Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. № 1 (30). С. 270–278

УДК 517.958

О СТРОГОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ МИКРОСКОПИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА—ЭНСКОГА

А. С. Трушечкин

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
Россия, 119991, Москва, ул. Губкина, 8.

E-mail: trushechkin@mi.ras.ru

Н. Н. Боголюбовым были открыты микроскопические решения уравнения Больцмана—Энскога в кинетической теории упругих шаров. Они имеют вид сумм дельта-функций и соответствуют точной микроскопической динамике. Однако это было сделано на «физическом» уровне строгости. В частности, не обсуждались произведения обобщённых функций в интеграле столкновений. В данной работе микроскопическим решениям придаётся строгий смысл при помощи введения регуляризации. Также из уравнения Власова выведены новые кинетические уравнения для газа из упругих шаров.

Ключевые слова: *кинетические уравнения, уравнение Больцмана—Энскога, уравнение Власова, микроскопические решения, обобщённые функции.*

Введение. В известной работе Н. Н. Боголюбова [1] (см. также [2]) показано, что кинетическое уравнение Больцмана—Энскога для функции плотности газа из упругих шаров имеет микроскопические решения. Эти решения имеют вид сумм дельта-функций и соответствуют динамике отдельных шаров (микроскопической динамике). Факт наличия таких решений является удивительным, поскольку считается, что уравнение Больцмана—Энскога описывает динамику газа лишь в приближении малой плотности. Эти решения показывают, что данное кинетическое уравнение включает в себя и точную микроскопическую динамику. Кроме того, микроскопическая динамика обратима по времени, в то время как уравнение Больцмана—Энскога описывает необратимую динамику и возрастание энтропии.

Однако микроскопические решения определены Н. Н. Боголюбовым на «физическом» уровне строгости. Основной целью настоящей работы является придание строгого смысла этим решениям. Один из способов приведён нами в более ранней работе [3]. Здесь мы приведём другой, более естественный способ. Он основан на понятии мягкого решения.

Также мы получим новые кинетические уравнения для газа из упругих шаров, рассматривая потенциал упругих шаров для уравнения Власова (которое также имеет микроскопические решения, что было показано самим А. А. Власовым [4]). Они применимы в другой физической ситуации, нежели уравнение Больцмана—Энскога.

1. Уравнение Больцмана—Энскога. Кинетическое уравнение Больцмана—Энскога, описывающее динамику газа из упругих шаров, имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -v_1 \frac{\partial f}{\partial r_1} + Q(f, f), \tag{1}$$

Антон Сергеевич Трушечкин (к.ф.-м.н.), научный сотрудник, отдел математической физики.

$$Q(f,f)(r_1,v_1,t) = na^2 \int_{(v_{21},\sigma)\geqslant 0} (v_{21},\sigma)[f(r_1,v_1',t)f(r_1+a\sigma,v_2',t)-$$
$$-f(r_1,v_1,t)f(r_1-a\sigma,v_2,t)]d\sigma dv_2.$$

Здесь $f = f(r_1,v_1,t)$ — функция плотности шаров в фазовой точке (r_1,v_1), где r_1 — пространственные координаты шара (т.е. координаты его центра), v_1 — скорость шара. Для простоты (чтобы не брать во внимание граничные эффекты) будем считать, что газ заключён в трёхмерный тор $\mathbb{T}^3$. Тогда $r_1 \in \mathbb{T}^3$, $v_1 \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, n, $a > 0$ — положительные постоянные. Постоянная a — радиус шара.

Смысл постоянной n зависит от нормировки функции f. Если функция f нормирована на единицу, т.е. $\int f dr_1 dv_1 = 1$ (тогда f — функция плотности вероятности), то n — число шаров в газе (обозначим его через N). Если f нормирована на число шаров N, то $n = 1$. Если f нормирована на объём V ёмкости, в которую заключён газ (в нашем случае это трёхмерный тор, но для общности не выписываем явную формулу объёма), то $n = N/V$ — концентрация шаров. В такой нормировке и будем работать.

Пусть

$$v_1' = v_1 + (v_{21},\sigma)\sigma, \quad v_2' = v_2 - (v_{21},\sigma)\sigma,$$

$v_{21} = v_2 - v_1$, $\sigma \in S^2$ (S^2 — двухмерная сфера), $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение; v_1 и v_2 имеют смысл скоростей первого и второго шара до столкновения; v_1' и v_2' — после столкновения; σ имеет смысл единичного вектора, направленного из центра второго шара в центр первого шара. Выражение $Q(f,f)$ называется интегралом столкновений.

