УДК 539.3

ОБ УТОЧНЕНИИ ЛОКАЛИЗАЦИИ АЗИМУТАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ МАТЬЕ С ПОМОЩЬЮ ОВАЛОВ КАССИНИ

Ю. Н. Радаев, М. В. Таранова

[1] Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
119526, Россия, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.
[2] Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
(национальный исследовательский университет), механико-математический факультет,
410012, Россия, Саратов, ул. Астраханская, 83.

E-mails: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com; m.v.taranova@mail.ru

Рассматривается проблема построения 2π-периодических по «угловой» переменной решений дифференциального уравнения Матье для «окружных» гармоник эллиптического цилиндра, ассоциированных собственных значений и соответствующих азимутальных чисел с целью численного генерирования элементарных волновых функций эллиптического цилиндра. Приводится обобщение на случай эллиптической геометрии понятия азимутального числа (азимута) волны, распространяющейся в длинном цилиндрическом волноводе, известного в случае канонической круговой геометрии. Периодическая и полупериодическая задачи Штурма—Лиувилля для дифференциального уравнения Матье приводятся к спектральной задаче для линейного самосопряжённого оператора в комплексном гильбертовом пространстве бесконечных квадратично суммируемых двусторонних последовательностей. Этот оператор расщепляется на сумму бесконечномерного диагонального оператора и одного бесконечномерного симметричного бистохастического оператора, выполняющего роль «конечного» возмущения, накладываемого на указанный диагональный оператор. Разработаны простые алгоритмы вычисления собственных значений «углового» уравнения Матье с вещественными параметрами и возмущенных вследствие перехода от круговой к эллиптической геометрии азимутальных чисел, а также соответствующих собственных функций. Указанные алгоритмы в итоге сводятся к построению матрицы, диагонализирующей одну бесконечную симметричную пентадиагональную матрицу. С помощью кругов Гершгорина и овалов Кассини построены уточняющие друг друга двусторонние оценки для собственных значений дифференциального оператора Матье.

Ключевые слова: *уравнение Матье, собственное значение, азимутальное число, задача Штурма—Лиувилля, волновое число, волновая функция, диагонализация, круг Гершгорина, овал Кассини, бистохастическая матрица.*

1. Дифференциальное уравнение Матье было впервые получено в работе [1] при решении задачи о колебаниях эллиптической мембраны. В прикладных задачах волновой механики и физики дифференциальное уравнение Матье обычно получается при построении элементарных волновых функций эллиптического цилиндра методом разделения переменных в скалярном уравнении Гельмгольца, представленном в координатах эллиптического цилиндра. Речь идет об обыкновенном дифференциальном уравнении для «окружных» гармоник, зависящих только от «угловой» переменной.

Решения дифференциального уравнения Матье играют очень важную роль во многих задачах математической физики. Исторически теория функ-

Юрий Николаевич Радаев (д.ф.-м.н., проф.), ведущий научный сотрудник, лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела.
Маргарита Владимировна Таранова, соискатель, каф. теории упругости и биомеханики.

ций Матье была создана значительно позднее, чем аналогичные теории для подавляющего большинства специальных функций математической физики. Элементарные волновые функции эллиптического цилиндра являются произведениями так называемых «угловых» («окружных») и «радиальных» функций Матье, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям Матье. Теория «углового» уравнения Матье достаточно полно отражена в классических руководствах [2, 3].

Волновые задачи гиперболической термоупругости (см. [4, 5]), связанные с распространением термоупругих волн в длинных волноводах эллиптического поперечного сечения, не могут быть решены без исследования «углового» уравнения Матье. Квадраты азимутальных чисел волны, распространяющейся вдоль волновода с эллиптическим поперечным сечением, представляют собой упорядоченные по возрастанию собственные значения полупериодической и периодической краевых задач для дифференциального уравнения Матье, определяющего «угловые» гармоники:

$$\frac{d^2Y}{dv^2} + (b - c^2\lambda^2 \cos^2 v)Y = 0, \tag{1}$$

где v — «угловая» координата эллиптического цилиндра; c — половина расстояния между фокусами эллипса; b — спектральный параметр; $\lambda^2 = \gamma^2 - k^2$; k — волновое число распространяющейся вдоль эллиптического волновода волны; постоянная γ имеет смысл волнового числа плоской монохроматической волны, распространяющейся в неограниченной среде. Основная проблема заключается в указании более или менее точной локализации спектральных значений $b = b_j$ $(j = 0, 1, 2, \dots)$, для которых уравнение (1) имеет 2π-периодические решения.

