

УДК 539.3

## ВЛИЯНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ВНЕШНЕЙ ЦЕПИ НА ФОРМУ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА В ЗАДАЧАХ ПРЯМОГО ПЬЕЗОЭФФЕКТА

*Д. А. Шляхин*

Самарский государственный архитектурно-строительный университет,  
443001, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

E-mail: d-612-mit2009@yandex.ru

*Рассматривается осесимметричная нестационарная задача электроупругости для сплошного пьезокерамического аксиально поляризованного цилиндра при действии кинематической нагрузки в виде известных механических перемещений его торцевых поверхностей, а также электрического потенциала. Новое замкнутое решение построено методом разложения по собственным вектор-функциям в форме структурного алгоритма конечных преобразований. Полученные расчётные соотношения позволяют проанализировать влияние характеристик внешней цепи на форму и величину индуцируемого электрического импульса в нестационарных задачах прямого пьезоэффекта.*

**Ключевые слова:** нестационарная задача прямого пьезоэффекта, пьезокерамический цилиндр, электрические граничные условия.

**Введение.** В задачах прямого пьезоэффекта процесс деформирования пьезокерамического тела осуществляется механическим путем с помощью заданных напряжений или перемещений. В результате на его электродированных поверхностях появляются свободные заряды, которые, в свою очередь, оказывают влияние на исследуемый элемент за счет появления дополнительной электрической индукции. Таким образом, электроупругое состояние внутри образца и на его границе представляет собой суперпозицию волн, возникающих за счет механического напряжения (перемещений) и свободных зарядов [1]. Для упрощения при математическом моделировании данного процесса, в котором наблюдается многократное проявление прямого и обратного пьезоэффектов, как правило, при формулировке электрических граничных условий используется несколько предельных случаев.

В частности, подключение образца к измерительному устройству с большим входным электрическим сопротивлением (режим холостого хода) приводит к уменьшению количества свободных зарядов на электродированных поверхностях, и их влиянием на пьезокерамический элемент в дальнейшем пренебрегают [2]. В результате появляется возможность заменить точное интегральное условие, сформулированное для эквипотенциальных поверхностей, приближенным, означающим отсутствие нормальной составляющей вектора диэлектрической индукции электрического поля во всех точках электродного покрытия.

Подтверждение достоверности данного допущения, а также анализ влияния характеристик внешней цепи на форму и величину индуцируемого электрического импульса в нестационарных задачах прямого пьезоэффекта осу-

---

*Дмитрий Аверкиевич Шляхин* (к.т.н., доц.), доцент, каф. сопротивления материалов и строительной механики.

пествляется на основании построенного в настоящей работе замкнутого решения для сплошного пьезокерамического цилиндра.

**1. Постановка задачи.** Пусть сплошной цилиндр, занимающий в цилиндрической системе координат  $(r_*, \theta, z_*)$  область  $\Omega: \{0 \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h\}$ , представляет пьезокерамическое аксиально-поляризованное тело. Рассматривается случай, когда торцевые электродированные плоскости исследуемого элемента подключены к измерительному прибору с электрической проводимостью  $Y^*$ , а цилиндрические неэлектродированные поверхности свободны от механических напряжений.

В результате кинематического воздействия в виде известных механических перемещений торцевых поверхностей  $\pm W_1^*(t_*)$  на электродах ( $z_* = 0, h$ ) цилиндра появляются свободные заряды, влияние которых на пьезокерамический элемент учитывается с помощью электрического потенциала  $\phi_1^*(r_*, t_*)$ .