От более известного уравнения Больцмана уравнение Больцмана—Энскога отличается тем, что шары имеют ненулевой радиус a. Уравнение Больцмана формально получается из уравнения Больцмана—Энскога в пределе Больцмана—Грэда: $n \to \infty$, $a \to 0$, $na^2 = \text{const}$. Можно также показать, что в этом пределе решения уравнения Больцмана—Энскога стремятся к решениям уравнения Больцмана [5].

Определение.

1) Под классическим решением уравнения Больцмана—Энскога понимается функция $f(r_1,v_1,t)$ класса $C^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$, удовлетворяющая уравнению (1);
2) Под мягким решением уравнения Больцмана—Энскога понимается функция $f(r_1,v_1,t)$ класса $C([0,\infty); L^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$, удовлетворяющая уравнению

$$f(r_1,v_1,t) = f^0(r_1 - v_1 t, v_1) + \int_0^t Q(f,f)(r_1 - v_1(t-s), v_1, s)\, ds, \qquad (2)$$

где $f^0(r_1,v_1) \in L^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ — начальная функция.

Очевидно, классическое решение, если оно интегрируемо, также является и мягким: в этом случае интегро-дифференциальное уравнение (1) эквивалентно интегральному уравнению (2). Мягкое решение, если оно непрерывно дифференцируемо, также является и классическим. Чтобы это увидеть, достаточно продифференцировать уравнение (2). Доказана глобальная теорема существования мягкого решения [5].

2. Микроскопические решения. Рассмотрим (обобщённые) функции вида

$$f(r_1, v_1, t) = n^{-1} \sum_{i=1}^{N} \delta(r_1 - q_i(t), v_1 - w_i(t)), \tag{3}$$

где $q_1(t), w_1(t), \dots, q_N(t), w_N(t)$ — координаты и скорости N шаров в момент t (под координатой шара понимается координата его центра). Здесь $\delta(r, v) \equiv \delta(r)\delta(v)$ — шестимерная дельта-функция, $\delta(r)$ и $\delta(v)$ — трёхмерные дельта-функции. Зависимость от времени в (3) задаётся законами движения упругих шаров. Всегда будем предполагать, что начальные условия $q_i(0) = q_i^0$, $w_i(0) = w_i^0$, $i = 1, \dots, N$, таковы, что $|q_i^0 - q_j^0| \geqslant a$ при $i \neq j$, т.к. шары твёрдые и не могут проникать друг в друга. В этом случае неравенство $|q_i(t) - q_j(t)| \geqslant a$ при $i \neq j$ выполнено для произвольного момента времени.

Таким образом, набор функций $(q_1(t), \dots, w_N(t))$ задаёт траекторию движения N упругих шаров в фазовом пространстве. На «физическом» уровне строгости Н. Н. Боголюбов показал, что функции (3) являются решениями уравнения Больцмана—Энскога. Эти решения называются микроскопическими, поскольку они соответствуют точной динамике отдельных шаров, т.е. микродинамики. В противоположность этому классические решения кинетического уравнения описывают динамику газа упругих шаров на макроскопическом уровне.

Говоря об индивидуальных траекториях, мы исключаем траектории, которые на рассматриваемом конечном промежутке времени приводят к тройным столкновениям или к бесконечному числу парных столкновений. Можно показать, что мера таких траекторий равна нулю [6].

Помимо того что кинетическое уравнение содержит точную динамику шаров, удивительным здесь является то, что микроскопические решения обратимы по времени: если $f(r_1, v_1, t)$ — микроскопическое решение, то $f(r_1, -v_1, -t)$ — другое микроскопическое решение (следствие обратимости динамики шаров). Напротив, классические и мягкие решения уравнения Больцмана—Энскога описывают необратимую динамику газа и возрастание энтропии.

Строгое определение того, в каком смысле (3) является решением (1), наталкивается на трудности. Формальная подстановка даёт в правой части произведение дельта-функций, что, как известно, математически некорректно. В левой части мы тоже получим произведения сингулярных обобщённых функций: по правилу дифференцирования сложной функции в левую часть будут входить слагаемые вида $(\partial f / \partial w_i) \cdot (dw_i / dt)$. Поскольку скорости $w_i(t)$ меняются скачкообразно, то эти слагаемые будут представлять собой произведения дельта-функций и их производных.

