УДК 519.866:303.72

УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ДЛЯ ЗАМКНУТЫХ ФРАКТАЛЬНО-КЛАСТЕРНЫХ РЕСУРСНЫХ МОДЕЛЕЙ

В. Т. Волов, А. П. Зубарев

Самарский государственный университет путей сообщения,
Россия, 443066, Самара, 1-й Безымянный пер., 18.

E-mails: vtvolov@mail.ru, apzubarev@mail.ru

Предложен сценарий эволюции распределения ресурсов в фрактально-кластерных ресурсораспределённых системах типа «организм». В предложенной модели динамика перераспределения ресурсов в замкнутой системе определяется ультраметрической структурой пространства системы. При этом для каждого кластера существует своё характерное время перехода в равновесное состояние, определяемое ультраметрическим размером данного кластера. Записано общее уравнение, описывающее данную динамику, численно исследовано решение данного уравнения для определённого типа переходов ресурсов между кластерами, обсуждена проблема идентификации параметров модели применительно к реальным системам.

Ключевые слова: *иерархические структуры, ультраметрика, фрактально-кластерные модели, математическое моделирование, социально-экономические системы, распределение ресурсов.*

Введение. Развитие математического аппарата для моделирования систем, обладающих явной или скрытой иерархическиой структурой, является важным для изучения большого класса систем и процессов в различных областях физики, биологии, экономики и социологии: спиновые стекла, биополимеры, фрактальные структуры, теория оптимизации, таксономия, эволюционная биология, кластерный и факторный анализ и другие [1, 2].

Практически любая биологическая либо социально-экономическая система имеет явный иерархический характер взаимодействия (влияния) между ее подсистемами и тем самым несет в себе элементы иерархической структуры. Если пространство исходных объектов либо состояний системы имеет иерархическую структуру, то такая структура является явной. Однако гораздо больший интерес для изучения представляют системы, в которых иерархическая структура является скрытой, т.е не прослеживается в исходных переменных, а проявляется только при переходе к некоторым эффективным переменным (число которых, как правило, значительно меньше числа степеней свободы всей системы), через которые выражаются отдельные наблюдаемые характеристики системы. Хорошо известным представителем таких систем являются спиновые стекла [3], белки [4–6]. Имеются основания для идентификации подобных иерархических структур среди социально-экономических систем [7–9]. Адекватным математическим аппаратом моделирования систем как с явными, так и со скрытыми иерархическими структурами является ультраметрический анализ [2, 10–13].

Одним из интересных фактов, установленных по результатам эмпириче-

Вячеслав Теодорович Волов (д.ф.-м.н., проф.), заведующий кафедрой, каф. физики и экологической теплофизики. *Александр Петрович Зубарев* (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. физики и экологической теплофизики.

ских исследований достаточно широкого класса сложных систем как естественного, так и искусственного происхождения является выявление определенного типа систем, в которых имеется выраженная иерархия в распределении ее ресурсов по функциональному признаку (см. [14, 15] и ссылки там же). В данном контексте термин «ресурс» имеет обобщенное содержание и под ним понимается некоторый экстенсивный параметр сложной системы, релевантный для описания ее существенных характеристик и необходимый для ее существования в рассматриваемом качестве. Установлено, что в ряде систем (биологических, технологических, социальных), прошедших достаточно долгий процесс эволюции и находящихся в состоянии устойчивого функционирования, имеется пять основных подсистем (кластеров), которые можно проклассифицировать в соответствии с их целевыми функциями: энергетический, транспортный, технологический, экологический и информационный кластеры, каждый из которых обладает определенной долей «ресурса». Для подобных систем в был введен специальный термин — «*организмы*». Для социально-экономических систем, относящихся к классу «организмов», которые, в первую очередь, представляют интерес для рассмотрения в данной статье, кластеры могут идентифицироваться по целевому распределению таких экстенсивных параметров, как кадры, производственные фонды, финансовые активы и т.п.

