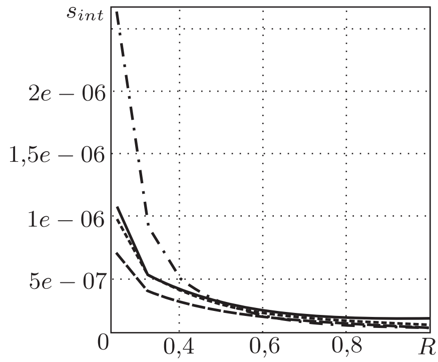

Рис. 12. Структура II

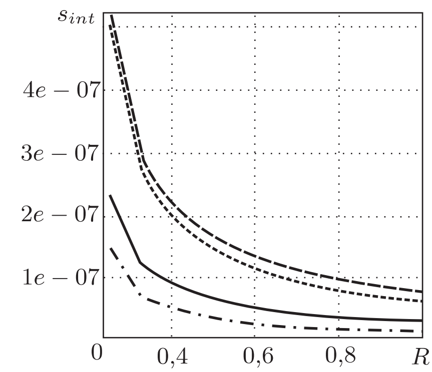

Рис. 13. Структура III

даваемые геометрические параметры конструкции представлены в табл. 1. Значения средней прочности для материала связующего σ_c^+ составляет 0,29 ГПА, для стальных волокон пределы прочности при растяжении $\sigma_1^+ = 0{,}8$ ГПА, при сжатии $\sigma_1^- = 0{,}4$ ГПА. На внутреннем контуре ставятся условия жесткой заделки. На внешнем контуре задаются нормальное и тангенциальное усилия p_n, p_τ. В граничных условиях примем $p_n/p_\tau = Amp$, число Amp назовём амплитудой внешней нагрузки, полагаем величину усилия $p_n = 1$ МПА. Изучаем, как влияет изменение амплитуды на достижение предельной нагрузки согласно критериям (11), (12) для трёх рассматриваемых структур армирования.

На рис. 11–13 для четырёх типов начальных интенсивностей армирования ω_{01}, ω_{02} при фиксированной внешней нагрузке показаны значения функции Баландина в безразмерных переменных. Как видим, структура III допускает значительное увеличение внешней нагрузки для всех начальных значений интенсивностей армирования, в отличие от двух других структур, в которых происходит приближение к предельному состоянию. Можем сделать вывод, что при фиксированном материале и уровне нагружения при заданных граничных условиях наиболее предпочтительной является структура армирования III.

Для анализа рассматриваемых структур армирования (I–III) введём характеристику, которую назовём степенью нагружения волокна P, определив её как отношение напряжений в волокне к пределу прочности соответствующего материала, выраженную в процентах. Задавшись значениями амплитуды внешней нагрузки и начальными условиями выхода арматуры, получим следующие зависимости P для названных структур армирования (табл. 2).

Численные эксперименты показали, что за счёт управления геометрическими параметрами пластины и криволинейной укладкой семейств армирующих волокон можно получить конструкцию с заранее заданными свойствами.

Таблица 2

Степень нагружения волокна P, выраженная в процентах

структура	$\omega_{01} = 0{,}3$, $\omega_{02} = 0{,}3$	$\omega_{01} = 0{,}05$, $\omega_{02} = 0{,}0376$	$\omega_{01} = 0{,}1$, $\omega_{02} = 0{,}318$
I	6	40	6
II	9	70	10
III	14	80	22