Более естественно понимать функции (3) как решения уравнения (1) в интегральном смысле, т.е. как решения уравнения (2). Тогда левая часть определена корректно как обобщённая функция.

Но в правой части остаются произведения обобщённых функций. Поэтому строгий смысл микроскопическим решениям удаётся придать, только если рассматривать предел подстановки в (2) сумм дельта-образных гладких функций.

Теорема. *Рассмотрим функции*

$$f(r_1, v_1, t) = n^{-1} \sum_{i=1}^{N} \delta(r_1 - q_i(t), v_1 - w_i(t)),$$

$$f_\varepsilon(r_1, v_1, t) = n^{-1} \sum_{i=1}^{N} \delta_\varepsilon(r_1 - q_i(t), v_1 - w_i(t)),$$
$$f^0(r_1, v_1) = n^{-1} \sum_{i=1}^{N} \delta(r_1 - q_i^0, v_1 - w_i^0),$$

где $q_i^0 = q_i(0)$, $w_i(0) = w_i^0$, $i = 1, \ldots, N$, $\delta_\varepsilon \in \mathscr{D}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ *— дельта-образное семейство функций* ($\mathscr{D}$ *— пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем), т.е.* $\delta_\varepsilon \to \delta$ *при* $\varepsilon \to 0$ *в* $\mathscr{D}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$.

Тогда для всех t *в пространстве обобщённых функций* $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ *имеет место предел*

$$\lim_{\varrho \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t Q_\varrho(f_\varepsilon, f_\varepsilon)[r_1 - v_1(t-s), v_1, s]\, ds = f(r_1, v_1, t) - f^0(r_1 - v_1 t, v_1), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} Q_\varrho(f_\varepsilon, f_\varepsilon) = na^2 \int_{(v_{21},\sigma) \geqslant 0} &(v_{21}, \sigma)[f_\varepsilon(r_1, v_1', t) f_\varepsilon(r_1 + (a+\varrho)\sigma, v_2', t) - \\ &- f_\varepsilon(r_1, v_1, t) f_\varepsilon(r_1 - (a+\varrho)\sigma, v_2, t)] d\sigma dv_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Доказательство. Пусть $D(q_1^0, w_1^0, \ldots, q_N^0, w_N^0)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая и финитная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{G^N} D(q_1^0, \ldots, w_N^0)\, dq_1^0 \ldots dw_N^0 = 1,$$

где $G = \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$, и равная нулю, если $|q_i^0 - q_j^0| < a$ при $i \neq j$. Она имеет смысл начальной функции плотности системы N шаров. Пусть также она симметрична относительно перестановок пар (q_i^0, w_i^0). Тогда функции

$$F_1(r_1, v_1, 0) = V \int_{G^{N-1}} D(q_1^0, \ldots, w_N^0)\, dq_2^0 \ldots dw_N^0,$$
$$F_2(r_1, v_1, r_2, v_2, 0) = V^2 \big(1 - \frac{1}{N}\big) \int_{G^{N-2}} D(q_1^0, \ldots, w_N^0)\, dq_3^0 \ldots dw_N^0$$

суть одно- и двухчастичные функции плотности соответственно. Они удовлетворяют уравнению (первому уравнению цепочки Боголюбова для упругих шаров) [1, 7]

$$F_1(r_1, v_1, t) = F_1(r_1 - v_1 t, v_1, 0) + \int_0^t Q_2(F_2)(r_1 - (t-s)v_1, v_1, s)\, ds,$$

$$\begin{aligned} Q_2(F_2)(r_1, v_1, t) = na^2 \lim_{\varrho \to 0} \int_{(v_{21},\sigma) \geqslant 0} &(v_{21}, \sigma)[F_2(r_1, v_1', r_1 + (a+\varrho)\sigma, v_2', t) - \\ &- F_2(r_1, v_1, r_1 - (a+\varrho)\sigma, v_2, t)] d\sigma dv_2. \end{aligned} \quad (6)$$

В $\mathscr{D}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ имеет место соотношение

$$F_1(r_1, v_1, t) = \int_{G^N} f(r_1, v_1, t) D(q_1^0, \ldots, w_N^0)\, dq_1^0 \ldots dw_N^0.$$