Математическая формулировка рассматриваемой нестационарной осесимметричной задачи электроупругости в безразмерной форме включает систему дифференциальных уравнений, граничные и начальные условия [1]:

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 U + \frac{C_{55}}{C_{11}} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{C_{13} + C_{55}}{C_{11}} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} + \frac{e_{31} + e_{15}}{e_{33}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{C_{55}}{C_{11}} \nabla_2^2 W + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{C_{13} + C_{55}}{C_{11}} \nabla \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{e_{15}}{e_{33}} \nabla_2^2 \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{e_{15}}{e_{33}} \nabla_2^2 W + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{e_{31} + e_{15}}{e_{33}} \nabla \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{C_{11} \varepsilon_{11}}{e_{33}^2} \nabla_2^2 \phi - \frac{C_{11} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0;$$

$$\begin{aligned} z = 0, L: \quad W(r, 0, t) = W_1(t), \quad W(r, L, t) = -W_1(t), \\ \sigma_{rz} = \frac{C_{55}}{C_{11}} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{e_{15}}{e_{33}} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\phi(r, 0, t) = \phi_1(r, t), \quad \phi(r, L, t) = -\phi_1(r, t);$$

$$\begin{aligned} r = 1, 0: \quad \sigma_{rr} \Big|_{r=1} = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{C_{12}}{C_{11}} U + \frac{C_{13}}{C_{11}} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{e_{31}}{e_{33}} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \\ \sigma_{rz} \Big|_{r=1} = D_r \Big|_{r=1} = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \Big|_{r=1} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$U(0, z, t) = 0, \quad W(0, z, t) < \infty, \quad \phi(0, z, t) < \infty;$$

$$\begin{aligned} t = 0: \quad U(r, z, 0) = U_0(r, z), \quad \dot{U}(r, z, 0) = \dot{U}_0(r, z), \\ W(r, z, 0) = W_0(r, z), \quad \dot{W}(r, z, 0) = \dot{W}_0(r, z), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\{U(r, z, t), W(r, z, t)\} = \{U^*(r, z, t), W^*(r, z, t)\}/b$ ;  $U^*$ ,  $W^*$  — компоненты вектора перемещений;  $\phi(r, z, t) = \phi^*(r, z, t) \cdot e_{33}/(bC_{11})$ ;  $\phi^*$  — потенциал электрического поля;  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{rz}$ ,  $D_r$  — компоненты тензора механических напряжений и вектора индукции электрического поля;  $\{r, z, L\} = \{r_*, z_*, h\}/b$ ;  $t = t_* b^{-1} \sqrt{C_{11}/\rho}$ ;  $t_*$  — время;  $\{U_0, \dot{U}_0, W_0, \dot{W}_0\} = \{U_0^*, \dot{U}_0^*, W_0^*, \dot{W}_0^*\}/b$ ;  $U_0^*$ ,  $\dot{U}_0^*$ ,  $W_0^*$ ,  $\dot{W}_0^*$  — известные в начальный момент времени перемещения, скорости перемещений;

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}, \quad \nabla_2^2 = \nabla_1^2 + \frac{1}{r^2}, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}.$$

**2. Построение общего решения.** Решение осуществляется методом интегральных преобразований, с последовательным использованием косинус- и синус-преобразований Фурье [3] с конечными пределами по переменной  $z$  и обобщенного конечного преобразование (КИП) [4] по радиальной координате  $r$ . При этом каждый раз предварительно необходимо выполнять процедуру стандартизации. На первом этапе для этой цели вводим новые функции  $w(r, z, t)$ ,  $\chi(r, z, t)$ , связанные с  $W(r, z, t)$ ,  $\phi(r, z, t)$  следующими соотношениями:

$$W(r, z, t) = H_1(r, z, t) + w(r, z, t), \quad \phi(r, z, t) = H_2(r, z, t) + \chi(r, z, t), \quad (5)$$

где  $H_1(r, z, t) = (1 - 2z/L)W_1(t)$ ,  $H_2(r, z, t) = (1 - 2z/L)\phi_1(r, t)$ .

