

УДК 517.958+539.3(1)

ЭФФЕКТ ВЛИЯНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ РЕОЛОГИЧЕСКОЙ БАЛКИ НА ХАРАКТЕР ДВИЖЕНИЯ ДИСКА

Г. В. Павлов, М. А. Кальмова, Е. С. Вронская

Самарский государственный архитектурно-строительный университет, 443001, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

E-mails: senitskiy@mail.ru, kalmova@inbox.ru

Работа посвящена анализу влияния материала двухпорной реологической балки на динамику движущегося диска. Составлена гибридная система дифференциальных уравнений, описывающих движение системы «диск – реологическая балка», состоящая из интегро-дифференциального уравнения продольных колебаний балки и уравнений в форме Лагранжа первого рода, которые определяют движение диска, а также уравнений неголономных связей, вытекающих из разности лагранжеских координат центра масс диска и точки балки, касающейся диска. Рассмотрен режим равномерного движения диска, что позволило проинтегрировать уравнение колебаний балки независимо от системы уравнений, описывающих движение диска. Показано, что при движении диска с малой скоростью, а также в режиме, соответствующем предельному значению времени релаксации, в балке возникают физически неприемлемые деформации. При нулевом времени релаксации наблюдается стационарный режим вынужденных колебаний балки при умеренных значениях амплитуд.

Ключевые слова: связь неголономная, функция Дирака, ядро релаксации, преобразование Лапласа.

Как известно [1, 2], при движении тела вращения по стержню, связанному с абсолютно жестким основанием, исключая поперечные колебания, в стержне возникают продольные деформации, величина которых зависит от податливости материала стержня. В работе [1] была, в частности, поставлена задача о плоском движении диска по стержню на жестком основании с учетом продольных деформаций стержня. Представляет интерес оценка влияния продольных деформаций невесомого стержня длиной L , материал которого моделируется релаксационным телом Кельвина, на динамику диска (рис. 1).

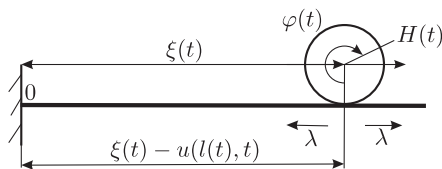


Рис. 1

Положение диска определим Лагранжевими координатами $\xi(t)$ и $\phi(t)$, $u(x, t)$ – абсолютная деформация определенной части стержня. Лагранжеву координату точки касания диска обозначим через $l(t)$, определенную геомет-

Георгий Васильевич Павлов (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. сопротивления материалов и строительной механики. Мария Александровна Кальмова, ассистент, каф. сопротивления материалов и строительной механики. Елена Сергеевна Вронская (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. сопротивления материалов и строительной механики.

рическим соотношением

$$\xi(t) = l(t) + u(l(t), t). \quad (1)$$

Из (1) и равенства $\dot{l}(t) = R\dot{\varphi}$ вытекает соотношение

$$R\dot{\varphi} = \dot{l}(t) \left[1 + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]_{x=l(t)}, \quad (2)$$

представляющее неголономную связь.

Для построения уравнения продольных колебаний реологического стержня запишем равенство, определяющее напряженно-деформированное состояние стержня в интегральной (релаксационной) форме [2].

Принимая во внимание известные равенства

$$\begin{aligned} N &= \sigma(x, t) \cdot F, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \rho F \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \\ \sigma(x, t) &= E \left[\varepsilon_x(x, t) - \int_0^t \mathcal{R}(t - \tau) \varepsilon_x(x, \tau) d\tau \right], \\ \mathcal{R}(t - \tau) &= \frac{E - \bar{E}}{nE} \exp\left(-\frac{t - \tau}{n}\right), \end{aligned}$$

где N , F и ρ — продольная сила, площадь поперечного сечения стержня и плотность материала стержня, $\sigma(x, t)$ — нормальное напряжение в поперечном сечении стержня на удалении x от левого края стержня, $\varepsilon_x(x, t)$ — относительное удлинение стержня, $\mathcal{R}(t - \tau)$ — ядро релаксации материала, n — время релаксации, \bar{E} и E — соответственно длительный и мгновенный модули упругости стержня на растяжение, построим уравнение движения реологического стержня постоянного сечения в проекции на ось x :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \int_0^t \mathcal{R}(t - \tau) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} d\tau - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{EF} \delta(x - l(t)) \cdot \lambda(t).$$

Здесь $\delta(x - l)$ — дельта-функция Дирака, $\lambda(t)$ — реологическая сила реакции в точке касания, $c^2 = E/\rho$.

