УДК 51-72:512.54

НЕКОТОРЫЕ УРАВНЕНИЯ НА ОСНОВЕ ОДНОМЕРНЫХ ХАОТИЧЕСКИХ ДИНАМИК

Д. Б. Волов

Самарский государственный университет путей сообщения,
Россия, 443066, Самара, 1-й Безымянный пер., 18.

E-mail: volovdm@mail.ru

На основе одномерных хаотических динамик получены модифицированные уравнения Клейна—Гордона—Фока и найдены их исходные лагранжианы. Введены понятия m-экспоненциального отображения и групп с нарушенной симметрией. Рассмотрена система битриальных ортогональных функций.

Ключевые слова: *одномерные хаотические динамики, уравнения Клейна—Гордона, лагранжиан, экспоненциальное отображение, алгебра, ортонормированные системы.*

При изучении одномерных точечных отображений вида $x_{n+1} \to f(x_n)$ было обнаружено [1], что некоторые динамики демонстрируют особое поведение.

Было показано, что в отличие от одномерного отображения Ферхюльста—Пирла [2] $x_{n+1} \to qx_n(1-x_n)$ и от дискретной модели Рикера [3] $x_{n+1} \to qx_n \exp(-x_n)$, $q \in \mathbb{R}$, бифуркационная диаграмма обобщённой динамики Ферхюльста—Рикера—Планка (ФРП) [1, 4]:

$$x_{n+1} \to \frac{qx_n^{\Phi}}{\exp(x_n)+\alpha}, \quad \alpha, \Phi \in \mathbb{R}$$

наряду с характерными каскадами бифуркаций удвоения периода, окнами периодичности и т.п. обладает рядом новых свойств.

1. При $\Phi = 1$ и при приближении α справа к значению минус 1 хаотическая составляющая динамики ФРП обедняется, а при $\alpha = -1$ исчезает, так что система «очищается» от хаотических раздвоений, оставляя одну-единственную бифуркацию.
2. При $\Phi = -2$ и при приближении α слева к значению $1/137$ у динамики ФРП
$$r_{n+1} \to \frac{2q_1\mu}{r_n^2(e^{\mu r_n}+\alpha)}, \quad r, q_1, \mu \in \mathbb{R} \tag{1}$$
хаотическая составляющая обедняется и возникает характерная картина ограниченных бифуркаций типа четырёх «крысок» [4].

Таким образом, существуют два предельных значения безразмерного параметра: $\alpha = -1$ и $\alpha \approx 1/137$. При приближении к первому значению бифуркационная диаграмма вырождается в две «ветви», а при приближении ко второму имеет конечное число бифуркаций на всей области существования, за исключением строго ограниченного участка с хаотической составляющей.

Дмитрий Борисович Волов (д.т.н., доц.), профессор, каф. физики и экологической теплофизики.

Объединяя два предельных случая, запишем предельное отображение ФРП в виде

$$(\mu x)_{n+1} \to \frac{-2q_1\mu_n^3}{(\mu x)_n^2(e^{(\mu x)_n}+\alpha)}. \tag{2}$$

При постоянном x и $\alpha = -1$ получаем первую предельную динамику, а при постоянном μ и $\alpha \approx 1/137$ — вторую. Сейчас предпринимаются попытки использовать свойства отображения (2) при моделировании атомных ядер с потенциалом Вудса—Саксона [5] и при моделировании полей различной природы [6].

Далее мы задались вопросом: если замена

$$\exp(-x) \to \frac{1}{\exp(x)+\alpha}$$

в функциональных зависимостях так существенно влияет на поведение хаотической системы, то к каким изменениям в дифференциальных уравнениях движения приводит эта замена?

В качестве примера рассмотрим операцию замены в потенциале Юкавы

$$\varphi = -\frac{\mathrm{const}\cdot e^{-\mu r}}{r}.$$

Этот потенциал, как известно, является стационарным решением уравнения, аналогичного уравнению Клейна—Гордона, и приближённо описывает поведение поля остаточных сил сильного взаимодействия в стационарном сферически симметричном случае [7].