В уравнение Матье (1), как это обычно принято, введём новые постоянные

$$a = b - \frac{c^2\lambda^2}{2}, \quad q = \frac{c^2\lambda^2}{4},$$

после чего оно приобретает «каноническую» форму

$$\frac{d^2Y}{dv^2} + (a - 2q\cos 2v)Y = 0. \tag{2}$$

При вещественных значениях q собственные значения, как известно, будут вещественными и их можно упорядочить в порядке возрастания. Если постоянная $q \neq 0$, то каждому собственному значению соответствует не более одного периодического решения уравнения Матье с наименьшим периодом π или 2π, чётного или нечётного. Следовательно, среди собственных значений будут такие, которым отвечают чётные 2π-периодические решения «углового» уравнения Матье, и такие, которым отвечают нечётные 2π-периодические решения.

Собственные функции, обладающие наименьшим периодом π, и соответствующие собственные значения можно определять как решения так называемой *периодической* задачи Штурма—Лиувилля:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2Y}{dv^2} + (a - 2q\cos 2v)Y = 0, \\ Y(0) = Y(\pi), \\ Y'(0) = Y'(\pi). \end{cases} \tag{3}$$

Собственные функции, обладающие наименьшим периодом 2π, и соответствующие собственные значения можно определять как решения *полупериодической* (антипериодической) задачи Штурма—Лиувилля:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2Y}{dv^2} + (a - 2q\cos 2v)Y = 0, \\ Y(0) = -Y(\pi), \\ Y'(0) = -Y'(\pi). \end{cases} \tag{4}$$

2. Обе указанные выше задачи, как нетрудно проверить, являются самосопряжёнными. Их исследование может поэтому опираться на достаточно хорошо разработанную в многочисленных публикациях теорию задач Штурма—Лиувилля. В частности, сразу можно сделать заключение о вещественности собственных значений как периодической (3), так и полупериодической (4) задач Штурма—Лиувилля. В дальнейшем собственные значения периодической задачи будут нумероваться чётными натуральными числами, а полупериодической — нечётными. Кроме того, собственные значения, ассоциированные с нечётными собственными функциями, будут иметь указатель o, а с чётными — указатель e.

Периодической задаче Штурма—Лиувилля (3) отвечает возрастающая последовательность собственных значений

$$a_0^{(e)}, a_2^{(o)}, a_2^{(e)}, a_4^{(o)}, a_4^{(e)}, \ \ldots \ . \tag{5}$$

Полупериодической задаче Штурма—Лиувилля (4) также отвечает возрастающая последовательность собственных значений; в зависимости от знака постоянной q указанная последовательность может быть представлена в формах

$$a_1^{(o)}, a_1^{(e)}, a_3^{(o)}, a_3^{(e)}, \ \ldots \qquad (q > 0); \tag{6}$$

$$a_1^{(e)}, a_1^{(o)}, a_3^{(e)}, a_3^{(o)}, \ \ldots \qquad (q < 0). \tag{7}$$

Хорошо известно, что последовательности (5) и (6), (7) упорядочиваются в одну строку следующим образом:

– при выполнении условия $q > 0$ получаем

$$a_0^{(e)} < a_1^{(o)} < a_1^{(e)} < a_2^{(o)} < a_2^{(e)} < a_3^{(o)} < a_3^{(e)} < a_4^{(o)} < \cdots ,$$

т.е.

$$a_{2s}^{(e)} < a_{2s+1}^{(o)} < a_{2s+1}^{(e)} < a_{2s+2}^{(o)} \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots);$$

– при выполнении неравенства $q < 0$ получаем

$$a_0^{(e)} < a_1^{(e)} < a_1^{(o)} < a_2^{(o)} < a_2^{(e)} < a_3^{(e)} < a_3^{(o)} < a_4^{(o)} < a_4^{(e)} < \cdots ,$$

т.е.

$$a_{2s-1}^{(e)} < a_{2s-1}^{(o)} < a_{2s}^{(o)} < a_{2s}^{(e)} \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots).$$

В том случае, когда постоянная $q = 0$, наименьшее собственное значение оказывается равным нулю $a_0^{(e)} = 0$, а остальные собственные значения периодической и полупериодической задач Штурма—Лиувилля (3), (4) совпадают $a_m^{(e)} = a_m^{(o)} = m^2$ $(m = 1, 2, \dots)$. При этом собственному значению $a_0^{(e)} = 0$ соответствует лишь одна характеристическая функция; каждому собственному значению m^2 $(m = 1, 2, \dots)$ соответствуют ровно *две* линейно независимых характеристических функции.