В результате подстановки (5) в (1)–(4) получаем новую начально-краевую задачу относительно функций  $U(r, z, t)$ ,  $w(r, z, t)$ ,  $\chi(r, z, t)$  с однородными граничными условиями по координате  $z$ . При этом дифференциальные уравнения (1) и граничные условия (3) становятся неоднородными с правыми частями  $B_i$ ,  $N_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , а в начальных условиях (4) вместо  $W_0$ ,  $\dot{W}_0$  следует использовать  $w_0$ ,  $\dot{w}_0$ :

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{e_{31} + e_{15}}{e_{33}} \frac{\partial^2 H_2}{\partial r \partial z}, \quad B_2 = -\frac{e_{15}}{e_{33}} \nabla_2^2 H_2 + \frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2}, \quad B_3 = \frac{C_{11} \varepsilon_{11}}{e_{33}^2} \nabla_2^2 H_2, \\ N_1 &= -\frac{C_{13}}{C_{11}} \frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{e_{31}}{e_{33}} \frac{\partial H_2}{\partial z}, \quad N_2 = 0, \quad N_3 = \frac{\partial H_2}{\partial r}, \\ w_0 &= W_0 - H_1|_{t=0}, \quad \dot{w}_0 = \dot{W}_0 - \dot{H}_1|_{t=0}. \end{aligned}$$

Применяем к краевой задаче в стандартной форме относительно функций  $U(r, z, t)$ ,  $w(r, z, t)$ ,  $\chi(r, z, t)$  косинус- и синус-преобразования Фурье с конечными пределами по переменной  $z$ . В пространстве изображений получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 u_c - \frac{C_{55}}{C_{11}} j_n^2 u_c + \frac{C_{13} + C_{55}}{C_{11}} j_n \frac{\partial w_s}{\partial r} + \frac{e_{31} + e_{15}}{e_{33}} j_n \frac{\partial \phi_s}{\partial r} - \frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2} &= B_{1c}, \\ \frac{C_{55}}{C_{11}} \nabla_2^2 w_s - \frac{C_{33}}{C_{11}} j_n^2 w_s - \frac{C_{13} + C_{55}}{C_{11}} j_n \nabla u_c + \frac{e_{15}}{e_{33}} \nabla_2^2 \phi_s - j_n^2 \phi_s - \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} &= B_{2s}, \quad (6) \\ \frac{e_{15}}{e_{33}} \nabla_2^2 w_s - j_n^2 w_s - \frac{e_{31} + e_{15}}{e_{33}} j_n \nabla u_c - \frac{C_{11} \varepsilon_{11}}{e_{33}^2} \nabla_2^2 \phi_s + \frac{C_{11} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} j_n^2 \phi_s &= B_{3s}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r = 1, 0 : \quad \left( \frac{\partial u_c}{\partial r} + \frac{C_{12}}{C_{11}} u_c + \frac{C_{13}}{C_{11}} j_n w_s + \frac{e_{31}}{e_{33}} j_n \phi_s \right) \Big|_{r=1} &= N_{1c}, \\ \left( \frac{\partial w_s}{\partial r} - j_n u_c \right) \Big|_{r=1} = 0, \quad \frac{\partial \phi_s}{\partial r} \Big|_{r=1} &= N_{3s}, \quad (7) \\ u_c(0, n, t) = 0, \quad w_s(0, n, t) < \infty, \quad \phi_s(0, n, t) < \infty; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t = 0 : \quad u_c(r, n, 0) = u_{0c}(r, n), \quad \dot{u}_c(r, n, 0) = \dot{u}_{0c}(r, n), \\ w_s(r, n, 0) = w_{0s}(r, n), \quad \dot{w}_s(r, n, 0) = \dot{w}_{0s}(r, n), \quad (8) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} & \{u_c(r, n, t), u_{0c}(r, n), \dot{u}_{0c}(r, n), B_{1c}(r, n, t), N_{1c}(r, n, t)\} = \\ & = \int_0^L \{u(r, z, t), u_0(r, z), \dot{u}_0(r, z), B_1(r, z, t), N_1(r, z, t)\} \cos j_n z dz, \\ & \{w_s(r, n, t), \phi_s(r, n, t), w_{0s}(r, n), \dot{w}_{0s}(r, n), B_{ks}(r, n, t), N_{3s}(r, n, t)\} = \\ & = \int_0^L \{w(r, z, t), \chi(r, z, t), w_0(r, z), \dot{w}_0(r, z), B_k(r, z, t), N_3(r, z, t)\} \sin j_n z dz, \end{aligned}$$

