Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. № 1 (30). С. 352–360

УДК 517.938

СЛУЧАЙНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОД МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ

В. М. Журавлев, П. П. Миронов

Ульяновский государственный университет,
Россия, 432017, Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42.

E-mails: zhvictorm@gmail.com, museum86@mail.ru

На основе метода Рейнольдса и принципа максимума энтропии анализируется поведение случайно возмущённых уравнений. Проанализирована устойчивость моделей. Выявлены общие особенности динамик моделей Ферхюльста, Вольтерра—Лотки и уравнений Эйлера вращения твёрдого тела.

Ключевые слова: *случайно возмущенные динамические уравнения, метод Рейнольдса, метод максимальной энтропии.*

Введение. Исследуемые в работе уравнения являются хорошо исследованными во всех отношениях моделями, описывающими такие процессы, как динамика численности населения, взаимодействия популяций [1,2], вращение твёрдого тела, атомная кластеризация под действием внешнего радиационного излучения и другие физические явления.

Внутреннее содержание таких уравнений является простым и ясным, что дает основание использовать их для моделирования реальных систем. Однако, поскольку модели являются жёсткими [3], применение их на практике оказывается ограниченным, в частности, из-за неполной ясности с их поведением при наличии случайного внешнего воздействия. Такое воздействие всегда присутствует в реальных системах. При наличии внешнего случайного воздействия речь может идти лишь об описании динамики моделей «в среднем». Однако при их усреднении полученные совокупности уравнений для моментов случайных величин уже оказываются незамкнутыми, а при различных способах замыкания обладают различными свойствами, которые могут существенно отличаться от свойств исходных моделей.

В настоящей работе усреднение случайно возмущенных уравнений (в дальнейшем СВ-уравнений) производится при помощи метода Рейнольдса [2,4,5], а замыкание полученных систем усредненных уравнений — при помощи метода максимальной энтропии [5,6].

1. Метод Рейнольдса и принцип максимума энтропии для нелинейных моделей. Метод Рейнольдса (см. [7] и библиографию там) основывается на представлении переменных модели в виде их разложения на среднее значение $\langle x\rangle = X(t)$ и флуктуации x', среднее значение которой равно нулю. Усреднение «$\langle\ \rangle$» переменных понимается везде как усреднение по ансамблю. В рамках метода анализу подвергаются не сами исходные уравнения, а уравнения, которые получаются из исходных с помощью усреднения по ансамблю. Усреднённые уравнения в литературе по гидродинамике часто называются уравнениями Рейнольдса [7]. В случае применения процедуры усреднения

Виктор Михайлович Журавлев (д.ф.-м.н., проф.), профессор, каф. теоретической физики.
Павел Павлович Миронов, аспирант, каф. теоретической физики.

по методу Рейнольдса к нелинейным уравнениям в уравнениях появляются дополнительные моменты случайных величин (ковариации, дисперсии). Для этих моментов необходимо указать уравнения эволюции, которые не следуют из исходных уравнений. В этом и состоит проблема замыкания систем уравнений, усреднённых по методу Рейнольдса [7].

Следуя работам [2, 4, 5], для решения проблемы замыкания будем пользоваться методом максимальной энтропии. Принцип максимума энтропии основывается на свойстве энтропии стохастических систем достигать своего максимума на множестве макросостояний, которые реализуются максимальным числом микросостояний [8]. Для его формулировки в случае непрерывных случайных процессов необходимо воспользоваться шенноновским определением энтропии в форме континуального интеграла по пространству случайных величин $X_i[t_0, t_1]$, которое можно представить в виде прямого произведения всех пространств $R(t)$ вещественных чисел, соответствующих всевозможным значениям переменных $\{x_i(t)\}$, параметрически зависящих от $t \in [t_0, t_1]$. Энтропия в этом случае может быть записана в виде следующего континуального интеграла:

$$H_0 = -\int \rho(\{x_i\}[t_0, t_1]) \ln \rho(\{x_i\}[t_0, t_1]) DX[t_0, t_1]. \tag{1}$$

В применении к задачам об усреднённой динамике случайно возмущенных систем необходимо найти максимум этого функционала при условии выполнения уравнений усредненной по методу Рейнольдса системы. Варьируемыми параметрами функционала H_0 являются параметры вероятностного распределения для каждого момента времени, которые входят в уравнения Рейнольдса, и, возможно, дополнительные условия, которые могут накладываться на моменты распределения исходя из физических условий задачи.