Уравнения движения диска представим в форме уравнений Лагранжа первого рода:

$$m\ddot{\xi}(t) = H(t) - \lambda(t), \quad I\ddot{\varphi}(t) = \lambda(t) \cdot R, \quad (3)$$

где $H(t)$ — активная движущая сил, R — радиус диска, I — аксиальный момент инерции диска. Без уравнений связи (1) и (2) постановка задачи будет неполной. Упрощая задачу, рассмотрим режим равномерного движения диска, принимая

$$\xi = vt, \quad \ddot{\xi} = 0, \quad \lambda = H = \text{const}. \quad (4)$$

Здесь v — скорость центра масс диска. Равенство (4) имеет место при нулевых значениях главного вектора и главного момента системы сил, действующих на диск.

Принимая во внимание равенства (1), (3), (4), запишем уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \int_0^t \mathcal{R}(t - \tau) \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} d\tau - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{H}{EF} \delta(x - vt + u(x, t)) \Big|_{x=vt}. \quad (5)$$

Решение уравнения, описывающего свободные колебания реологического стержня

$$\frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x^2} - \int_0^t \mathcal{R}(t - \tau) \frac{\partial^2 u_0(x, \tau)}{\partial x^2} d\tau - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

при граничных

$$u_0(x, t) \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0$$

и начальных условиях

$$u_0(x, t) \Big|_{t=0} = f_1(x), \quad \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = f_2(x), \quad (7)$$

разыскиваем в виде ряда

$$u_0(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} X_m(x) T_m(t). \quad (8)$$

Подставляя (8) в уравнение (6) и разделяя переменные, приходим к уравнениям

$$\frac{d^2 X_m(x)}{dx^2} + \lambda_m^2 X_m(x) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{d^2 T_m(t)}{dt^2} + p_m^2 T_m(t) = p_m^2 \int_0^t \mathcal{R}(t - \tau) T_m(\tau) d\tau \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (10)$$

с краевыми

$$X_m(x) \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{dX_m}{dx} \Big|_{x=L} = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

и начальными условиями

$$T_m(t) \Big|_{t=0} = f_1(x), \quad \frac{dT_m(t)}{dt} \Big|_{t=0} = f_2(x).$$

Из (9) находим собственные числа

$$\lambda_m = \frac{(2m + 1)\pi}{2L} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Решение уравнения (10) найдём, применяя преобразование Лапласа. В работе [2] при анализе свободных колебаний балки эта задача была решена, но, к сожалению, решение проведено при предельных значениях времени релаксации ($n = 0$, $n = \infty$), что практически исключает возможность учёта

реологических свойств наследственного материала стержня, а именно в решение не вошли сомножители, придающие колебаниям затухающий характер. Обозначим оператор Лапласа $L\{T(t)\} = t(s)$. После применения Лапласовых преобразований к уравнению (10) запишем Лапласову трансформанту в виде

$$t(s) = \frac{[sT(0) + \dot{T}(0)](ns + 1)}{s^3 + \frac{1}{n}s^2 + p_m^2 s - \frac{(E-\tilde{E})p^2}{En}},$$

где $T(0) = f_1(0)$, $\dot{T}(0) = f_2(0)$.

Найдём корни знаменателя: $s_1 = \delta_1$, $s_{2,3} = -\delta_2 \pm ip_m$. В этом случае оригинал $T_m(t)$ решения уравнения (8) имеет вид

$$T_m(t) = B_m e^{-\delta_1 t} + C_m e^{-\delta_2 t} (\cos p_m t + \sin p_m t).$$

В результате решение начально-краевой задачи (6)–(7) представим в виде

$$u_0(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(b_m e^{-\delta_1 t} + c_m e^{-\delta_2 t} (\cos p_m t + \sin p_m t) \right) \sin \frac{(2m+1)\pi}{2L} x,$$

где $b_m = A_m B_m$, $c_m = A_m C_m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$). Значения коэффициентов b_m , c_m определим из начальных условий (7), используя свойство ортогональности собственных функций.