Для ряда систем, относящихся к классу «организмов», каждый кластер может представлять собой функционирующую подсистему, также являющуюся «организмом». Следовательно, его можно разбить на пять подсистем (подкластеров), опять же в соответствии с целевыми функциями каждой подподсистемы внутри каждой подсистемы. Например, в самом энергетическом кластере ресурсы могут быть разделены на ресурсы для энергетической поддержки самой энергетической системы, энергетической поддержки транспортной, экологической, технологической и информационной составляющих. Подобные системы получили название *фрактально-кластерных* систем (см. [14,15]). Каждый из подкластеров фрактально-кластерной системы также может быть разбит на пять подподкластеров высшего уровня и так далее. Таким образом, пространство распределения ресурсов подобных систем имеет иерархическую структуру, которая может быть описана иерархическим деревом с фиксированным числом ветвлений $p = 5$. Следует иметь в виду, что идентификация подкластеров в конкретной фрактально-кластерной системе зависит от типа «ресурса», который не всегда имеет явное отношение к наблюдаемым характеристикам системы. При фрактально-кластерном моделировании реальных социально-экономических, а также биологических, технологических и антропогенных систем подобного типа оказывается возможным явно идентифицировать лишь два либо три иерархических уровня кластеризации. Но даже такая классификация распределения ресурсов позволяет производить оценку функционирования любой реальной сложной системы на предмет эффективности ресурсозатрат и устойчивости. Чисто математически возможно рассмотрение динамики ресурсов в абстрактной системе с бесконечным числом вложенных кластеров.

Статистический анализ эмпирических данных по ресурсораспределению сложных социально-экономических, технологических и биологических систем рассматриваемого типа позволил определить [14,15] идеальные значения распределения ресурсов в кластерах первого уровня, при которых развитие системы (как правило, с неограниченными источниками ресурсов) является устойчивым и наиболее энергетически выгодным. Усредненные оценки данного идеального распределения, установленные в результате статистического анализа данных для систем, прежде всего, антропологический и технологической природы позволили установить усредненные значения идеального распределения, выраженные в долях экстенсивного параметра, которые для энергетического, транспортного, экологического, технологического и информационного соответственно составляют 0,38; 0,27; 0,16; 0,13; 0,06. Для систем другой природы (биологической, социально-экономической) данные идеальные значения могут незначительно отличаться.

Возможность использования фрактально-кластерных моделей для анализа распределенных экономических систем базируется на исследованиях ряда работ (см. ссылки в [14, 15]), в которых предложены методы оптимального управления ресурсораспределенными системами, находящимися вблизи точки идеального распределения, которые базируются на формализованных аналогиях, привлеченных из термодинамического подхода. Тем не менее открытым остается вопрос, каким образом подобная система, будучи выведенной из состояния равновесия (идеального состояния), вновь его достигает. В данной работе мы предлагаем сценарий эволюции замкнутых фрактально-кластерных систем (в которых полный ресурс данного типа постоянен) из произвольного состояния в идеальное равновесное состояние. Мы постулируем, что динамика перераспределения ресурсов в замкнутой системе в отсутствие внешних управляющих факторов определяется полностью ультраметрической структурой фрактально-кластерного пространства, по которому распределен данный ресурс. А именно, для каждого кластера существует свое характерное время перехода в идеальное подсостояние (характеризующееся идеальным относительным распределением ресурсов в подкластерах), и это характерное время определяется ультраметрическим размером данного кластера. При этом сначала в идеальные подсостояния переходят подкластеры наивысших уровней, затем подкластеры уровнем ниже (которые образованы подкластерами высшего уровня) и так далее. Данная иерархия характерных времен переходов всех подкластеров в идеальные подсостояния определяет динамику всей системы. Мы записываем общее уравнение, описывающее подобную динамику, численно исследуем решение данного уравнения для определенного типа переходов ресурсов между кластерами и обсуждаем проблему идентификации параметров модели применительно к реальным системам.