3. Один из возможных методов поиска характеристических чисел Матье состоит в следующем. Каждое 2π-периодическое решение уравнения Матье (1) можно представить рядом Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$, который удобнее всего взять в комплексной форме:

$$Y(v) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} g_s e^{isv}, \quad g_k = \overline{g_{-k}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(\vartheta)e^{-ik\vartheta}d\vartheta \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \tag{8}$$

Коэффициенты Фурье g_s $(s = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$ есть, вообще говоря, комплексные числа. Однако, если $Y(v)$ — чётная функция переменной v, то все коэффициенты g_s — вещественные числа и, кроме того, выполняются равенства $g_k = g_{-k}$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$; если $Y(v)$ — нечётная функция, то все g_s — чисто мнимые числа, удовлетворяющие равенствам $g_k = -g_{-k}$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$. Ясно, что во втором случае мнимую единицу можно вынести за знак суммы в (8) и исключить её из рассмотрения, что никак не повлияет на исследование спектральной задачи для дифференциального оператора Матье. Таким образом, в дальнейшем, когда это представляется удобным, можно считать что все коэффициенты Фурье g_s $(s = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$ суть *вещественные* числа, подчинённые дополнительным ограничениям:

– «симметрии»

$$g_k = g_{-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots) \tag{9}$$

для чётного периодического решения;

– «антисимметрии»

$$g_k = -g_{-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots) \tag{10}$$

для нечётного периодического решения.

Подставляя ряд (8) в дифференциальное уравнение Матье (2), получим трёхчленную рекуррентную формулу[1]

$$(s^2 - a)g_s + q(g_{s+2} + g_{s-2}) = 0 \quad (s = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots), \tag{11}$$

которая допускает следующую компактную и изящную матричную запись:

$$(\mathbf{H} - a\mathbf{I})\mathbf{g} = \mathbf{0}, \tag{12}$$

[1] Приводимое далее рекуррентное уравнение (11) должно решаться с учётом дополнительных ограничений (9), (10). Только в этом случае имеется, по крайней мере, теоретическая возможность последовательно друг за другом вычислить все коэффициенты Фурье g_s $(s = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$ «угловой» гармоники Матье исходя из «начального».

где $\mathbf{I}$ — бесконечная диагональная единичная матрица, $\mathbf{H}$ — бесконечная симметричная вещественная (при вещественном q) пентадиагональная (пятидиагональная) матрица

$$\mathbf{H} = \left\| \begin{array}{ccccccc} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\ \cdots & (-2)^2 & 0 & q & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & (-1)^2 & 0 & q & 0 & \cdots \\ \cdots & q & 0 & 0^2 & 0 & q & \cdots \\ \cdots & 0 & q & 0 & (1)^2 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & q & 0 & (2)^2 & \cdots \\ \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right\|,$$

$\mathbf{g}$ — бесконечный квадратично суммируемый вектор-столбец

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \cdots & g_{-1} & g_0 & g_1 & \cdots \end{pmatrix}^{\top}.$$

Как уже было отмечено, компоненты g_s ($s = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$) бесконечного вектора $\mathbf{g}$ можно считать вещественными.