Решение задачи о максимуме функционала H_0 проводится в два этапа [2, 4, 5]. Если уравнения исходной системы являются локальными, то первый этап состоит в доказательстве того, что решением задачи о максимуме энтропии является такое распределение плотности вероятностей случайных флуктуаций параметров системы, которое соответствует их статистической независимости. В результате континуальный интеграл в (1) сводится к интегралу по времени. На втором шаге вычисляется вид удельного вероятностного распределения, относящегося к каждому конкретному моменту времени. При условии, что уравнения усредненной динамики содержат только первые и вторые моменты случайных флуктуаций системы, решением задачи о максимуме энтропии удельного распределения является, как хорошо известно [8, 9], гауссово распределение вероятностей. В результате функционал энтропии примет общий вид энтропии последовательности нормально распределённых независмых случайных величин [9]:

$$H_{\max} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \ln \det C dt + C_0. \tag{2}$$

Здесь $\det C$ — определитель матрицы ковариаций флуктуаций, C_0 — несущественная числовая постоянная.

Теперь принцип (2) может быть использован для всех систем, усредненные уравнения Рейнольдса которых содержат моменты второго порядка. В дальнейшем будем называть его принципом максимума энтропии. Следуя ему, мы должны решить задачу о максимуме функционала энтропии следующего вида:

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \ln\det C dt + \sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1} U_i F_i(\vec{X}, t) dt. \qquad (3)$$

Здесь $U_i(t)$ — множители Лагранжа в задаче об условном экстремуме $H_{\max}$, $F_i(\vec{X}, t)$ — функции, содержащие левую часть усреднённых уравнений, причём $F_i(\vec{X}, t) = 0$. В предлагаемых задачах варьируются основные переменные (численности особей, населения, компоненты угловых скоростей вращения) и моменты, содержащиеся в матрице ковариаций флуктуаций. Функционал (3) фактически аналогичен функционалам принципа наименьшего действия в механике.

2. Случайно возмущенное уравнение Ферхюльста. Уравнение Ферхюльста (логистическое уравнение) описывает динамику численности населения [1]:

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x^2 + \epsilon. \qquad (4)$$

В рамках биофизической интерепретации данной модели в этом уравнении x — число особей какого-либо сообщества (ареала, планеты, государства, города, района и т.д.) в определённый момент времени. Параметры α, β описывают рождаемость в сообществе (параметр α) и степень взаимодействия популяции за счёт эффекта тесноты (параметр β). Функция времени $\epsilon(t)$ является случайной с математическим ожиданием, равным нулю: $\langle\epsilon(t)\rangle = 0$.

В случае отсутствия шума исследуемое уравнение имеет две стационарные точки: $X_0 = 0$, $X_0 = \alpha/\beta$, положение которых при наличии шума смещается и определяется усреднённой динамикой уравнения Ферхюльста. Применяя метод Рейнольдса к уравнению (4), получаем следующее усредненное уравнение:

$$\dot{X} = \alpha X - \beta X^2 - \beta\langle x'^2\rangle.$$

В это уравнение входит дисперсия флуктуаций $\langle x'^2\rangle$. Для неё необходимо дополнительно указать уравнение эволюции, которое не следует из исходного уравнения. Для замыкания полученного усреднённого уравнения воспользуемся методом максимальной энтропии и решим задачу о максимуме функционала энтропии следующего вида:

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \ln\det Z dt + \int_{t_0}^{t_1} U(\dot{X} - \alpha X + \beta X^2 + \beta Z) dt. \qquad (5)$$

Здесь $U(t)$ — множитель Лагранжа, $Z(t) = \langle x'^2\rangle$ — дисперсия флуктуаций в системе. Варьируемыми параметрами являются функции $X(t)$ и $Z(t)$, а также множители Лагранжа. Уравнения Эйлера—Лагранжа для функционала (5) имеют следующий вид:

$$\dot{X} = \alpha X - \beta X^2 - \beta Z, \quad \dot{U} = -\alpha U + 2\beta X U, \quad \frac{1}{2Z} + \beta U = 0. \qquad (6)$$

Данная система обладает одной стационарной точкой:

$$X_0 = \frac{\alpha}{2\beta}, \quad U_0 = -\frac{2\beta}{\alpha^2}, \quad Z_0 = \frac{\alpha^2}{4\beta^2}.$$

Для анализа устойчивости стационарной точки представим параметры модели (6) в следующем виде:

$$X = X_0 + \xi, \quad U = U_0 + u, \quad Z = Z_0 + z, \tag{7}$$

где ξ, u и z — возмущения, являющиеся функциями первого порядка малости. Подставляя (7) в (6), отбрасывая слагаемые второго порядка малости и решая задачу на собственные числа системы, получаем их следующие значения:

$$\lambda_{1,2} = \pm\alpha/\sqrt{2}.$$

Среди этих собственных ненулевых значений всегда имеется корень с положительной вещественной частью. Следовательно, в линейном приближении стационарная точка системы является неустойчивой для всех параметров СВ-уравнения.