Показано, что уравнению, решением которого в осесимметричном стационарном случае является модифицированный потенциал Юкавы

$$\varphi = -\frac{\mathrm{const}}{r(e^{\mu r}+\alpha)}, \tag{3}$$

а частным волновым решением

$$\psi = \frac{\psi_0}{e^{i\mu z}+\alpha}, \tag{4}$$

соответствует система линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$((1+\alpha e^{-\mu x})\Box + 2\mu^k\partial_k + \mu^2)\varphi_i = 0, \tag{5}$$

где в экспоненте под μx понимается скалярное произведение 4-векторов с компонентами μ_k и x_k, используется правило Эйнштейна суммирования по повторяющемуся индексу, $\Box$ — даламбертиан, φ_i — многокомпонентное поле, z в (4) — выделенное направление распространения волны.

Уравнения (5) восстановлены по известному решению. Для построения (5) мы дважды продифференцировали выражение (4) по z, из первой и второй производных составили такое одномерное уравнение с переменной z, чтобы его решением являлось (4):

$$\big((1+\alpha e^{-i\mu z})\partial_z^2 + 2i\mu\cdot\partial_z - \mu^2\big)\psi = 0,$$

и далее, обобщая последнее уравнение для любого 4-вектора μ_k (как собственного волнового вектора) и многокомпонентного поля φ_i, получили (5). Здесь $\mu^2 = (mc/\hbar)^2$, c — скорость света, $\hbar$ — редуцированная постоянная Планка, m — масса.

Волновое решение получается из (5) при замене в уравнениях $\mu \to i\mu$. Поскольку решения (5) при $\alpha = 0$ есть часть решений уравнения Клейна—Гордона—Фока (КГФ) с положительной экспонентой, мы назвали уравнения системы (5) модифицированными уравнениями Клейна—Гордона—Фока (m-КГФ). Вторая, сопряжённая часть решений КГФ с отрицательной экспонентой соответствует решениям m-КГФ (5) с заменой в уравнениях $\mu \to -\mu$.

При этом важно, что стационарное уравнение m-КГФ в сферических координатах для выполнения условия (3) требует наличия источника поля в правой части:

$$(1 + \alpha e^{-\mu r})\frac{\partial^2 (r\varphi)}{r\partial r^2} + 2\mu\frac{\partial (r^2\varphi)}{r^2\partial r} + \mu^2\varphi = \frac{2q_1\mu}{r^2(e^{\mu r} + \alpha)},$$

который, что удивительно, и появляется в предельном отображении ФРП в формуле (1).

Мы имеем дело со случаем, когда по известным частным решениям, интересным для нас в силу особенностей упорядочивания хаотических динамик, восстановлен вид самих уравнений m-КГФ (5). Уравнения m-КГФ расширяют класс уравнений КГФ путем добавления безразмерного параметра α, разрушающего симметрию экспоненциального представления.

В связи с этим было обращено внимание на свойства функции

$$m\exp(\mu x) = \frac{\text{const}}{e^{-\mu x} + \alpha}, \quad \mu \in \mathbb{C},\ \mu \in H,$$

названной битриальной экспонентой [6]. Термин «битриальный» (от «би» (2) к «три» (3)) появился в более ранних работах по формальной логике при переходе от классической логики (с значениями высказываний «да» (1), «нет» (0)) к расширенной, основанной на трёх чётких значениях: «да» (1), «нет» (−1) как противоположность «да» (1) и «отсутствие» (0). Именно с помощью битриальной логики было осуществлено обобщение динамики Ферхюльста на динамику ФРП. Поскольку битриальная экспонента, в отличие от обычной, ограничена на всей области определения, была высказана гипотеза о том, что разработать новые методы регуляризации в решениях задач, где для обобщённых функций используются Фурье-преобразование, двустороннее преобразование Лапласа, другие интегральные преобразования, калибровочные преобразования для функций поля, где имеются расходящиеся пропагаторы, координаты Крускала и т.д., можно путём замены экспоненты в соответствующих функциональных зависимостях битриальной экспонентой

$$e^{\mu x} \to \frac{1}{e^{-\mu x} + \alpha}$$

и последующим устремлением α к 0.