Модель динамики распределения ресурсов в замкнутой фрактально-кластерной системе. Мы рассматриваем граф, являющийся n-уровневым иерархическим деревом с одной корневой вершиной — центром. Пусть p — индекс ветвления дерева, n — число иерархических уровней дерева. Пример такого дерева изображен на рис. 1 (здесь $p = 5$, $n = 2$). Множество точек границы дерева обозначим через U_n. Пусть x — некоторая точка границы. Тогда задание x эквивалентно заданию

$$x = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\,,$$

где $a_i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

На пространстве U_n между точками $x = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $y = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

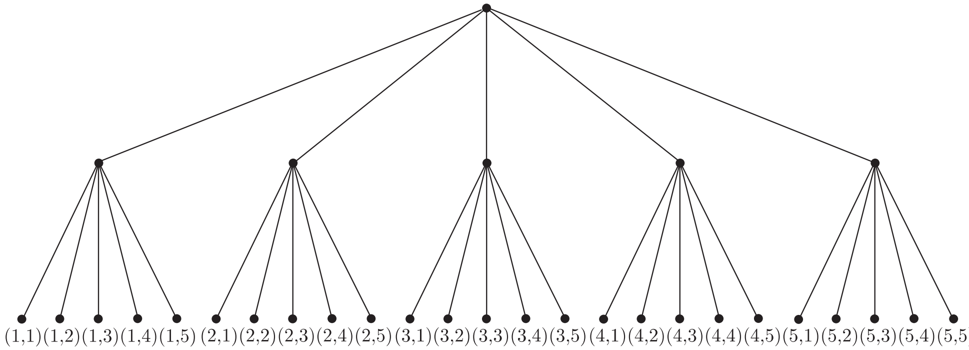

Рис. 1. Иерархическое дерево, описывающее двухуровневую фрактально-кластерную систему: (a_1, a_2), $a_1, a_2 = 1, \ldots, p$, $p = 5$ — параметризация концевых точек дерева (кластеров второго уровня)

естественным образом вводится ультраметрическое расстояние:

$$d(x, y) = d\left(a_1, a_2, \ldots, a_n | b_1, b_2, \ldots, b_n\right) = p^{n-\gamma+1}.$$

Здесь γ определяется из сравнения наборов $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$: если $a_1 = b_1$, $a_2 = a_2$, …, $a_{j-1} = b_{j-1}$, $a_j \neq b_j$, то полагается $\gamma = j$. Между одинаковыми элементами данное расстояние полагается равным нулю.

Как известно [10, 11], любой элемент x поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ представим в виде

$$x = p^{-\gamma}\left(b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_n p^n + \cdots\right),$$

где $\gamma \in \mathbb{Z}$, $b_0 = 1, 2, \ldots, p-1$, и для $i \neq 0$ $b_i = 0, 1, \ldots, p-1$. p-Адическая норма элемента x задаётся как $|x|_p = p^{\gamma}$. Для двух элементов x, $y \in \mathbb{Q}_p$ расстояние (метрика) между ними является ультраметрикой и определяется как $d(x, y) = |x - y|_p$. Множество $B_n = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leqslant p^n\}$ называется шаром радиуса p^n на поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Множество B_n/B_0 состоит из элементов вида $p^{-n}\left(b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_{n-1} p^{n-1}\right)$. Имеется взаимооднозначное соотвествие между множеством B_n/B_0 множества p-дических чисел $\mathbb{Q}_p$ и множеством точек нижней границы дерева U_n:

$$U_n \ni (a_1, a_2, \ldots, a_n) \longleftrightarrow p^{-n}\left(b_0 + b_1 p + b_3 p^2 + \cdots + b_{n-1} p^{n-1}\right) \in B_n/B_0,$$
$$b_0 = a_1 - 1, \quad b_1 = a_2 - 1, \;\cdots\; b_{n-1} = a_n.$$

Кластерами уровня i будем называть подмножества множества U_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, такие, что $\forall\, x,\, y \in U_n$ $d(x, y) \leqslant p^i$. Любая точка $x \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in U_n$ является кластером $U_0 = U_0\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, такие кластеры (концевые точки ультраметрического дерева) мы будем называть кластерами высшего уровня или просто точками.