Исследуя вынужденные колебания, будем искать решение в виде ряда по собственным функциям однородной задачи:

$$u_n(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(t) \sin \frac{(2k+1)\pi}{2L} x \tag{11}$$

и подчиним его нулевым начальным и граничным условиям

$$u_n(x, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad u_n(x, t) \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0.$$

После подстановки ряда (11) в уравнение (5) и разложения правой части уравнения в ряд по синусам по аргументу x в интервале $(0, L)$ приходим к интегро-дифференциальному уравнению с нулевыми начальными условиями

$$\frac{d^2 \gamma_k(t)}{dt^2} - \omega_k^2 \int_0^t \mathcal{R}(t-\tau) \gamma_k(\tau) d\tau + \omega_k^2 \gamma_k(t) = q_k(t), \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} q_k(t) &= U \int_0^L [\delta(x-vt) + \gamma_k(t) \sin v_k t] \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2L} = \\ &= U \eta(vt - \gamma_k(t) \sin v_k t) \eta(L - vt + \gamma_k(t) \sin v_k t) \times \\ &\quad \times \sin \left(\frac{(2k+1)\pi(vt - \gamma_k(t) \sin v_k t)}{2L} \right). \end{aligned}$$

Здесь $U = (2c^2H)/(EFL)$, $v_k = [(2k+1)\pi v]/(2L)$, $\omega_k = p_k = [(2k+1)\pi c]/(2L)$, η — обобщённая функция Хевисайда. Удовлетворяя условиям функции Хевисайда и разлагая правую часть уравнения (12) в ряд Тейлора по малой ограниченной в окрестности нуля временной функции $\gamma_k(t)$, запишем уравнение (12) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2\gamma_k(t)}{dt^2} - \omega_k^2 \int_0^t \mathcal{R}(t-\tau)\gamma_k(\tau)d\tau + \omega_k^2\gamma_k(t) = \\ = U \left[\sin \frac{(2k+1)\pi v}{2L} - \pi \frac{(2k+1)}{4L} \gamma_k(t) \sin \frac{(2k+1)\pi vt}{L} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Изображающее уравнение, соответствующее дифференциальной задаче (13) с правой частью при нулевых начальных условиях

$$\begin{aligned} \gamma_k(s) \left(s^3 + \frac{s^2}{n} + \omega_k s + \frac{\omega_k^2 \tilde{E}}{n E} \right) - \frac{(2k+1)U\pi v}{4n} \times \\ \times \left(\frac{8L}{4L^2s^2 + (2k+1)^2\pi^2v^2} - \frac{\pi(2k+1)\gamma_k(s)}{L^2s^2 + (2k+1)^2\pi^2v^2} \right) (1+ns) = 0, \end{aligned}$$

имеет частное решение — Лапласову трансформанту — вида

$$\begin{aligned} \gamma_k(s) = (2(1+2k)L\pi(1+ns)Uv) \cdot (n(4L^2s^2 + (1+2k)^2\pi^2v^2)) \times \\ \times \left(s^3 + \frac{(1+2k)^2\pi^2(1+ns)Uv}{4n(L^2s^2 + (1+2k)^2\pi^2v^2)} + \frac{\tilde{E}\omega^2}{En} + \frac{s^2}{n+\omega s} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Оригиналы функции $\gamma_k(s)$ найдены для двух частных случаев.

1. Скорость центра масс диска мала и трансформанту Лапласа можно представить равенством

$$\gamma_k(s) = (1+2k)\pi(1+ns)Uv \left(2Lns^2 \left(s^3 + \frac{\tilde{E}\omega^2}{En} + \frac{s^2}{n+\omega s} \right) \right)^{-1},$$

знаменатель которого имеет два кратных нулевых корня, а оригинал имеет вид

$$\gamma_k(t) = d_1 t + d_2 + \sum_{k=3}^6 d_k e^{s_k t}.$$

Значения d_k и s_k в общем виде не выписаны ввиду их громоздкости. Проведём численный анализ при следующих данных: $n = 50$ с, $E = 1$ Н/см², $\tilde{E} = 0,7 \cdot E$ Н/см², $L = 100$ см, $\rho = 0,05$ г/см³, $v = 100$ см/с, $R = 10$ см, $c = \sqrt{E/\rho}$ см/с, $\omega_1 = (3\pi c)/(2L)$ с⁻¹, $p_1 = \pi/(2L)\sqrt{E/\rho}$ с⁻¹, $H(t) = 2H$, $F = 1$ см², $\delta_1 = 0,014$ с⁻¹, $\delta_2 = 0,003$ с⁻¹, $b_1 = 809$ см, $c_1 = -803$ см, $k = 1$, $x = 10$ см.

График изменения деформаций балки $u(x, t)$ для этого случая представлен на рис. 2.