По найденному виду уравнений (5) мы задались целью восстановить лагранжианы, из которых эти уравнения получаются.

Оказалось, что лагранжиан к уравнениям (5) даже в одномерном случае не существует (по этому поводу есть специальная теорема [6]). Зато существует лагранжиан вида

$$\mathcal{L} = (\alpha + e^{\pm\mu x})\partial_n U_i \, \partial^n U_i^* - \mu^2 U_i U_i^* e^{\pm\mu x}$$

к схожим с (5) уравнениям движения

$$(1 + \alpha e^{\mp\mu x})\Box U_i \pm \mu^n \partial_n U_i + \mu^2 U_i = 0.$$

Отсутствие коэффициента «2» перед вторым членом последнего уравнения принципиальным образом сказывается на возможности построения лагранжиана. Однако устранить данную трудность удалось, записав (5) с источником справа:

$$(1 + \alpha e^{\mp\mu x})\Box G_i \pm \mu^n \partial_n G_i + \mu^2 G_i = \mp\mu^n \partial_n G_i$$

и с учётом существования лагранжиана сугубо для левой части этого уравнения. Здесь U, G — некоторые комплексные поля.

Сказанное выше дало основание предположить, что уравнение m-КГФ описывает самодействующую систему «поле – источник поля», не выделяя источник поля и свободное поле по отдельности, как это делается в теории возмущений, в квантовой теории поля. Пропагатор G к уравнению m-КГФ тогда и есть собственная битриальная экспоненциальная функция однородного уравнения (5).

Условимся использовать символ «m» в названиях функций, для которых проведена замена по схеме $e^\theta \to \left(e^{-\theta} + \alpha\right)^{-1}$, обозначая $\forall f(x)$,

$$mf(x) \equiv \left(\frac{1}{x^{-1} + \alpha}\right).$$

Будем, например, обозначать функцию $\left(e^{-i\theta} + \alpha\right)^{-1}$ (где θ — число, угол) как $me^{i\theta}$. Такая замена в [6] называется битриальной. Символ «m» здесь и далее будет ставиться и перед другими модифицированными по данной схеме объектами и математическими определениями.

В дальнейшем целесообразно ввести понятие групп с нарушенной симметрией $G(\alpha)$ и выделить в них класс специальных унитарных групп $SU(n, \alpha)$. Построение таких групп начнем с построения новой групповой алгебры и рассмотрения группы $U(1)$.

Комплексные числа g и g_1, по модулю равные единице, могут быть представлены как $g = e^{i\theta}$, $g_1 = e^{i\theta_1}$, а могут — как $g = \left(e^{-i\theta'} + \alpha\right)^{-1}$, $g_1 = \left(e^{-i\theta'_1} + \alpha\right)^{-1}$, так что произведение g и g_1 даёт третий элемент g_2 той же группы. Но этот третий элемент — тоже элемент группы $U(1)$. Элемент g_2 группы $U(1)$ в вещественной алгебре представлен как

$$gg_1 = g_2 = e^{i(\theta+\theta_1)},$$

а в новой алгебре этот же элемент g_2 группы $U(1)$ мы определим как

$$gg_1 = g_2 = me^{i(\theta' \oplus \theta'_1)},$$

где под $\oplus$ будем подразумевать такую операцию сложения, что выполняется тождество:

$$gg_1 = me^{i\theta'}me^{i\theta'_1} = me^{i(\theta'\oplus\theta'_1)} = \Big(\frac{1}{e^{-i\theta'}+\alpha}\Big)\Big(\frac{1}{e^{-i\theta'_1}+\alpha}\Big) = \\ = \frac{1}{e^{-i(\theta'+\theta'_1)}+\alpha(e^{-i\theta'}+e^{-i\theta'_1})+\alpha^2}. \quad (6)$$