$j_n = n\pi/L, n = 0, 1, 2, \dots; k = 2, 3.$

Повторяем процедуру стандартизации по переменной  $r$ , используя следующие выражения:

$$\begin{aligned} w_s(r, n, t) &= \frac{C_{11}}{C_{13}j_n} N_{1s}(1, n, t) + W_s(r, n, t), \\ \phi_s(r, n, t) &= (r - 1)N_{3s}(1, n, t) + \chi_s(r, n, t). \end{aligned} \quad (9)$$

Получаем начально-краевую задачу относительно функций  $u_c(r, n, t), W_s(r, n, t), \chi_s(r, n, t)$  с однородными граничными условиями вида (7). При этом правые части дифференциальных уравнений (6) следует заменить на  $B_{1c}^*, B_{2c}^*, B_{3c}^*$ , а в начальных условиях (8) вместо  $w_{0s}, \dot{w}_{0s}$  использовать  $W_{0s}, \dot{W}_{0s}$ :

$$\begin{aligned} B_{1c}^* &= B_{1c} \frac{e_{31} + e_{15}}{e_{33}} j_n N_{3s}, \quad B_{2s}^* = B_{2s} + \frac{C_{33}j_n}{C_{13}} N_{1s} - \left[ \frac{e_{15}}{e_{33}} r^{-1} - j_n^2 (r - 1) \right] N_{3s}, \\ B_{3s}^* &= B_{3s} + \frac{C_{11}j_n}{C_{13}} H_{1s} + \left[ \frac{C_{11}e_{11}}{e_{33}^2} r^{-1} - \frac{C_{11}e_{33}}{e_{33}^2} j_n^2 (r - 1) \right] H_{3s}, \\ W_{0s}(r, n) &= w_{0s}(r, n) - \frac{C_{11}}{C_{13}j_n} N_{1s}(1, n, 0), \\ \dot{W}_{0s}(r, n) &= \dot{w}_{0s}(r, n) - \frac{C_{11}}{C_{13}j_n} \dot{N}_{1s}(1, n, 0). \end{aligned}$$

Начально-краевую задачу относительно функций  $u_c(r, n, t), W_s(r, n, t), \chi_s(r, n, t)$  решаем методом КИП. Введём на сегменте  $[0, 1]$  вырожденное КИП с неизвестными компонентами  $K_1(\lambda_{in}, r), K_2(\lambda_{in}, r), K_3(\lambda_{in}, r)$  вектор-функции ядра преобразования:

$$\begin{aligned} G(\lambda_{in}, n, t) &= \int_0^1 [u_c(r, n, t)K_1(\lambda_{in}, r) + W_s(r, n, t)K_2(\lambda_{in}, r)] r dr, \\ u_c(r, n, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t)K_1(\lambda_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2}, \\ W_s(r, n, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t)K_2(\lambda_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2}, \\ \chi_s(r, n, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t)K_3(\lambda_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2}, \\ \|K_{in}\|^2 &= \int_0^1 [K_1^2(\lambda_{in}, r) + K_2^2(\lambda_{in}, r)] r dr, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\lambda_{in}$  — положительные параметры, образующие счётное множество,  $i = 1, 2, \dots$

В результате использования структурного алгоритма метода КИП [4] получаем расчётные соотношения для трансформанты нагрузки  $G(\lambda_{in}, n, t)$ , вектор-функции ядра преобразования  $K_1(\lambda_{in}, r)$ ,  $K_2(\lambda_{in}, r)$ ,  $K_3(\lambda_{in}, r)$  и трансцендентное уравнение для определения  $\lambda_{in}$ . Данные равенства приведены в работе [5].