Пусть F — некоторый экстенсивный параметр фрактально-кластерной системы. Функцией распределения $f(x)$ по фрактально-кластерному пространству U_n будем называть функцию $f(x) \equiv f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, удовлетворяющую условию

$$\sum_{x \in U_n} f(x) = 1,$$

таким образом величина $F_i = \sum_{x \in U_i} f(x)$ есть доля параметра F, приходящаяся на кластер U_i.

Пусть имеется набор неотрицательных чисел q_1, q_2, ..., q_p, причём

$$\sum_{a=1}^{p} q_a = 1.$$

Будем называть распределение $f^{ss}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *самоподобным*, если

$$f^{ss}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = q_{a_1} q_{a_2} \ldots q_{a_n}. \tag{1}$$

Для случая $p = 5$ будем называть самоподобное распределение

$$f^{id}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = q^{id}_{a_1} q^{id}_{a_2} \ldots q^{id}_{a_n}$$

идеальным, если

$$q_1^{id} = 0{,}38, \quad q_2^{id} = 0{,}27, \quad q_3^{id} = 0{,}16, \quad q_4^{id} = 0{,}13, \quad q_5^{id} = 0{,}06.$$

Далее мы рассмотрим модель эволюции распределенной фрактально-кластерной модели, описываемой распределением $f(x,t) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n, t)$, зависящим от времени t. Мы примем нижеследующие предположения.

1. Для любого момента времени t полный ресурс системы постоянен

$$\sum_{x \in U_n} f(x,t) = 1. \tag{2}$$

   Если предположение (2) выполнено в течение некоторого интервала времени, данная система называется *замкнутой относительно данного ресурса* в течение данного временного интервала.

2. Для любого начального распределения система с течением времени переходит в идеальное состояние $f^{id}(x)$:

$$\lim_{t \to \infty} f(x,t) = f^{id}(x). \tag{3}$$

3. Количество ресурсов, переходящих в единицу времени ресурсов из кластера высшего уровня (точки) y в любой другой кластер высшего уровня (точку) x системы, убывает с увеличением ультраметрического расстояния $d(x,y)$ между этими точками:

$$\left.\frac{df(x,t)}{dt}\right|_{y \to x} \sim K(d(x,y)) f(y),$$

   где $K(\lambda)$ — некоторая положительно определённая убывающая функция от аргумента λ.

Эти три предположения позволяют записать уравнение динамики для $f(x,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = \sum_{y \in U_n, y \neq x} K(d(x,y)) \left(f^{id}(x) f(y,t) - f^{id}(y) f(x,t) \right). \tag{4}$$

Суммирование правой и левой частей уравнения (4) по $x \in U_n$ даёт

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{x \in U_n} f(x,t) = 0,$$

что означает сохранение полного ресурса системы. Очевидно также, что $f^{id}(x)$ является стационарным решением (4), что гарантирует для любого решения $f(x,t)$ условия (3).

Из уравнения (4) следует, что величина

$$\tau_i = \frac{1}{K(p^i)} \tag{5}$$

есть характерное время перехода в идеальное состояние кластера уровня i, т. е. функции

$$f(a_1, \ldots, a_i, t) \equiv \sum_{a_{i+1},\ldots,a_n} f(a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n, t).$$

Отметим, что при $f^{id}(x) = \text{const}$ уравнение (4) по форме совпадает с уравнением ультаметрического случайного блуждания на ультраметрическом дереве, которое является уравнением Колмогорова—Феллера [16] для функции распределения однородного Марковского процесса и которое в пределе $n \to \infty$ переходит в уравнение ультраметрической диффузии на поле p-адических чисел (уравнение Владимирова) [5,11]. Тем не менее уравнение (4) не описывает какой-либо стохастический процесс, поскольку функция $f(x)$ определяет точку в пространстве конфигураций нашей системы, а не функцию распределения по состояниям. Само пространство конфигураций является пространством функций $f(x)$, удовлетворяющих условию $\sum_{x\in U_n} f(x) = 1$. При этом $f(x,t)$ определяет траекторию в конфигурационном пространстве и, таким образом, определяет детерминистическую идеальную динамику распределенной фрактально-кластерной системы.