Итак, мы вводим новую алгебру $\{\boldsymbol{\theta'},\oplus\}$ в пространстве параметров $\boldsymbol{\theta'} \equiv \{\theta'\} \subset \mathbb{R}$, определив с точностью до постоянной величины бинарную операцию (6), удовлетворяющую следующим аксиомам:

1) в группе $U(1)$ существует единичный элемент g_0, для которого

$$\theta'_0 = i\ln(1-\alpha);$$

2) для каждого элемента g группы $U(1)$ существует обратный g^{-1} с соотношением

$$(\theta')^{-1} = i\ln\Big(\frac{1-\alpha e^{-\theta'}-\alpha^2}{e^{-\theta'}+\alpha}\Big);$$

3) операция умножения элементов группы $U(1)$ ассоциативна:

$$g(g_1g_2) = (gg_1)g_2.$$

Для того чтобы доказать свойства коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности в таком представлении, обратимся к графику функции $\varphi' = \big(e^{-i\theta'}+\alpha\big)^{-1}$ в комплексной плоскости. Он представляет собой окружность с радиусом $(1-\alpha^2)^{-1}$ и центром в точке $-\alpha/(1-\alpha^2)$. Поэтому для более полного сравнения пронормируем функцию φ':

$$\varphi' = \frac{1-\alpha^2}{e^{-i\theta'}+\alpha}.$$

Сначала, на отрезке $[0,\pi/2]$, скорость изменения φ' отстаёт от равномерной скорости вращения по окружности $\varphi_R = (e^{-i\theta}-\alpha)$ с центром в $-\alpha$. Под равномерным вращением здесь понимается последовательное применение операции сложения на одну и ту же величину изменения угла на каждом шаге. На $[\pi/2,\pi]$ функция φ' навёрстывает упущенное, так что в точку $\theta=\pi$ φ' и φ_R приходят вместе. Вследствие непрерывности и монотонности изменения параметров θ' и θ внутри промежутка $[0,\pi]$ всегда найдётся такое θ, которое однозначно соответствует θ' из промежутка $[0,\pi]$. Затем на $[\pi,3\pi/2]$ битриальная экспонента φ' опережает равномерное движение по окружности φ_R, а на оставшемся участке отстаёт от неё, так что к $\theta=2\pi$ они приходят одновременно. Вследствие непрерывности и монотонности изменения параметров θ' и θ внутри промежутка $[\pi,2\pi]$ всегда найдётся такое θ, которое однозначно соответствует θ' из промежутка $[\pi,2\pi]$. Таким образом, вращение по φ' неравномерно. В среднем на участке $[0,2\pi]$ получается одинаковый результат при рассмотрении в том и другом отображении. Будем их различать внутри $[0,2\pi]$, называя экспоненциальным и m-экспоненциальным отображениями.

Между углом θ, измеряемом в системе координат φ_R, и углом θ', измеряемом в системе координат φ', на отрезке $[0, 2\pi]$ существует однозначное соответствие

$$\theta = i\ln\Big(\frac{1+\alpha e^{i\theta'}}{e^{i\theta'}+\alpha}\Big). \tag{7}$$

Кроме трансляции центра окружности в общем случае должно быть рассмотрено вращение центра группы, учитываемое путём добавления фазы θ_W в (7). Это важно для калибровочных преобразований полей с нарушенной симметрией, а в данной работе они не рассматриваются.