Задача (12) — классическая спектральная задача для линейного оператора $\mathbf{H}$ в гильбертовом пространстве бесконечных двусторонних последовательностей $G = \{g_s\}$ ($s = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$) таких, что они квадратично суммируемы

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} |g_s|^2 < +\infty$$

со стандартным скалярным произведением (G, C) двух последовательностей $G = \{g_s\}$ и $C = \{c_s\}$ ($s = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$), определяемым согласно

$$(G, C) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} g_s \overline{c_s}.$$

Линейная система алгебраических уравнений (12) имеет нетривиальное решение, только если её определитель обращается в нуль, т.е.

$$\det(\mathbf{H} - a\mathbf{I}) = 0.$$

Следовательно, 2π-периодические решения «углового» уравнения Матье (2) существуют только для таких значений a, которые являются собственными значениями матрицы $\mathbf{H}$. Если q вещественно, то $\mathbf{H}$ — вещественная симметричная матрица, собственные значения которой также будут вещественными (и, кроме того, простыми) и их можно упорядочить в порядке возрастания. Более того, как указывалось выше, при выполнении условия $q > 0$ имеем цепочку строгих неравенств

$$a_0^{(e)} < a_1^{(o)} < a_1^{(e)} < a_2^{(o)} < a_2^{(e)} < a_3^{(o)} < a_3^{(e)} < \cdots .$$

В том исключительном случае, когда $q = 0$, получаем $a_0^{(e)} = 0$, $a_m^{(e)} = a_m^{(o)} = m^2$ ($m = 1, 2, \ldots$).

4. Локализация собственных значений h_j симметричной матрицы $\mathbf{H}$ может быть установлена чисто алгебраическими методами [6, 7].

Бесконечная по всем направлениям симметричная матрица $\mathbf{H}$ характеризуется тем, что ее наддиагональ и поддиагональ (т.е. диагонали, сверху и снизу ближе всего расположенные к главной диагонали) заполнены нулями; следующие по порядку две диагонали, параллельные главной, заполнены элементами, равными q; все остальные наддиагональные и поддиагональные элементы нулевые. Матрица $\mathbf{H}$ имеет в качестве «центрального» элемента единственный нулевой элемент, располагающийся на главной диагонали. Она симметрична не только относительно своей главной диагонали, но и относительно второй («побочной») диагонали, которая пересекает главную диагональ в том месте, где расположен упомянутый единственный диагональный нулевой элемент. На главной диагонали симметрично относительно нулевого элемента, играющего роль «центра» матрицы $\mathbf{H}$, располагаются в порядке возрастания квадраты натуральных чисел.

Матрица $\mathbf{H}$, очевидно, представляет собой сумму диагональной матрицы $\mathbf{P}$ и симметричной пентадиагональной остаточной матрицы $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{H} = \mathbf{P} + \mathbf{L}, \quad \mathbf{P} = \mathrm{diag}(\ldots\, (-2)^2,\, (-1)^2,\, 0^2,\, 1^2,\, 2^2,\, \ldots).$$

Квадраты азимутальных чисел волн, распространяющихся вдоль волновода с *круговым* поперечным сечением, представляют собой диагональные элементы матрицы $\mathbf{P}$. Остаточная матрица $\mathbf{L}$ играет роль «конечного» возмущения, накладываемого на диагональную матрицу $\mathbf{P}$.

Обозначим через h, p и l спектральные параметры матриц $\mathbf{H}$, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{L}$ соответственно. Следует обратить внимание на то, что $h = a$. Упорядочим собственные значения матриц $\mathbf{H}$, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{L}$ по возрастанию влево и вправо от «центральных» собственных чисел h_0, $p_0 = 0^2$, l_0 и введем для них соответствующую двустороннюю нумерацию:

$$\ldots,\, h_{-2},\, h_{-1},\, h_0,\, h_1,\, h_2,\, \ldots,$$

$$\ldots,\, (-2)^2,\, (-1)^2,\, 0^2,\, (1)^2,\, (2)^2,\, \ldots,$$

$$\ldots,\, l_{-2},\, l_{-1},\, l_0,\, l_1,\, l_2,\, \ldots.$$

В 1931 г. Гершгориным была доказана знаменитая теорема (см., например, [6, 7]), утверждающая, что любое собственное значение a_j произвольной квадратной матрицы $\mathbf{A} = (a_{kj})$ размера $n \times n$ с комплексными элементами располагается по крайней мере в одном из замкнутых кругов (кругов Гершгорина) с центрами a_{kk} ($k = 1,2,\ldots,n$) и радиусами (радиусами Гершгорина)

$$d_k = \sum_{j:\, j\neq k} |a_{kj}|,$$

т.е. удовлетворяют, по крайней мере, одному из неравенств

$$|a - a_{kk}| \leqslant d_k \qquad (\text{по } k \text{ не суммировать; } k = 1,2,\ldots,n). \tag{13}$$

Здесь спектральный параметр a матрицы $\mathbf{A}$ считается комплексной переменной и речь идет о замкнутых кругах на комплексной плоскости $(\mathrm{Re}\, a, \mathrm{Im}\, a)$.