При $|r_2 - r_1| > a$ также имеет место предел

$$F_2(r_1, v_1, r_2, v_2, t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{G^N} f_\varepsilon(r_1, v_1, t) f_\varepsilon(r_2, v_2, t) D(q_1^0, \ldots, w_N^0)\, dq_1^0 \ldots dw_N^0. \tag{7}$$

Подставляя эти соотношение в первое уравнение цепочки Боголюбова, получаем

$$\int_{G^N} [f(r_1, v_1, t) - f^0(r_1 - v_1 t, v_1) - \lim_{\varrho \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t Q_\varrho(f_\varepsilon, f_\varepsilon)(r_1 - (t-s)v_1, v_1, t) ds] \times \\ \times D(q_1^0, \ldots, w_N^0)\, dq_1^0 \ldots w_N^0 = 0.$$

В силу произвольности функции D и непрерывной зависимости от $q_1^0, \ldots, w_N^0$ выражения в квадратных скобках (как обобщённой функции) отсюда следует тождественное равенство нулю этого выражения. $\square$

Замечание. Обычно третий аргумент функции F_2 под интегралом столкновений (6) выглядит как $r_1 \pm a\sigma$. Однако всегда под этой записью подразумевается $r_1 \pm (a+0)\sigma \equiv \lim_{\varrho \to 0}[r_1 \pm (a+\varrho)\sigma]$. Это связано с тем, что двухчастичная функция плотности $F_2(r_1, v_1, r_2, v_2)$ разрывна при $|r_1 - r_2| = a$. В самом деле, $F_2(r_1, v_1, r_2, v_2) = 0$ при $|r_1 - r_2| < a$ (шары не могут проникать друг в друга), но может быть $F_2(r_1, v_1, r_2, v_2) > 0$ при $|r_1 - r_2| = a + 0$.

Добавка $+\varrho$ в аргументах функции f_ε в интеграле столкновения (5) и устремление ϱ к нулю уже после предельного перехода $\varepsilon \to 0$ являются важными для того, чтобы предел (4) не зависел от выбора регуляризации дельта-функции δ_ε. Это связано с тем, что равенство (7), вообще говоря, неверно при $|r_1 - r_2| = a$ для произвольной регуляризации (вследствие разрывности F_2 в этих точках). При наличии добавки $+\varrho$ в интеграле столкновения достаточно выполнения равенства (7) только при $|r_1 - r_2| > a$.

Замечание. Можно также доказать теорему через непосредственные преобразования выражений (4), (5) с регуляризованными дельта-функциями, не используя первое уравнение цепочки Боголюбова. Доказательство будет опубликовано в дальнейших работах.

3. Предел упругих шаров для кинетического уравнения Власова. Другим кинетическим уравнением, обладающим микроскопическими решениями, является уравнение Власова:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -v_1 \frac{\partial f}{\partial r_1} + n \frac{\partial f}{\partial v_1} \int \frac{\partial \Phi(|r_1 - r_2|)}{\partial r_1} f(r_2, v_2, t) dr_2 dv_2. \tag{8}$$

Наличие у этого уравнения решений вида (3), где $q_i(t)$ и $w_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, являющихся решениями уравнений движения

$$\dot{q}_i(t) = w_i(t), \quad \dot{w}_i(t) = -\sum_{i \neq j} \frac{\partial \Phi(|q_i(t) - q_j(t)|)}{\partial q_i(t)} \tag{9}$$

(для простоты положили массу частицы равной единице), было открыто самим А. А. Власовым [4].

Считается, что потенциал Φ — дальнодействующий. Однако возьмём потенциал специального (короткодействующего) вида:

$$\Phi_\varepsilon(x) = K \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(a-y)\omega_\varepsilon(x-y)dy, \tag{10}$$

где $K, a > 0$, $\theta(x)$ — функция Хевисайда (функция-«ступенька»), $\omega_\varepsilon(x)$ — произвольная финитная функция, стремящаяся к $\delta(x)$ при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, потенциал Φ_ε представляет собой сглаженную версию потенциала-«ступеньки» $\Phi_0(x) = K\theta(a-x)$, при больших K соответствующего потенциалу упругих шаров. Если мы имеем систему конечного числа шаров в заданном состоянии, то K может быть выбрано бо́льшей, чем энергия системы. Тогда решения системы уравнений (9) с потенциалом Φ_ε в пределе $\varepsilon \to 0$ переходят в траектории упругих шаров.