Определяя операцию сложения $\theta' \oplus \theta'_1$ в m-экспоненциальном отображении, мы тем самым задаём групповую алгебру, в данном случае для $U(1)$, отличную от алгебры вещественных чисел с операцией $\theta + \theta_1$ в экспоненциальном отображении $e^{i\theta}$ элементов g группы, в данном случае комплексных чисел, по модулю равных единице. Таким образом, для элементов одной и той же группы $U(1)$ задаются две разные алгебры с разной бинарной операцией, отличающиеся видом отображения.

Все сказанное по m-отображению для группы $U(1)$ можно распространить на произвольную группу, допускающую экспоненциальное отображение $e^{\sum_i T_i\theta_i}$, и сформулировать следующую теорему.

Теорема. *Любая группа G, имеющая экспоненциальное отображение $e^{\sum_i T_i\theta_i}$ с генераторами T_i и параметрами $\boldsymbol{\theta} \equiv \{\theta\}$, допускает изоморфное m-экспоненциальное отображение $\big(e^{\sum_i T_i\theta'_i}+\alpha\big)^{-1}$ с теми же генераторами T_i и m-алгеброй $\{\boldsymbol{\theta'}, \oplus\}$ над параметрами $\boldsymbol{\theta'}$, где α имеет тот же ранг, что и G, $|\alpha| > 0$.*

После краткого описания m-алгебры введём понятие группы с нарушенной симметрией, опять же на примере исходной группы $U(1)$. Группой $U(1,\alpha)$ с нарушенной симметрией будем называть такую мультипликативную абелеву группу всех комплексных чисел, равных по модулю единице, каждый элемент которой получен равномерным последовательным применением операции сложения к инфинитезимальной величине угла $\Delta\theta'$ в m-алгебре. Другими словами, группой $U(1,\alpha)$ называется группа, полученная равномерным вращением элементов m-алгебры с постоянной угловой скоростью $\omega' = d\theta'/dt = \Delta\theta'/\Delta t = \text{const}$. В комплексной плоскости при этом наблюдается неравномерное вращение элементов группы. Каждый элемент $g = \big(e^{-i\theta'}+\alpha\big)^{-1}$ группы $U(1,\alpha)$ является элементом $g = e^{i\theta}$ группы $U(1)$, и между элементами этих групп существует однозначная связь:

$$\theta = \theta' + i\ln\Big(\frac{1+\alpha e^{i\theta'}}{1+\alpha e^{-i\theta'}}\Big), \quad \theta' = \theta + i\ln\Big(\frac{1-\alpha e^{i\theta}}{1-\alpha e^{-i\theta}}\Big).$$

Поэтому алгебраическую операцию (6) правомерно записать в виде

$$\theta'_1 \oplus \theta'_2 = (\theta_1+\theta_2) + i\ln\Big(\frac{1-\alpha e^{i(\theta_1+\theta_2)}}{1-\alpha e^{-i(\theta_1+\theta_2)}}\Big).$$

При достаточно большой частоте вращения $\omega = d\theta/dt$ различие в алгебрах и неравномерность вращения в группах $U(1,\alpha)$ и $U(1)$ незаметны. Все элементы группы $U(1,\alpha)$ являются элементами группы $U(1)$, полученной путём трансляции центра группы в комплексной плоскости. Отличие $U(1,\alpha)$ от $U(1)$ состоит в неравномерном вращении этих элементов группы внутри отрезка $[0,2\pi]$.