Величины d_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ представляют собой k-тую усеченную (т.е. за вычетом абсолютного значения диагонального элемента) строчную сумму абсолютных значений элементов матрицы $\mathbf{A}$.

Гершгориным была доказана еще одна теорема, касающаяся распределения собственных значений по кругам (13), из которой вытекает, в частности, следующее заключение: если какой-либо из кругов Гершгорина изолирован от остальных, то он содержит в точности одно собственное значение.

В случае матрицы $\mathbf{L}$ все круги Гершгорина имеют центры в нуле, а все усеченные строчные суммы d_s равны друг другу и равны $2|q|$. Поэтому на основании теоремы Гершгорина заключаем, что собственные значения l_s остаточной матрицы $\mathbf{L}$ не могут по абсолютной величине превосходить значения $2q$ $(q > 0)$:

$$|l_s| \leqslant 2q.$$

Следовательно (см. [6, с. 103]), для собственных чисел h_s матрицы $\mathbf{H}$ будут выполняться оценки

$$|h_s - p_s| \leqslant 2q \quad (s = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots),$$

устанавливающие двустронние границы, в которых заключаются элементы дискретного спектра матрицы $\mathbf{H}$, а именно: в случае не слишком больших значений q (точнее, когда $2q < 1/2$) круги Гершгорина $|h - p_s| \leqslant 2q$ $(s = 0, 1, 2, \ldots)$ изолированы друг от друга; в каждом круге Гершгорина радиуса $2q$ с центром $p_k = p_{-k} = k^2$ $(k = 1, 2, \ldots)$, как следует из второй теоремы Гершгорина, располагаются ровно *два* собственных значения матрицы $\mathbf{H}$; круг Гершгорина радиуса $2q$ с центром $p_0 = 0^2$ содержит единственное собственное значение h_0.

В случае комплексных квадратных матриц размерности не меньшей, чем 2, Островским (A. M. Ostrowski) в 1937 г. была получена (см., например, [7]) несколько улучшенная по сравнению с результатом Гершгорина оценка спектральных значений матрицы: если дана квадратная матрица $\mathbf{A} = (a_{kj})$ размера $n \times n$ $(n \geqslant 2)$ с комплексными элементами, то собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ расположены в объединении замкнутых областей комплексной плоскости, ограниченных овалами Кассини:

$$|a - a_{kk}||a - a_{jj}| \leqslant d_k d_j \quad (\text{по } k,\ j \text{ не суммировать; } k, j = 1{,}2,\ \ldots,\ n;\ k \neq j). \tag{14}$$

Можно показать, что объединение всех замкнутых областей, ограниченных овалами Кассини данной матрицы $\mathbf{A}$, располагается в объединении всех кругов Гершгорина. Именно в этом смысле оценка (14) уточняет упомянутую выше оценку (13).

Применим только что сформулированные результаты непосредственно к матрице $\mathbf{H}$. Все собственные значения h_s этой матрицы будут расположены в объединении замкнутых областей

$$\begin{gathered}|h - h_{ss}||h - h_{jj}| \leqslant d_s d_j = 4q^2 \\ (\text{по } s,\ j \text{ не суммировать; } s, j = \ \ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).\end{gathered} \tag{15}$$

Данные неравенства позволяют сразу же получить оценку снизу для наименьшего спектрального значения h_0 матрицы $\mathbf{H}$, т.е. фактически для $a_0^{(e)}$.

Действительно, поскольку в соответствующем круге Гершгорина находится всего одно собственное значение (именно h_0), то для его более точной локализации воспользуемся овалом Кассини, который определяется уравнением

$$|h||h-1| = 4q^2. \tag{16}$$

Овал Кассини (16) является алгебраической кривой четвёртого порядка и характеризуется фокусным расстоянием, равным единице, и еще одним параметром $2q$, квадрат которого равен постоянному произведению расстояний, измеренных от точек овала до его фокусов; при выполнении условия $0 < 4q < 1$ овал (16) состоит из двух отдельных овалов, локализованных около фокусов $h = 0$ и $h = 1$; если $4q = 1$, то он превращается в лемнискату Бернулли.