Применяя к трансформанте  $G(\lambda_{in}, n, t)$  последовательно формулы обращения (10), а затем формулы конечных преобразований Фурье, получаем с учётом (5), (9) следующие разложения для  $U(r, z, t)$ ,  $W(r, z, t)$ ,  $\phi(r, z, t)$ :

$$U(r, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n^{-1} \cos j_n z \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K_1(\lambda_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2},$$

$$W(r, z, t) = (1 - 2z/L)W_1(t) + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin j_n z \left[ \frac{C_{11}}{C_{13}j_n} N_{1s} + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K_2(\lambda_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2} \right], \quad (11)$$

$$\phi(r, z, t) = (1 - 2z/L) \phi_1(r, t) + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin j_n z \left[ (r - 1)N_{3s} + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K_3(\lambda_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2} \right],$$

где  $\Omega_n = \begin{cases} L, & n = 0; \\ L/2, & n \neq 0. \end{cases}$

**3. Определение разности потенциалов между электродированными поверхностями.** Первоначально рассмотрим вариант подключения пьезокерамического образца к измерительному прибору с большим входным сопротивлением. Докажем, что при определении разности потенциалов между электродированными торцевыми поверхностями цилиндра  $V(t)$  вместо точного краевого условия [2]

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 D_z|_{z=L} r dr = 0 \quad (12)$$

можно пользоваться приближёнными соотношениями

$$D_z|_{z=L} = -\frac{C_{11}\epsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{e_{31}}{e_{33}} \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad (13)$$

$$V(t) = 4\pi^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \phi_1(r, t) r dr d\theta. \quad (14)$$

Подстановка  $\phi(r, z, t)$  из (11) в (12) при использовании соотношения  $\phi_1(r, t) = V(t)/2$  и нулевых начальных условий, а также в равенства (13), (14) позволяет получить в обоих случаях одно и то же уравнение:

$$V(t) = 2 \int_0^1 \left[ \frac{\partial \chi}{\partial z} - \frac{e_{33}^2 L}{C_{11}\epsilon_{33}} \left( \frac{e_{31}}{e_{33}} \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right]_{z=L} r dr,$$

что и является необходимым доказательством. Здесь

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} \Big|_{z=L} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} j_n \cos j_n L \left[ (r-1)N_{3s} + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K_3(\lambda_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2} \right].$$

В случае подключения образца к измерительному прибору с электрической проводимостью  $Y^*$  потенциал на электродированной поверхности  $V(t)/2$  определяется по формуле [1]

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 D_z \Big|_{z=L} r dr = Y \frac{V(t)}{2}, \tag{15}$$

где  $Y = Y^* \sqrt{\rho C_{11}} / (4\pi e_{33}^2)$ .

Соотношение (15) с учётом (11) и равенства  $\phi_1(r, t) = V(t)/2$  приводится к следующему интегро-дифференциальному уравнению и начальному условию относительно функции  $V(t)$ :

$$m_1 \frac{dV(t)}{dt} + \frac{Y}{2} V(t) + m_2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_{i0})}{\|K_{i0}\|^2} \int_0^t \left[ R_{1i0} \frac{d^2 V(\tau)}{d\tau^2} + 3R_{2i0} V(\tau) \right] \cos \lambda_{i0}(t - \tau) d\tau = M, \tag{16}$$