Итак, получаем абелеву компактную группу $U(1,\alpha)$, изоморфную $U(1)$ с трансляцией и неравномерным вращением. Для неё операция умножения (6) элементов g называется сложением элементов θ', а единичный элемент θ'_0 называется нулём. Пользуясь правилом сложения для этой группы, определяют такие тригонометрические функции, как битриальный косинус, синус:

$$m\cos\theta = \alpha + \frac{1-\alpha^2}{2}\Big(\frac{1}{e^{-i\theta}+\alpha} + \frac{1}{e^{i\theta}+\alpha}\Big),$$
$$m\sin\theta = \frac{1-\alpha^2}{2i}\Big(\frac{1}{e^{-i\theta}+\alpha} - \frac{1}{e^{i\theta}+\alpha}\Big),$$

битриальный логарифм

$$m\ln\theta = \ln\Big(\frac{\theta}{1+\alpha\theta}\Big),$$

гиперболические функции и т.д. Причём весь арсенал известных соотношений между этими функциями сохраняется, если для них задана операция сложения $\oplus$.

Далее рекурсивной процедурой Кели—Диксона понятие группы с нарушенной симметрией $U(1,\alpha)$, введённой для комплексных чисел, распространяется на случай кватернионов (изоморфно $SU(2,\alpha)$), октонионов и седенионов. Здесь важно отметить, что с практической точки зрения наибольший интерес представляют как раз группы со скалярным произведением с $\theta = \mu x$. Например,

$$\theta = \mu_0 x^0 + \mu_1 x^1 + \mu_2 x^2 + \mu_3 x^3 = \omega t - \mathbf{kr},$$

где $\mathbf{k}$ — волновой вектор, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор.

Если матрицы, реализующие группу $SU(2,\alpha)$, параметризовать в m-виде

$$m\exp\Big(i\frac{\theta'}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\Big) = m\cos\frac{\theta'}{2} + m\sin\frac{\theta'}{2},$$

где $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ — матрицы Паули, $\mathbf{n}$ — вещественный единичный трёхкомпонентный вектор, то при малых преобразованиях группы $SU(2,\alpha)$ (элементов из группы $O(3)$) $\mathbf{n}$ опять же указывает направление оси вращения, а θ' — угол поворота. Те же рассуждения, что приведены для $U(1,\alpha)$ и $SU(2,\alpha)$, можно повторить для любой $SU(n,\alpha)$.

В m-представлении произвольные источники поля в уравнениях движения (5) раскладываются с применением тригонометрических многочленов

$$\varphi_n = m\exp(i\theta,n) = \Big(\frac{1-\alpha^2}{e^{-i\theta}+\alpha}\Big)^n, \quad n\in\mathbb{Z},$$

получаемых из $U(1,\alpha)$ как прямое произведение групп. Возникающие при этом бесконечные ряды m-Фурье с коэффициентами m-Фурье любой функции $f(\theta)$ на $[0,2\pi]$:

$$a_n = \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(\theta) m \exp^*(i\theta, n) d\theta =$$
$$= \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(\theta) \Big(\frac{1-\alpha^2}{e^{i\theta}+\alpha}\Big)^n d\theta, \quad n \in \mathbb{Z},$$

эквивалентны рядам Фурье при $\alpha = 0$ (звёздочка — сопряжение функций).

Есть некоторые особенности представления сопряжения. Дело в том, что при следующем сопряжении битриальные функции неортогональны в обычном понимании этого слова: для φ_n и сопряжённой ей φ_m^* на отрезке $[0, 2\pi]$ действительно выполняется тождество

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n \varphi_m^* d\theta = \int_0^{2\pi} \Big(\frac{1-\alpha^2}{e^{-i\theta}+\alpha}\Big)^n \Big(\frac{1-\alpha^2}{e^{-i\theta}+\alpha}\Big)^{-m} d\theta = \begin{cases} 2\pi, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$$

за исключением случая

$$\int_0^{2\pi} \Big(\frac{1-\alpha^2}{e^{-i\theta}+\alpha}\Big)^n \Big(\frac{1-\alpha^2}{e^{-i\theta}+\alpha}\Big)^{-m} d\theta = \frac{2\pi\alpha}{1-\alpha^2}, \quad m = n+1.$$

Естественно, при $\alpha = 0$ система

$$\Big\{\sqrt{\frac{1-\alpha^2}{2\pi}} m e^{in\theta} \mid n \in \mathbb{Z}\Big\}$$

становится обычной ортонормированной системой Фурье, обладающей полнотой. Полнота же представления при $\alpha \neq 0$ доказывается проведением в ряде Лорана $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$ замены $z \to e^{i\theta}$, $a \to -\alpha$.