Обсудим решение уравнений (4) для 3-уровневой системы ($n = 3$) с самоподобным (1) и однородным ($q_a = 1/5$, $a = 1, \ldots 5$) начальным распределением по кластерам. Мы выбираем функцию $K(\lambda)$, определяющую количество ресурсов, переходящих в единицу времени ресурсов из кластера высшего уровня y в любой другой кластер высшего уровня x, системы в степенной форме:

$$K(d(x,y)) = \frac{1}{T\lambda^b}, \tag{6}$$

где b — параметр модели, характеризующий «активность» перераспределения ресурса, T — параметр, задающий масштаб времени. Пусть начальное распределение является равномерным

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n, 0) = 5^{-n}. \tag{7}$$

Мы будем интересоваться динамикой распределения ресурсов в кластерах первого уровня, то есть функциями

$$f(a,t) = \sum_{a_2,a_3,\ldots,a_n} f(a, a_2, a_3, \ldots, a_n, t).$$

Решение уравнения (4) с начальным условием (7) найдено численно. На рис. 2 представлен график зависимости количества ресурсов от времени $f(1,1,1,t)$ в подкластере высшего уровня $(1,1,1)$ для 3-уровневой системы при определенных фиксированных значениях параметров модели. Можно видеть, что переход данного подкластера в идеальное состояние происходит на характерных временах порядка $\tau_3 \sim 10^3$. Далее на характерных временах порядка $\tau_2 \sim 10^6$ происходят переходы в идеальное состояние подкластеров второго уровня и, наконец, на характерных временах порядка $\tau_1 \sim 10^9$ происходят переходы в идеальное состояние подкластеров первого уровня, т. е. переход всей системы.

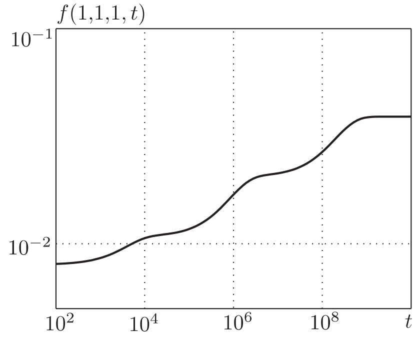

Рис. 2. График зависимости $f(1,1,1,t)$ при $p = 5$, $n = 3$, $b = 4$, $T = 1$. Отчётливо прослеживаются характерные времена переходов по кластерам: $\tau_3 \sim 10^3$, $\tau_2 \sim 10^6$, $\tau_1 \sim 10^9$

Практическое применение данной модели для возможного прогнозирования динамики изменения ресурса в системе, выведенной из состояния равновесия, требует идентификации ее параметров. При этом выбор функции $K(\lambda)$ зависит от типа системы и должен определяться эмпирически. Например, кроме степенной формы возможен выбор функции (6) в показательной $\big(T\exp(b\lambda)\big)^{-1}$ или логарифмической $\big(T\log(1+b\lambda)\big)^{-1}$ формах. Для адекватного выбора этой функции необходимо для каждой исследуемой системы эмпирически определить значения характерных времен τ_i, $i = 1, 2, \dots, n$, переходов кластеров всех уровней в состояние равновесия. Например, для трёхуровневой системы по известным трём эмпирическим значениям τ_1, τ_2 и τ_3 с помощью (5) можно осуществить оптимальный выбор типа функции $K(\lambda)$ и идентифицировать ее два параметра — T и b.