Для аналитического решения системы (6) введём функцию $\theta = \theta(t)$ таким образом, что для X, U и Z выполняются следующие соотношения:

$$X_a = \frac{\dot{\theta}}{\beta\theta} + \frac{\alpha}{2\beta}, \quad U_a = -C_1\theta^2, \quad Z_a = \frac{1}{2\beta C_1\theta^2}, \tag{8}$$

где $C_1 = \mathrm{const}$. Данные соотношения будем называть аналитическим решением усреднённой системы (6). Уравнение для θ выглядит следующим образом:

$$\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}\theta^2 - \frac{\beta}{C_1}\ln\theta + \frac{C_2}{4}}. \tag{9}$$

Здесь C_2 — константа интегрирования.

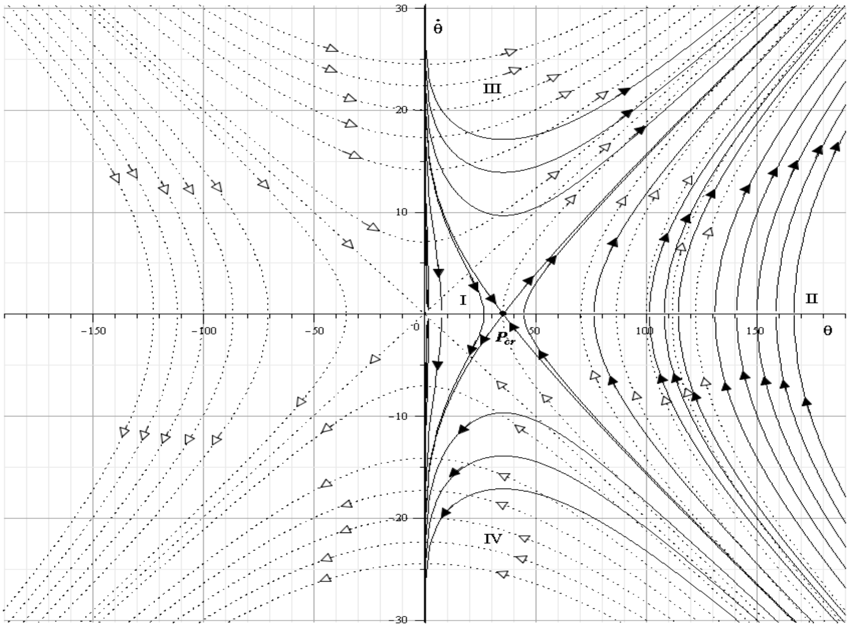
Усреднённые траектории на рисунке обозначены сплошными кривыми и разделены в правой полуплоскости на 4 области, пересекающиеся в точке P_{cr}. Для анализа устойчивости решения (8) в линейном приближении представим усредненные переменные следующим образом:

$$X = X_a + \xi, \quad U = U_a + u, \quad Z = Z_a + z, \quad \theta = \theta_a + \psi, \tag{10}$$

где ξ, u, z и ψ — возмущения первого порядка малости. Отбрасывая слагаемые, квадратичные по данным возмущениям, получаем следующее решение:

$$\xi = \frac{\alpha B}{\beta\theta}\exp\Bigl\{-\frac{\alpha t}{2}\Bigr\}, \quad u = -C_1\theta\psi, \quad z = -\frac{\psi}{2\beta C_1\theta^3},$$
$$\psi = A\exp\Bigl\{\frac{\alpha t}{2}\Bigr\} - B\exp\Bigl\{-\frac{\alpha t}{2}\Bigr\}.$$

Здесь A и B — константы интегрирования. Стационарная точка усреднённой системы под действием случайного возмущения в случае $\theta \to \infty$, $\dot{\theta} \to \infty$, который соответствует областям II и III на рисунке, асимптотически стремится к стационарной точке уравнения Ферхюльста без шумов, которая имеет значение α/β. Полученное решение для ξ и z является устойчивым по Ляпунову [10] в силу своей ограниченности. Следовательно, устойчиво и решение (8).