Предложенная методика позволяет прогнозировать поведение композита при различных вариантах механических свойств связующего и волокна, начальных стадий технологического процесса, выбора различных криволинейных траекторий армирования и их количества, размера внутреннего отверстия кольцевой пластины.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Yu. V. Nemirovsky*, “On the elastic-plastic behaviour of a reinforced layer” // *Int. J. Mech. Sci.*, 1970. Vol. 12, no. 10. Pp. 898–903.
2. *С. Б. Бушманов, Ю. В. Немировский*, “Проектирование пластин, армированных равнонапряженными волокнами постоянного поперечного сечения” // *Мех. композ. матер.*, 1983. № 2. С. 278–284; англ. пер.: *S. B. Bushmanov, Yu. V. Nemirovskii*, “Design of plates reinforced with equally stressed fibers of constant cross section” // *Mech. Compos. Mater.*, 1983. Vol. 19, no. 2. Pp. 207–213.
3. *Ю. В. Немировский, Н. А. Фёдорова*, “Армирование плоских конструкций по криволинейным ортогональным траекториям” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 5(21). С. 96–104. [*Yu. V. Nemirovsky, N. A. Feodorova*, “Reinforcement of Planar Structures along Orthogonal Curvilinear Trajectories” // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2010. no. 5(21). Pp. 96–104].
4. *А. А. Гусак, Г. М. Гусак*, Линии и поверхности. Минск: Выш. школа, 1985. 220 с. [*A. A. Gusak, G. M. Gusak*, Lines and surfaces. Minsk: Vysh. shkola, 1985. 220 pp.]
5. *Н. А. Федорова*, “Моделирование изогонально армированных кольцевых пластин в полярной системе координат” // *Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ.*, 2011. Т. 4, № 3. С. 400–405. [*N. A. Feodorova*, “Modeling for reinforced with isogonal trajectories ring-shaped lamels in polar coordinate system” // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2011. Vol. 4, no. 3. Pp. 400–405].
6. *Ю. В. Немировский, Н. А. Фёдорова*, Математическое моделирование плоских конструкций из армированных волокнистых материалов. Красноярск: СФУ, 2010. 136 с. [*Yu. V. Nemirovskiy, N. A. Feodorova*, Mathematical modeling of flat structures made of reinforced fiber materials. Krasnoyarsk: Sib. Fed. Univ., 2010. 136 pp.]
7. *Ю. В. Немировский, Б. С. Резников*, Прочность элементов конструкций из композитных материалов. Новосибирск: Наука, 1986. 165 с. [*Yu. V. Nemirovskii, B. S. Reznikov*, Strength of Structural Elements Made of Composite Materials. Novosibirsk: Nauka, 1986. 165 pp.]
8. *Ю. В. Немировский*, “Об упруго-пластическом поведении армированного слоя” // *ПМТФ*, 1969. Т. 10, № 6. С. 81–89. [*Yu. V. Nemirovskii*, “Elastoplastic behavior of a reinforced layer” // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1969. Vol. 10, no. 6. Pp. 914–921].
9. *J. M. Ortega, V. G. Pool*, An introduction to Numerical Methods of Solving Differential Equations. New York: Pitman Publishing Inc., 1981; русск. пер.: *Дж. Ортега, У. Пул*, Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986. 288 с.
10. *В. В. Васильев, В. Д. Протасов, В. В. Болотин и др.*, Композиционные материалы: Справочник. Москва: Машиностроение, 1990. 510 с. [*V. V. Vasiliev, V. D. Protasov,*

V. V. Bolotin, et al., Composite Materials: A Handbook. Moscow: Mashinostroenie, 1990. 510 pp.]

Поступила в редакцию 14/XI/2012;
в окончательном варианте — 04/II/2013.

MSC: 74K99, 74E30

STUDY OF CURVILINEAR REINFORCEMENT RATIONAL STRUCTURES IN POLAR COORDINATE SYSTEM

***Yu. V. Nemirovsky*[1], *N. A. Feodorova*[2]**

[1] Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
4/1, Institutskaya st., Novosibirsk, 630090, Russia.
[2] Institute of Space and Information Technologies,
Siberian Federal University,
26, Kirensky st., Krasnoyarsk, 660074, Russia.

E-mails: `nemirov@itam.nsc.ru`, `feodorova.natalia@mail.ru`

The problem of curvilinear fibers rational reinforcement for axially symmetric ring-shaped lamel in polar coordinate system is solved by reference to the structural model. The effect of structural parameters for a construction limit stressing is studied.

Key words: *structural model, curvelinear reinforcement.*

Original article submitted 14/XI/2012;
revision submitted 04/II/2013.

Yuriy V. Nemirovsky (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Chief Scientist, Lab. of Fast Processes Physics. *Nataliya A. Feodorova* (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Security.