$t = 0: V(0) = 0$ . Здесь

$$M = L^{-1} \frac{dW_1(t)}{dt} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{C_{11}\epsilon_{33}}{e_{33}^2} j_n R_{3in} - \frac{e_{31}}{e_{33}} R_{4in} - j_n R_{5in} \right) \frac{dG_{in}}{dt} \|K_{in}\|^{-2} -$$

$$- \frac{e_{31}}{e_{33}} \sum_{i=1}^{\infty} J_1(\lambda_{i0}) \frac{dG_{i0}}{dt} \|K_{i0}\|^{-2} - m_2 \frac{dV(t)}{dt} \Big|_{t=0} \sum_{i=1}^{\infty} J_1(\lambda_{i0}) R_{1i0} \|K_{i0}\|^{-2} \cos \lambda_{i0} t,$$

$$m_1 = \frac{C_{11}\epsilon_{33}}{2Le_{33}^2}, \quad m_2 = e_{31}^2/e_{33}^2, \quad R_{1i0} = \int_0^1 (r^2 - r^3) J_1(\lambda_{i0} r) dr,$$

$$R_{2i0} = \int_0^1 J_1(\lambda_{i0} r) r dr, \quad R_{3in} = \int_0^1 K_3(\lambda_{in}, r) r dr,$$

$$R_{4in} = \int_0^1 \left( r \frac{d}{dr} + 1 \right) K_1(\lambda_{in}, r) dr, \quad R_{5in} = \int_0^1 K_2(\lambda_{in}, r) r dr.$$

В дальнейшем рассмотрим случай, когда частота вынужденных колебаний существенно ниже низшей частоты собственных колебаний ( $\omega_{10}$ ). Это допущение позволяет без большой погрешности для дальнейшего решения из бесконечной суммы ряда, входящей в левой части (16), оставить только первое слагаемое. Тогда, если дважды продифференцировать (16), умножить преобразованное выражение на  $\lambda_{10}^2$  и сложить с исходным равенством (16), получатся следующее дифференциальное уравнение и начальные условия:

$$m_3 \frac{d^3 V(t)}{dt^3} + Y \frac{d^2 V(t)}{dt^2} + m_4 \frac{dV(t)}{dt} + Y \lambda_{10}^2 V(t) = M_H, \tag{17}$$

$$t = 0: \quad V(0) = 0, \quad \left. \frac{dV(t)}{dt} \right|_{t=0} = m_1^{-1} M \Big|_{t=0}, \quad \left. \frac{d^2V(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = P \Big|_{t=0},$$

где

$$m_3 = 2 \left[ m_1 + m_2 \frac{J_1(\lambda_{10})}{\|K_{10}\|^2} R_{110} \right], \quad m_4 = 2 \left[ m_1 \lambda_{10}^2 + 3m_2 \frac{e_{31} J_1(\lambda_{10})}{e_{33} \|K_{10}\|^2} R_{210} \right],$$

$$M_H = 2 \left[ \frac{d^2M}{dt^2} + \lambda_{10}^2 M \right], \quad P \Big|_{t=0} = m_3^{-1} \left[ \left. \frac{dM}{dt} \right|_{t=0} - m_1 \frac{Y}{2} M \Big|_{t=0} \right].$$

Общий интеграл уравнения (17) имеет вид

$$V(t) = m_5 \left[ B_1 \exp(\beta_1 t) + \exp(\eta t) (B_2 \sin(\psi t) - B_1 \cos(\psi t)) + m_3^{-1} V_1(t) \right].$$

Здесь  $B_1 = P \Big|_{t=0} - 2M \Big|_{t=0} \eta$ ,  $B_2 = P \Big|_{t=0} (\eta - \beta_1) + M \Big|_{t=0} (\beta_1^2 - \eta^2 + \psi^2)$ ,

$$V_1(t) = \int_0^t \exp[\beta_1(t - \tau)] M_H(\tau) d\tau -$$

$$- \int_0^t M_H(\tau) \exp[\eta(t - \tau)] \left\{ \cos[\psi(t - \tau)] - \psi^{-1} (\eta - \beta_1) \sin[\psi(t - \tau)] \right\} d\tau,$$