Если же поставить в соответствие φ_n сопряжённую функцию в виде

$$\varphi_m^* = m \exp(-i\theta, m) = \Big(\frac{1-\alpha^2}{e^{i\theta}+\alpha}\Big)^m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

то, вычисляя интеграл Пуассона, нетрудно показать, что такая система образует базис безо всяких исключений для $m \neq n$.

Таким образом, на основе хаотических динамик с особым поведением установлен вид исходных уравнений движения, решениями которого эти динамики являются. По найденным уравнениям движения восстановлены их лагранжианы. Введены понятия m-алгебры и группы с нарушенной симметрией. Показано, что источники поля имеют разложение в ряд m-Фурье, являющийся обобщением ряда Фурье для системы с нарушенной симметрией. Данные исследования могут оказаться полезными в квантовой теории поля.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Д. Б. Волов*, “Обобщенная динамика Ферхюльста—Рикера—Планка и её связь с постоянной тонкой структуры” // *Вестн. транспорта Поволжья*, 2011. №5(29). С. 82–90. [*D. B. Volov*, “Generalized Verhulst–Ricker-Planck dynamic and its relation to the fine-structure constant” // *Vestn. Transporta Povolzh’ya*, 2011. no. 5(29). Pp. 82–90].
2. *P.-F. Verhulst*, “Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement” // *Corresp. Math. Phys.*, 1838. Vol. 10. Pp. 113–121.

3. *W. E. Ricker*, “Stock and recruitment” // *J. Fish. Res. Bd. Canada*, 1954. Vol. 11, no. 5. Pp. 539–623.
4. *D. B. Volov*, Specific behavior of one chaotic dynamics near the fine-structure constant, 2012. 9 pp., arXiv: 1205.6091 [nlin.PS].
5. *A. P. Trunev*, “Binding energy bifurcation and chaos in atomic nuclei” // *Chaos and Correlation*, 2012. 10 pp. (`http://chaosandcorrelation.org/Chaos/CR_1_5_2012.pdf`)
6. *Д. Б. Волов*, “Битриальный подход к теории поля” // *Вестн. СамГУПС*, 2012. № 15. С. 144–153. [*D. B. Volov*, “The bitrial approach to the field theory” // *Vestn. SamGUPS*, 2012. no. 15. Pp. 144–153].
7. *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков*, Введение в теорию квантовых полей. М.: Наука, 1984. 597 с. [*N. N. Bogolyubov, D. V. Shirkov*, Introduction to the Theory of Quantized Fields. Moscow: Nauka, 1984. 597 pp.]

Поступила в редакцию 15/XI/2012;
в окончательном варианте — 13/II/2013.

MSC: 37J15; 03C05, 37D45

EQUATION ON THE BASIS OF ONE-DIMENSIONAL CHAOTIC DYNAMICS

D. B. Volov

Samara State Transport University,
18, First Bezimyanniy per., Samara, 443066, Russia.

E-mail: `volovdm@mail.ru`

Modified Klein–Gordon–Fock equations were obtained on the basis of one-dimensional chaotic dynamics and the original Lagrangians were found. The concepts of m-exponential map and groups with broken symmetry are introduced. A system of bitrial orthogonal functions is considered.

Key words: *one-dimensional chaotic dynamics, Klein–Gordon equation, Lagrangian, exponential map, algebra, orthonormal systems.*

Original article submitted 15/XI/2012;
revision submitted 13/II/2013.

Dmitry B. Volov (Dr. Sci. (Techn.)), Professor, Dept. of Physics and Ecological Thermophysics.