Заключение. В данной работе предложен сценарий динамики распределения ресурсов в замкнутых фрактально-кластерных системах, относящихся к классу «организмов». На основе естественных предположений записано уравнение для функции распределения в такой системе, решение которого при больших временах переходит в стационарное состояние, отвечающее идеальному распределению ресурсов. Руководящим принципом построения динамики в замкнутой фрактально-кластерной системе является тот факт, что пространство кластеров наивысших уровней обладает индексированной иерархической структурой, которая порождает ульраметрическую структуру. Основное предположение состоит в том, что динамика перераспределения ресурсов в замкнутой системе определяется полностью ультраметрической структурой пространства кластеров наивысших уровней — для каждого кластера существует свое характерное время перехода в идеальное состояние, определяемое ультраметрическим размером данного кластера (максимальным расстоянием $d(x,y)$ между кластерами высших уровней x и y, входящих в данный кластер) через функцию $K(d(x,y))$, определяющую количество ресурсов, переходящих в единицу времени ресурсов из кластера высшего уровня y в любой другой кластер высшего уровня x. Имеется достаточной большой произвол в выборе самой $K(d(x,y))$. При численном анализе мы ограничились степенной формой данной функции, но возможен также ее выбор в показательной, логарифмической и иных формах. По нашему мнению, этот выбор должен быть специфичен для каждой конкретной системы. Наше предположение определяет лишь сам механизм динамики перехода распределения ресурсов в замкнутой системе: сначала в идеальное состояние переходят подкластеры наивысших уровней, затем подкластеры уровнем ниже (которые образованы подкластерами высшего уровня) и так далее. Таким образом, независимо от формы функции $K(d(x, y))$ всегда существует иерархия характерных времен переходов всех подкластеров в идеальное состояние, и эта иерархия определяет динамику всей системы. Это демонстрируется численным решением нашего уравнения динамики распределения ресурсов в системе. Конкретный вид функции $K(d(x, y))$ зависит от типа моделируемой системы и должен определяться по наилучшей аппроксимации характерных времен переходов в состояние равновесия кластеров всех уровней.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 11–01–12114–офи-м, № 13–01–00790-а.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *R. Rammal, G. Toulouse, M. A. Virasoro*, "Ultrametricity for physicists" // *Rev. Modern Phys.*, 1986. Vol. 58, no. 3. Pp. 765–788.
2. *B. Dragovich, A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, I. V. Volovich*, "On p-adic mathematical physics" // *p-Adic Numb. Ultr. Anal. Appl.*, 2009. Vol. 1, no. 1. Pp. 1–17, arXiv: 0904.4205 [math-ph].
3. *V. Dotsenko*, An Introduction to the Spin Glasses and Neural Networks / World Scientific Lecture Notes in Physics. Vol. 54. Singapure: World Scientific, 1994. 156 pp.
4. *A. T. Ogielski, D. L. Stein*, "Dynamics on Ultrametric Spaces" // *Phys. Rev. Lett.*, 1985. Vol. 55, no. 15. Pp. 1634–1637.
5. *V. A. Avetisov, A. H. Bikulov, S. V. Kozyrev, V. A. Osipov*, "p-Adic models of ultrametric diffusion constrained by hierarchical energy landscapes" // *J. Phys. A, Math. Gen.*, 2002. Vol. 35, no. 2. Pp. 177–189, arXiv: cond-mat/0106506 [cond-mat.dis-nn].
6. *V. A. Avetisov, A. Kh. Bikulov, V. A. Osipov*, "p-Adic description of characteristic relaxation in complex systems" // *J. Phys. A, Math. Gen.*, 2003. Vol. 36, no. 15. Pp. 4239–4246, arXiv: cond-mat/0210447 [cond-mat.dis-nn].
7. *D. Sornette, A. Johansen*, "A hierarchical model of financial crashes" // *Phys. A*, 1998. Vol. 261, no. 3–4. Pp. 581–598.
8. *R. N. Mantenga, H. E. Stanley*, An introduction to econophysics. Correlations and complexity in finance. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. x+148 pp.
9. *А. Х. Бикулов, А. П. Зубарев, Л. В. Кайдалова*, "Иерархическая динамическая модель финансового рынка вблизи точки обвала и p-адический математический анализ" // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006. № 42. С. 135–140. [*A. Kh. Bikulov, A. P. Zubarev, L. V. Kaidalova*, "Hierarchical dynamical model of financial market near the crash point and p-adic mathematical analysis" // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2006. no. 42. Pp. 135–140].
10. *W. H. Schikhof*, Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis / Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Vol. 4. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984. viii+306 pp.
11. *В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов*, p-Адический анализ и математическая физика. М.: Физматлит, 1994. 352 с.; англ. пер.: *V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, E. I. Zelenov*, p-Adic analysis and mathematical physics / Series on Soviet and East European Mathematics. Vol. 1. River Edge, NJ: World Scientific Publishing Co., Inc., 1994. xx+319 pp.