$m_5 = [(\beta_1 - \eta)^2 + \psi^2]^{-1}$ ,  $\beta_1$  — действительный корень, а  $\eta$ ,  $\psi$  — соответственно действительная и мнимая части комплексно-сопряженных корней  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  следующего алгебраического уравнения:

$$m_3 \beta^3 + Y \beta^2 + m_4 \beta + Y \lambda_{10}^2 = 0.$$

**4. Численный анализ результатов.** Рассмотрим сплошной пьезокерамический цилиндр ( $L = 1$ ) состава ЦТС-19 [1], у которого вертикальные перемещения торцевых поверхностей изменяются по гармоническому закону с частотой  $\theta$  и амплитудой  $W_0$ :

$$W_1(t) = W_0 \sin(\theta t).$$

Влияние электрической проводимости  $Y$  на разность потенциалов  $V(t)$  при различной частоте вынужденных колебаний показано на рис. 1, 2. Расчёты проводились для случаев, когда  $\theta$  равна  $0,1\lambda_{10}$ ,  $0,4\lambda_{10}$ . Цифрами 1–3 обозначены результаты для параметра  $Y$ , равного соответственно 1; 0,5; 0, а штриховая линия определяет характер изменения по времени внешней нагрузки  $W_1(t)$ .

В рассматриваемом диапазоне изменения вынужденных колебаний на первом этапе деформирования цилиндра уменьшение электрической проводимости  $Y$  приводит к росту амплитудных значений разности потенциалов  $V(t)$ . Причём данная закономерность выполняется и в дальнейшем, когда  $\theta = 0,1\lambda_{10}$ . В случае  $\theta = 0,4\lambda_{10}$  вследствие наложения волн деформирования данная картина нарушается.

Осциллограммы изменения нормальных механических напряжений  $\sigma_{zz}(0,0,t)$  во времени в результате действия кинематической нагрузки  $W(t)$  при  $\theta = 0,1\lambda_{10}$  приведены на рис. 3. Сплошной линией обозначен вариант подключения пьезообразца к измерительному прибору с большим входным электрическим сопротивлением  $Y = 0$ , а пунктирной — когда  $Y = 1$ .

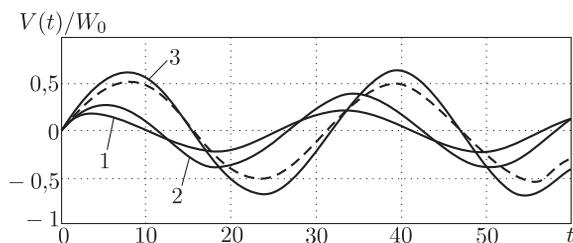


Рис. 1. Влияние электрической проводимости измерительного прибора на разность потенциалов  $V(t)$  во времени при  $\theta = 0,1\lambda_{10}$ :  
 1 —  $Y = 1$ , 2 —  $Y = 0,5$ , 3 —  $Y = 0$

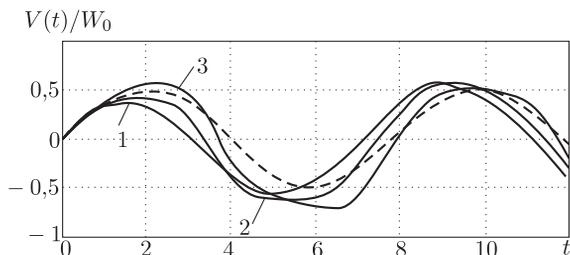


Рис. 2. Влияние электрической проводимости измерительного прибора на разность потенциалов  $V(t)$  во времени при  $\theta = 0,4\lambda_{10}$ :  
 1 —  $Y = 1$ , 2 —  $Y = 0,5$ , 3 —  $Y = 0$

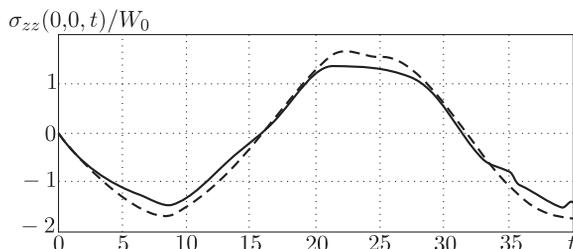


Рис. 3. Изменение механических напряжений  $\sigma_{zz}(0,0,t)$  во времени при  $\theta = 0,1\lambda_{10}$ : сплошная линия —  $Y = 0$ , пунктирная —  $Y = 1$