Исследуем предел уравнения Власова (8) с потенциалом (10) при $\varepsilon \to 0$.

Теорема.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int \frac{\partial \Phi_\varepsilon(|r_1-r_2|)}{\partial r_1} f(r_2, v_2, t)\, dr_2 dv_2 = a^2 K \int_{S^2\times\mathbb{R}^3} f(r_1 + a\sigma, v_2, t)\sigma d\sigma dv_2.$$

Доказательство.

$$\frac{\partial \Phi_\varepsilon(|r_1-r_2|)}{\partial r_1} = \Phi'_\varepsilon(|r_1-r_2|)\frac{\partial |r_1-r_2|}{\partial r_1} = \Phi'_\varepsilon(|r_1-r_2|)\frac{r_1-r_2}{|r_1-r_2|},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Phi'_\varepsilon(x) = K\frac{d\theta(a-x)}{dx} = -K\delta(x-a).$$

Итак,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int \frac{\partial \Phi_\varepsilon(|r_1-r_2|)}{\partial r_1} f(r_2, v_2, t)\, dr_2 dv_2 = \\ = K \int f(r_2, v_2, t)\frac{r_2-r_1}{|r_2-r_1|}\delta(|r_2-r_1|-a) dr_2 dv_2.$$

Выполняя замену переменных $r_2 = r_1 + R$, $dr_2 = dR = |R|^2 d|R| d\sigma$, где $\sigma = R/|R| \in S^2$, и интегрируя по $|R|$, получаем утверждение теоремы. $\square$

Таким образом, в рассматриваемом пределе мы получили уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -v_1\frac{\partial f}{\partial r_1} + na^2K\frac{\partial f}{\partial v_1}\int_{S^2\times\mathbb{R}^3} f(r_1 + a\sigma, v_2, t)\sigma d\sigma dv_2. \tag{11}$$

Оно отличается от уравнения Больцмана—Энскога. По-видимому, уравнение (11) описывает кинетику газа в другой физической ситуации. Представляет интерес исследование области применимости уравнения (11).

Отметим, что, в отличие от уравнения Больцмана—Энскога и уравнения Власова до предельного перехода $\varepsilon \to 0$, уравнение (11) не имеет микроскопических решений. Также, в отличие от уравнения Больцмана—Энскога, уравнение (11) обратимо (т.е. если $f(r_1, v_1, t)$ — решение (11), то $f(r_1, -v_1, -t)$ — тоже решение (11)).

Осуществим предельный переход $n \to \infty$, $K \to \infty$, $a \to 0$, $na^3K = \alpha(\frac{4}{3}\pi)^{-1} = \text{const} \neq 0$ (т. е. предел бесконечной концентрации, бесконечно высокого потеницального барьера, что, собственно, и отвечает случаю упругих шаров, и бесконечно малого радиуса шаров). Раскладывая тогда $f(r_1 + a\sigma, v_2, t)$ по формуле Тейлора возле точки $a = 0$

$$f(r_1 + a\sigma, v_2, t) = f(r_1, v_2, t) + a\frac{\partial f}{\partial r_1}(r_1, v_2, t)\sigma + \mathsf{o}(a)$$

и интегрируя по σ, получаем в этом пределе уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -v_1\frac{\partial f}{\partial r_1} + \alpha\,\frac{\partial f}{\partial v_1}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial f(r_1, v_2, t)}{\partial r_1}dv_2. \tag{12}$$

Можно показать, что при гидродинамической подстановке

$$f(r, v, t) = \rho(r, t)\delta(v - V(r, t))$$

это уравнение переходит в гидродинамическое уравнение Эйлера для сжимаемой жидкости.

Заключение. Мы придали строгий смысл микроскопическим решениям уравнения Больцмана—Энскога, которое описывает динамику газа из упругих шаров. Эти решения понимаются как предел (4). Также, перейдя к пределу потенциала упругих шаров для уравнения Власова, мы получили новые кинетические уравнения (11) и (12). В отличие от уравнения Больцмана—Энскога, они обратимы по времени, и, по-видимому, описывают кинетику газа в другой физической ситуации.