12. *В. М. Шелкович, А. Ю. Хренников*, Современный p-адический анализ и математическая физика. Теория и приложения. М.: Физматлит, 2012. 452 с. [*V. M. Shelkovich, A. Yu. Khrennikov*, Modern p-adic analysis and mathematical physics: Theory and Applications. Moscow: Fizmatlit, 2012. 452 pp.]
13. *M. V. Dolgopolov, A. P. Zubarev*, "Some Aspects of m-Adic Analysis and Its Applications to m-Adic Stochastic Processes" // *p-Adic Numb. Ultr. Anal. Appl.*, 2011. Vol. 1, no. 3. Pp. 39–51, arXiv: 1012.1248 [math-ph].
14. *В. Т. Волов*, Экономика, флуктуации и термодинамика. Самара: СНЦ РАН, 2001. 222 с. [*V. T. Volov*, Economics, Fluctuations and Thermodynamics. Samara: Samara Research Center of RAS, 2001. 222 pp.]
15. *В. Т. Волов*, Фрактально-кластерная теория управления образовательными структурами. Казань: Казанск. гос. ун-т, 2000. 387 с. [*V. T. Volov*. Kazan: Kazan State Univ., 2000. 387 pp.]
16. *C. W. Gardiner*, Handbook of stochastic methods. For physics, chemistry and the natural sciences. Second edition / Springer Series in Synergetics. Vol. 13. Berlin: Springer Verlag, 1985. xx+442 pp.

Поступила в редакцию 05/XI/2012;
в окончательном варианте — 07/I/2013.

MSC: 82C44; 93A30, 11Z05, 82D30

THE ULTRAMETRICAL DYNAMICS FOR THE CLOSED FRACTAL-CLUSTER RESOURCE MODELS

V. T. Volov, A. P. Zubarev

Samara State Transport University,
18, First Bezimyanniy per., Samara, 443066, Russia.

E-mails: vtvolov@mail.ru, apzubarev@mail.ru

The evolution scenario of the resource distribution in the fractal-cluster systems which are identified as organism on Burdakov's classification is suggested. In this model the resource distribution dynamics is determined by the ultrametric structure of the fractal-cluster space. Thus for each cluster there is the characteristic time of its transition to an equilibrium state defined by ultrametric size of the cluster. The general equation that describes that dynamics is presented. The numeric solution for that equation for the certain types of resource transformation between clusters is received. The problem of identification of parameters of model with reference to real systems is discussed.

Key words: *hierarchical structures, ultrametric, fractal-cluster models, mathematical modeling, socio-economic systems, resource allocation.*

Original article submitted 05/XI/2012;
revision submitted 07/I/2013.

Vyacheslav T. Volov (Dr. Sci. (Phys. & Math.), Professor), Head of Dept., Dept. of Physics and Ecological Thermophysics. *Alexander P. Zubarev* (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Physics and Ecological Thermophysics.