Заметим, что овал (16), для которого $s = 0$, $j = \pm 1$, будет охватывать все остальные овалы (15) с номерами $s = 0$, $j = 2, 3, 4, \ldots$ и $j = -2, -3, -4, \ldots$.

Обозначая через $-\underline{d}$ ($\underline{d} > 0$) координату крайне левой точки пересечения овала (16) с вещественной осью $\operatorname{Im} h = 0$, для определения $\underline{d}$ можно получить квадратное уравнение

$$d^2 + d - 4q^2 = 0,$$

из которого находим, что

$$\underline{d} = \frac{\sqrt{1+16q^2}-1}{2}.$$

Поэтому минимальное собственное значение h_0 матрицы $\mathbf{H}$, а вместе с ним и минимальное собственное значение $a_0^{(e)}$, подчиняются следующему ограничению:

$$-\frac{\sqrt{1+16q^2}-1}{2} < \begin{pmatrix} h_0 \\ a_0^{(e)} \end{pmatrix}.$$

Для получения оценок остальных собственных значений матрицы $\mathbf{H}$ следует рассматривать овалы Кассини, заданные уравнениями

$$|h - h_{ss}||h - h_{jj}| = 4q^2 \qquad (\text{по } s,\ j \text{ не суммировать; } j > s \geqslant 0). \tag{17}$$

Выполнив сдвиг переменной h на величину h_{ss} согласно

$$h' = h - h_{ss},$$

приведём уравнение овала (17) к несколько более простому виду

$$|h'||h' - (h_{jj} - h_{ss})| = 4q^2 \qquad (\text{по } s,\ j \text{ не суммировать; } j > s \geqslant 0). \tag{18}$$

Для не слишком больших значений возмущающего параметра q (точнее, когда выполняются неравенства $0 < 4q < 1$) овал (17) будет состоять из двух симметричных непересекающихся овалов, левого и правого.

Обозначая через $-\underline{d'}_{s,j}$ ($\underline{d'}_{s,j} > 0$) координату крайне левой точки пересечения левого овала (18) с вещественной осью $\operatorname{Im} h' = 0$, для определения $\underline{d'}_{s,j}$ можно получить квадратное уравнение

$$d'^2 + (h_{jj} - h_{ss})d' - 4q^2 = 0$$

и найти нужный положительный корень

$$\underline{d'}_{s,\,j} = \frac{\sqrt{(j^2 - s^2)^2 + 16q^2} - (j^2 - s^2)}{2}.$$

Аналогично, обозначая через $\overline{d'}_{s,\,j}$ ($\overline{d'}_{s,\,j} > 0$) расстояние от центра левого овала (18) до крайне правой точки его пересечения с осью $\operatorname{Im} h' = 0$, находим

$$\overline{d'}_{s,\,j} = \frac{(j^2 - s^2) - \sqrt{(j^2 - s^2)^2 - 16q^2}}{2} \qquad (j > s \geqslant 0).$$

Окончательно двусторонняя оценка для пары собственных значений h_s, h_{-s} матрицы $\mathbf{H}$, локализованных в окрестности невозмущенного собственного значения $h = s^2$, устанавливается в следующем виде:

$$s^2 - \overline{d'}_{s-1,\,s} < \begin{pmatrix} h_s \\ h_{-s} \end{pmatrix} < s^2 + \underline{d'}_{s-1,\,s}.$$