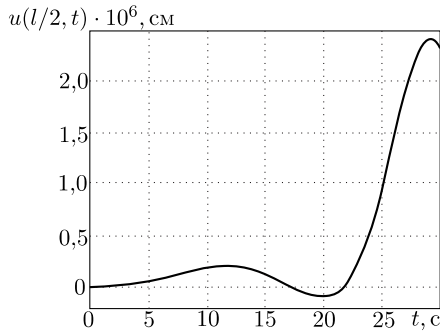


Рис. 2

Видим, что наличие физически неприемлемых амплитуд балки указывает, что режим плоского движения диска по реологической балке модели Кельвина не может быть реализован. Подобную картину можно наблюдать и при движении диска с малой скоростью, когда $n = \infty$.

2. При нулевом значении времени релаксации трансформанта (14) упрощается:

$$\gamma_k(s) = 2(1 + 2k)L\pi Uv \times \left((4L^2s^2 + (1 + 2k)^2\pi^2v^2) \left(\frac{\pi^2(1 + 2k)^2Uv}{4L^2s^2 + (1 + 2k)^2\pi^2v^2} + \frac{\tilde{E}\omega^2}{E} \right) \right)^{-1}.$$

Оригинал временной функции выражается через тригонометрические функции, не содержащие секулярных множителей.

В этом случае движение диска протекает в стационарном режиме вынужденных колебаний балки при умеренных значениях амплитуд.

Достоверность полученных результатов — наличие физически неприемлемых деформаций подтверждается совпадением их с результатами численного интегрирования интегро-дифференциальных уравнений (10), (12) как с ядром релаксации стандартного наследственного тела, так и с ядром слабосингулярной модели, предложенным А. Р. Ржаницыным [3].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. О. А. Горошко, “Неголономные системы с телами, что деформируются” // *Вестн. Киев. ун-та*, 1983. №25. С. 51–55. [O. A. Goroshko, “Nonholonomic systems with bodies that are deformed” // *Vestn. Kiyev. Un-ta*, 1983. no. 25. Pp. 51-55].
2. О. А. Горошко, К. Хедрих (Stevanović), *Analička dinamika (mekanika) diskretnih naslednih sistema* (in Serbian). Niš: University of Niš, 2001. 426 pp.
3. А. Р. Ржаницын, *Некоторые вопросы механики систем деформирующихся во времени*. М.: Гостехиздат, 1949. 248 с. [A. R. Rzhaničyn, *Some Problems in the Mechanics of Time-Deformable Systems*. Moscow: Gostekhizdat, 1949. 248 pp.]
4. R. M. Dreizler, C. S. Lüdde, *Theoretical Mechanics: Theoretical Physics 1 / Graduate Texts in Physics*. Berlin: Springer, 2011. 402 pp.

Поступила в редакцию 12/XI/2012;
в окончательном варианте — 25/I/2013.

MSC: 70F25; 70E50

EFFECT OF THE INFLUENCE OF RHEOLOGICAL BEAM LONGITUDINAL STRAINS ON THE DISC MOTION STATE

G. V. Pavlov, M. A. Kalmova, E. S. Vronskaya

Samara State University of Architecture and Civil Engineering,
194, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443001, Russia.

E-mails: senitskiy@mail.ru, kalmova@inbox.ru

The paper analyzes the effect that the material of a simple rheological beam has on the dynamics of a moving disc. The hybrid system of the differential equations describing the motion of the system disc–rheological beam consisting of the integro-differential equation of beam longitudinal vibrations and the Lagrange equations of the first kind, defining the motion of the disc, and the equations of nonholonomic constraints following from the difference between the Lagrange coordinates of the disc mass center and the beam point contacting with the disc is composed. The paper considers the mode of the disc steady motion, allowing to integrate the equation of beam vibrations regardless the system of equations describing the motion of the disc. It is identified that when the disc moves at a low speed, and in the mode corresponding to the limit value of the relaxation time it causes physically inadequate strain in the beam. When relaxation time is null there is a steady mode of forced beam vibrations at moderate amplitudes.

Key words: *nonholonomic connection, Dirac delta function, relaxation kernel, Laplace transformation.*

Original article submitted 12/XI/2012;
revision submitted 25/I/2013.

Georgiy V. Pavlov (Ph.D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Strength of Materials and Structural Mechanics. *Mariya A. Kalmova*, Assistant, Dept. of Strength of Materials and Structural Mechanics. *Elena S. Vronskaya* (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor, Dept. of Strength of Materials and Structural Mechanics.