В заключение отметим, что данная работа разивает идеи функциональной механики И. В. Воловича [8, 9] (см. также [10–13]). В функциональной механике в качестве фундаментального уравнения классической физики предлагается уравнение Лиувилля или более общее уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова [14]. Здесь же мы фактически предлагаем постулировать кинетическое уравнение Больцмана—Энскога (если рассматриваемая система — упругие шары), которое включает в себя как необратимую динамику газа как целого, так и обратимую динамику отдельных шаров.

А. А. Власов в качестве фундаментального уравнения классической физики предлагает своё уравнение [4]. В развитие этих идей в работе [15] в качестве таковых предлагаются системы уравнений Власова—Янга—Миллса и Власова–Эйнштейна. В нашем частном случае мы также можем постулировать кинетическое уравнение Власова с регуляризованным потенциалом упругих шаров (10), но оно, как и микродинамика, обратимо, и в пределе из него, как мы показали, получается не уравнение Больцмана—Энскога, а другое кинетическое уравнение.

Также можно сравнить полученные результаты с теоремами о диффузии В. В. Козлова [16, 17] для бесстолкновительной сплошной среды в ограниченном объёме. Динамика среды задаётся уравнением Лиувилля. Если мы рассмотрим некоторое решение этого уравнения, имеющее вид суммы дельта-функций, то в соответствии с теоремой Пуанкаре о возвращении решение будет периодическим или почти периодическим. Если же мы будем рассматривать решения в классе интегрируемых функций, то пространственная плотность на больших временах будет сходиться к равномерной в смысле слабого предела. Таким образом, асимптотические свойства динамики зависят от функционального класса решений. Но в любом случае уравнение Лиувилля обратимо по времени. В случае же уравнения Больцмана—Энскога само свойство обратимости или необратимости зависит от функционального класса решений.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12−01−37273−мол_а), гранта Президента РФ (проект НШ № 2928.2012.1) и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (соглашение № 8215).

Автор выражает глубокую благодарность В. В. Веденяпину, И. В. Воловичу, Т. В. Дудниковой, Е. И. Зеленову, В. В. Козлову, С. В. Козыреву, А. И. Михайлову, А. Н. Печеню, Е. В. Радкевичу, О. Г. Смолянову, Г. Шпону за постановку некоторых задач, полезные замечания и обсуждения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Н. Н. Боголюбов*, “Микроскопические решения уравнения Больцмана–Энскога в кинетической теории для упругих шаров” // *ТМФ*, 1975. Т. 24, № 2. С. 242–247; англ. пер.: *N. N. Bogolyubov*, “Microscopic solutions of the Boltzmann–Enskog equation in kinetic theory for elastic balls” // *Theoret. and Math. Phys.*, 1975. Vol. 24, no. 2. Pp. 804–807.
2. *Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.)*, Введение в квантовую статистическую механику. М.: Наука, 1984. 385 с.; англ. пер.: *N. N. Bogolubov, N. N. Bogolubov (Jr.)*, Introduction to Quantum Statistical Mechanics, 2nd. Singapore: World Scientific, 2009. 440 pp.
3. *A. S. Trushechkin*, “Derivation of the particle dynamics from kinetic equations” // *p-Adic Numb. Ultr. Anal. Appl.*, 2012. Vol. 4, no. 2. Pp. 130–142, arXiv: 1201.3607 [math-ph].
4. *А. А. Власов*, Теория многих частиц. М.: Гостехиздат, 1950. 348 с. [*A. A. Vlasov*, Theory of many particles. Moscow: Gostekhizdat, 1950. 348 pp.]
5. *Arkeryd L., Cercignani C.*, “Global existence in L_1 for the Enskog equation and convergence of the solutions to solutions of the Boltzmann equation” // *J. Stat. Phys.*, 1990. T. 59, no. 3–4. Pp. 845–867
6. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В.*, Математические основы классической статистической механики. Киев: Наукова думка, 1985. 263 с. [*D. Ya. Petrina, V. I. Gerasimenko, P. V. Malyshev*, Mathematical foundations of classical statistical mechanics. Kiev: Naukova Dumka, 1985. 263 pp.]
7. *C. Cercignani*, Theory and application of the Boltzmann equation. New York: Elsevier, 1975. xii+415 pp.; русск. пер.: *К. Черчиньяни*, Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
8. *И. В. Волович*, “Проблема необратимости и функциональная формулировка классической механики” // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2008. № 8/1(67). С. 35–55, arXiv: 0907.2445 [cond-mat.stat-mech]. [*I. V. Volovich*, “Time Irreversibility Problem and Functional Formulation of Classical Mechanics” // *Vestnik SamGU. Estestvennonauchn. Ser.*, 2008. no. 8/1(67). Pp. 35–55].
9. *I. V. Volovich*, “Randomness in classical and quantum mechanics” // *Found. Phys.*, 2011. Vol. 41, no. 3. Pp. 516–528.
10. *А. И. Михайлов*, “Функциональная механика: эволюция моментов функции распределения и теорема о возвращении” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 1(22). С. 124–133; англ. пер.: *A. I. Mikhaylov*, “Functional mechanics: Evolution of the moments of distribution function and the Poincaré recurrence theorem” // *p-Adic Numb. Ultr. Anal. Appl.*, 2011. Vol. 3, no. 3. Pp. 205–211.
11. *E. V. Piscovskiy, I. V. Volovich,*, “On the Correspondence Between Newtonian and Functional Mechanics” / In: *Quantum Bio-Informatic IV* / Quantum Probability and White