Расчёты показывают, что свободные электрические заряды, генерируемые на торцевых поверхностях пьезокерамического цилиндра, влияние которых учитывается в случае  $Y = 1$ , приводят к «ужесточению» материала. В результате для создания одинаковых амплитудных перемещений  $W_0$  при  $Y = 1$  необходимо приложить нагрузку, на 15–20 % большую, чем когда  $Y = 0$ .

В заключение следует отметить, что построенное в настоящей работе решение можно использовать и при исследовании нестационарных осесимметричных задач обратного пьезоэффекта. Для этого в расчётных соотношениях (11) необходимо принять  $W_1(t) = 0$ ,  $\phi_1(r, t) = V(t)/2$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга, Механика связанных полей в элементах конструкций / Электроупругость. Т. 5. Киев: Наукова Думка, 1989. 279 с. [V. T. Grinchenko, A. F. Ulitko, N. A. Shulga, Mechanics of Coupled Fields in Structural

- Elements / Electroelasticity. Vol. 5. Kiev: Naukova Dumka, 1989. 279 pp.]
2. Н. А. Шульга, А. М. Болкисев, Колебания пьезоэлектрических тел. Киев: Наукова Думка, 1990. 228 с. [N. A. Shulga, A. M. Bolkisev, Fluctuations of Piezoelectric Bodies. Kiev: Naukova Dumka, 1990. 228 pp.]
  3. I. N. Sneddon, Fourier transforms: McGraw-Hill, 1951. xii+542 pp.; русск. пер.: И. Н. Снеддон, Преобразования Фурье. М.: Иностран. лит., 1955. 668 с.
  4. Ю. Э. Сеницкий, “Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики” // *Изв. вузов. Матем.*, 1991. №4. С. 57–63; англ. пер.: Yu. E. Senitskii, “A multicomponent generalized finite integral transformation and its application to nonstationary problems in mechanics” // *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1991. Vol. 35, no. 4. Pp. 55–61.
  5. Ю. Э. Сеницкий, Д. А. Шляхин, “Нестационарная осесимметричная задача электроупругости для толстой круглой анизотропной пьезокерамической пластины” // *Изв. Акад. наук. МТТ*, 1999. №1. С. 78–87; англ. пер.: Yu. E. Senitskii, D. A. Shlyakhin, “The Nonstationary Axisymmetric Problem of Electroelasticity for a Thick Circular Anisotropic Piezoceramic Plate” // *Mech. Solids*, 1999. Vol. 34, no. 1. Pp. 66–74.

Поступила в редакцию 22/X/2012;  
в окончательном варианте — 25/I/2013.

MSC: 44A55; 44A15, 35A22

## THE INFLUENCE OF THE CHARACTERISTICS OF THE EXTERNAL CIRCUIT ON THE FORM OF THE ELECTRIC PULSE IN THE TASKS OF DIRECT PIEZOEFFECT

D. A. Shljakhin

Samara State University of Architecture and Civil Engineering,  
194, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443001, Russia.

E-mail: d-612-mit2009@yandex.ru

*The axisymmetric non-stationary problem of electroelasticity for a solid piezoceramic axially polarised cylinder is considered under the kinematic load in the form of well-known mechanical displacements of its face surfaces, as well as the electric potential. The new closed solution is constructed by vector eigenfunction decomposition method in the form of structural algorithm of finite transformations. The obtained calculation relationships allow analyzing the influence of the external circuit characteristics on the form and sizes of the induced electric pulse in nonstationary problems of direct piezoeffect.*

**Key words:** non-stationary problem of direct piezoeffect, piezoceramic cylinder, electric boundary condition.

Original article submitted 22/X/2012;  
revision submitted 25/I/2013.