Фазовый портрет уравнения (9) для различных значений параметра C_2 (параметры модели: $\alpha = 0{,}4$, $\beta = 100$, $C_1 = 1$)

3. Случайно возмущенная система Вольтерра—Лотки. Система Вольтерра—Лотки описывает динамику двухвидовой популяции [1, 2]:

$$\dot{x} = \alpha x - \beta xy + \epsilon_1, \quad \dot{y} = -\mu y + \nu xy + \epsilon_2. \tag{11}$$

Здесь x и y — числа особей каждой из взаимодействующих популяций. В случае, если все параметры α, β, μ и ν неотрицательны, популяция x называется жертвами, а y — хищниками; $\epsilon_1(t)$ и $\epsilon_2(t)$ — случайные шумы. Данная модель имеет одну ненулевую стационарную точку:

$$x_0 = \mu/\nu, \quad y_0 = \alpha/\beta. \tag{12}$$

При наличии шума эта точка смещается и её положение определяется динамикой усреднённой системы уравнений. В отсутствие же шума известные решения уравнений (11) представляют собой замкнутые траектории, ограничивающие область фазовой плоскости, содержащую стационарную точку (12).

Применяя методы Рейнольдса и максимальной энтропии к модели (11), получаем замкнутую усреднённую систему уравнений:

$$\begin{gathered}\dot{X} = \alpha X - \beta XY - \beta R, \qquad \dot{Y} = -\mu Y + \nu XY + \nu R,\\ \dot{U} = -\alpha U + (\beta U - \nu V)Y, \quad \dot{V} = \mu V + (\beta U - \nu V)X,\\ \frac{R}{R^2 - Z^2} = \beta U - \nu V.\end{gathered} \tag{13}$$

Здесь U и V — множители Лагранжа, $R = \langle x'y' \rangle$ — коэффициент ковариации, $Z = \sqrt{\langle x'^2 \rangle \langle y'^2 \rangle}$ — дисперсия флуктуаций в системе. Варьируемыми параметрами (кроме множителей Лагранжа) являются функции $X(t)$, $Y(t)$ и и ковариация $R(t)$. В силу специфики системы функция Z считается заданной.

Это объясняется тем, что при добавлении уравнения, учитывающего варьирование по Z, получается несовместная система стационарных усреднённых уравнений (см. [2]). Стационарная точка усредненной модели (13) следующая:

$$X_0 = \frac{\mu}{2\nu}, \;\; Y_0 = \frac{\alpha}{2\beta}, \;\; R_0 = \frac{\alpha\mu}{4\beta\nu}, \;\; U_0 = \frac{1}{Z^2 - R_0^2}\frac{\alpha\mu}{8\nu\beta^2}, \;\; V_0 = -\frac{1}{Z^2 - R_0^2}\frac{\alpha\mu}{8\nu^2\beta}.$$

По аналогии с (7) вычисляем собственные числа возмущенной задачи:

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm\frac{1}{4}\left(4P_0 + 2T_0 \pm 2\sqrt{T_0^2 + 4P_0\,(T_0 + 8\alpha\mu + P_0)}\right)^{1/2}.$$

Здесь $P_0 = 4\beta\nu R_0/(1+2R_0^2/(Z^2-R_0^2))$, $T_0 = (\alpha-\mu)^2$. Как показывает анализ, среди этих собственных (ненулевых) значений всегда имеется корень с неотрицательной вещественной частью. Следовательно, устойчивость стационарного решения системы возможна только в случае равенства всех собственных чисел λ нулю, что соответствует равенствам

$$\alpha = \mu, \quad Z^2 = \frac{\alpha^2\mu^2}{16\beta^2\nu^2}.$$

Поэтому мы можем констатировать, что в линейном приближении стационарная точка системы является неустойчивой почти для всех параметров СВ-системы.