Noise Analisis, 28; eds. L. Accardy, W. Freudenberg, M. Ohya. Singapure: World Sci, 2011. Pp. 363–372.

12. *Е. В. Писковский*, “О классическом и функциональном подходах к механике” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. №1(22). С. 134–139. [*E. V. Piskovskiy*, “On classical and functional approachs to mechanics” // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2011. no. 1(22). Pp. 134–139].
13. *A. S. Trushechkin, I. V. Volovich*, “Functional classical mechanics and rational numbers” // *p-Adic Numb. Ultr. Anal. Appl.*, 2009. T. 1, no. 4. Pp. 361–367.
14. *И. В. Волович*, “Уравнения Боголюбова и функциональная механика” // *ТМФ*, 2010. Т. 164, №3. С. 354–362; англ. пер.: *I. V. Volovich*, “Bogoliubov equations and functional mechanics” // *Theoret. and Math. Phys.*, 2010. Vol. 164, no. 3. Pp. 1128–1135.
15. *В. В. Веденяпин*, Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001. 112 с. [*V. V. Vedenyapin*, Boltzmann and Vlasov Kinetic equations. Moscow: Fizmatlit, 2001. 112 pp.]
16. *В. В. Козлов*, Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре. М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 320 с. [*V. V. Kozlov*, Thermal equilibrium in the sense of Gibbs and Poincaré. Moscow, Izhevsk: Institut Komp’yuternykh Issledovanij, 2002. 320 pp.]
17. *В. В. Козлов*, Ансамбли Гиббса и неравновесная статистическая механика. М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. 208 с. [*V. V. Kozlov*, Gibbs Ensembles and Non-equilibrium Statistical Mechanics. Moscow, Izhevsk: Institut Komp’yuternykh Issledovanij, 2008. 208 pp.]

Поступила в редакцию 19/XI/2012;
в окончательном варианте — 27/I/2013.

MSC: 82C40; 82C70, 35Q20, 35Q83

ON A RIGOROUS DEFINITION OF MICROSCOPIC SOLUTIONS OF THE BOLTZMANN–ENSKOG EQUATION

A. S. Trushechkin

Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences,
8, Gubkina st., Moscow, 119991, Russia.

E-mail: `trushechkin@mi.ras.ru`

N. N. Bogolyubov discovered microscopic solutions of the Boltzmann–Enskog equation in kinetic theory of hard spheres. These solutions have the form of sums of the delta-functions and correspond to the exact microscopic dynamics. However, this was done at the “physical level” of rigour. In particular, Bogolyubov did not discuss the products of generalized functions in the collision integral. Here we give a rigorous sense to microscopic solutions by use of regularization. Also, starting from the Vlasov equaton, we obtain new kinetic equations for a hard sphere gas.

Key words: *kinetic equations, Boltzmann–Enskog equation, Vlasov equation, microscopic solutions, generalized functions.*

Original article submitted 19/XI/2012;
revision submitted 27/I/2013.

Anton S. Trushechkin (Ph. D. (Phys. & Math.)), Scientific Researcher, Dept. of Mathematical Physics.