Можно показать, что ширина зоны локализации собственных значений h_s, h_{-s} матрицы $\mathbf{H}$, равная $\overline{d'}_{s-1,\,s} + \underline{d'}_{s-1,\,s}$, быстро убывает с возрастанием порядкового номера s и, следовательно, собственные значения дифференциального оператора Матье оцениваются сверху и снизу тем более точно, чем больше номер s. Ясно, что при достаточно больших значениях s собственные значения мало отличаются от квадратов целых чисел s^2, следовательно, они практически совпадают с собственными числами для области с канонической круговой геометрией.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10–01–00184–а «Волновые задачи связанной гиперболической термоупругости»).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *É. Mathieu*, “Mémoire sur le mouvement vibratoire d’une membrane de forme elliptique” // *J. Math. Pures Appl.*, 1868. Vol. 13. Pp. 137–203.
2. *M. J. O. Strutt*, Lame, Mathieu and Related Functions in Physics and Technology. Berlin: Springer, 1932; русск. пер.: *М. Д. О. Стретт*, Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике. Харьков, Киев: Гос. научно-техническое изд-во Украины, 1935. 240 с.
3. *N. W. McLachlan*, Theory and Application of Mathieu Functions. London: Oxford Press, 1951. xii+401 pp.; русск. пер.: *Н. В. Мак-Лахлан*, Теория и приложения функций Матье. М.: Иностр. лит-ра, 1953. 476 с.
4. *В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев*, “Волновые задачи теории поля и термомеханика” / В сб.: *Вторая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»*: Материалы Межд. конф.; ред. чл.-корр. РАН И. В. Волович и д.ф.-м.н., проф. Ю. Н. Радаев. Самара: Книга, 2010. С. 165–166. [*V. A. Kovalev, Yu. N. Radayev*, “Wave problems of field theory and thermomechanics” / In: *The 2nd International Conference “Mathematical Physics and its Applications”*: Book of Abstracts and Conference Materials; eds. I. V. Volovich and Yu. N. Radayev. Samara: Kniga, 2010. Pp. 165–166].
5. *В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев*, Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Сарат. ун-т, 2010. 328 с. [*V. A. Kovalev, Yu. N. Radayev*, Wave problems of field theory and thermomechanics. Saratov: Saratov Univ., 2010. 328 pp.]

6. *J. H. Wilkinson*, The Algebraic Eigenvalue Problem. Oxford: Clarendon Press, 1965. xviii+662 pp.; русск. пер.: *Дж. Х. Уилкинсон*, Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970. 564 с.
7. *R. A. Horn, C. R. Johnson*, Matrix Analysis. Cambridge etc.: Cambridge University Press, 1985. xiii+561 pp.; русск. пер.: *Р. Хорн, Ч. Джонсон*, Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 656 с.

Поступила в редакцию 14/XI/2012;
в окончательном варианте — 02/I/2013.

MSC: 74F05; 65F15

ON A FINE LOCALIZATION OF THE MATHIEU AZIMUTHAL NUMBERS BY CASSINI OVALS

Yu. N. Radayev, M. V. Taranova

[1] A. Ishlinsky Instite for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,
101, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russia.
[2] N. G. Chernyshevsky Saratov State University (National Research University),
Faculty of Mathematics and Mechanics,
83, Astrakhanskaya st., Saratov, 410012, Russia.

E-mails: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com; m.v.taranova@mail.ru

The study is devoted to numerical and analytical problems concerning generating periodic and antiperiodic solutions of the angular (circumferential) Mathieu equation obtained for the circumferential *harmonics of an elliptic cylinder. The Mathieu eigenvalues localization problem and computations of elliptic azimuthal numbers are discussed. First, the Sturm–Liouville eigenvalue problem for the angular Mathieu equation is reformulated as an algebraic eigenvalue problem for an infinite linear self-adjoint pentadiagonal matrix operator acting in the complex bi-infinite sequence space l_2. The matrix operator is then represented as a sum of a diagonal matrix and an infinite symmetric doubly stochastic matrix, which is interpreted as a finite perturbation imposed on the diagonal matrix. Effective algorithms for computations of the Mathieu eigenvalues and associated circumferential harmonics are discussed. Azimuthal numbers notion is extended to the case of elastic and thermoelastic waves propagating in a long elliptic waveguide. Estimations of upper and low bounds and thus localizations of the angular Mathieu eigenvalues and elliptic azimuthal numbers are given. Those are obtained by algebraic methods employing the Gerschgorin theorems and Cassini ovals technique. The latter provides more accurate solution of the Mathieu eigenvalues localization problem.*

Key words: *Mathieu equation, eigenvalue, azimuthal number, Sturm–Liouville problem, wavenumber, wave function, diagonalization, Gerschgorin circle, Cassini oval, doubly stochastic matrix.*

Original article submitted 14/XI/2012;
revision submitted 02/I/2013.

Yuriy N. Radayev (Dr. Sci. (Phys. & Math.), Professor), Leading Researcher, Lab. of Modeling in Solid Mechanics.
Margarita V. Taranova, Researcher, Dept. of Mathematical Theory of Elasticity & Biomechanics.