Рассмотрим особое решение системы (13):

$$X_0 = X_0(t), \quad Y_0 = Y_0(t), \quad U_0 = 0, \quad V_0 = 0, \quad R_0 = 0. \tag{14}$$

Такое решение будем называть состоянием с максимальной энтропией, так как оно обладают максимальной энтропией по отношению ко всем остальным состояниям [2]. По аналогии с (10) вычисляем решения для возмущений множителей Лагранжа:

$$u = C_1\frac{\dot{Y}_0}{X_0Y_0} - C_0\nu\frac{\dot{Y}_0}{X_0Y_0}M(t), \quad v = -C\frac{\dot{X}_0}{X_0Y_0} + C_0\nu\frac{\dot{X}_0}{X_0Y_0}M(t) + \frac{C_0}{\dot{Y}_0}. \tag{15}$$

Другой вариант записи этих решений такой:

$$u = C_1\frac{\dot{Y}_0}{X_0Y_0} - C_0\beta\frac{\dot{Y}_0}{X_0Y_0}N(t) + \frac{C_0}{\dot{X}_0}, \quad v = -C_1\frac{\dot{X}_0}{X_0Y_0} + C_0\beta\frac{\dot{X}_0}{X_0Y_0}N(t). \tag{16}$$

Здесь

$$M(t) = \int X_0\frac{Y_0^2}{(\dot{Y}_0)^2}dt, \quad N(t) = \int Y_0\frac{X_0^2}{(\dot{X}_0)^2}dt.$$

Решения (15) и (16) являются ограниченными. Следовательно, состояние (14) устойчиво по Ляпунову.

Заметим также, что для СВ-системы Вольтерра—Лотки наблюдается устойчивость усреднённого решения в случае большой дисперсии флуктуаций.

В этом случае система будет переходить в состояние с максимальной энтропией [2].

4. Случайно возмущенные уравнения Эйлера вращения твёрдого тела. Стохастическая система Эйлера вращения твёрдого тела имеет следующий вид:

$$\dot{\omega}_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1}\omega_2\omega_3 + \epsilon_1, \quad \dot{\omega}_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2}\omega_3\omega_1 + \epsilon_2, \quad \dot{\omega}_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_3}\omega_1\omega_2 + \epsilon_3. \quad (17)$$

Здесь ω_1, ω_2 и ω_3 — угловые скорости осей вращения, I_1, I_2 и I_3 — компоненты момента инерции осей вращения, ϵ_1, ϵ_2 и ϵ_3 — случайные возмущения в системе. Стационарные точки системы (17) в случае отсутствия шумов:

$$\begin{gathered}
\omega_1 = \mathrm{const}, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 0,\\
\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \mathrm{const}, \quad \omega_3 = 0,\\
\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \mathrm{const}.
\end{gathered}$$

Усреднённая система для уравнений Эйлера, соответствующая максимуму функционалу энтропии, выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered}
\dot{W}_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1}W_2W_3 + \frac{I_2 - I_3}{I_1}R_{23}, \quad \dot{W}_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2}W_3W_1 + \frac{I_3 - I_1}{I_2}R_{13},\\
\dot{W}_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_3}W_1W_2 + \frac{I_1 - I_2}{I_3}R_{12}, \quad \dot{U}_1 = \frac{I_1 - I_3}{I_2}W_3U_2 + \frac{I_2 - I_1}{I_3}W_2U_3,\\
\dot{U}_2 = \frac{I_3 - I_2}{I_1}W_3U_1 + \frac{I_2 - I_1}{I_3}W_1U_3, \quad \dot{U}_3 = \frac{I_3 - I_2}{I_1}W_2U_1 + \frac{I_1 - I_3}{I_2}W_1U_2, \quad (18)\\
\frac{R_{13}R_{23} - R_{12}Z_3}{Z_1Z_2Z_3 + 2R_{12}R_{13}R_{23} - (R_{23}^2Z_1 + R_{13}^2Z_2 + R_{12}^2Z_3)} + \frac{I_2 - I_1}{I_3}U_3 = 0,\\
\frac{R_{12}R_{23} - R_{13}Z_2}{Z_1Z_2Z_3 + 2R_{12}R_{13}R_{23} - (R_{23}^2Z_1 + R_{13}^2Z_2 + R_{12}^2Z_3)} + \frac{I_1 - I_3}{I_2}U_2 = 0,\\
\frac{R_{12}R_{13} - R_{23}Z_1}{Z_1Z_2Z_3 + 2R_{12}R_{13}R_{23} - (R_{23}^2Z_1 + R_{13}^2Z_2 + R_{12}^2Z_3)} + \frac{I_3 - I_2}{I_1}U_1 = 0.
\end{gathered}$$

R_{ij}, Z_i и U_i здесь имеют тот же смысл, что и ранее. Варьируемыми параметрами являются функции R_{ij}, W_i и U_i. Функции $Z_i(t)$ (дисперсии флуктуаций) считаются заданными по тем же причинам, что и в случае системы Вольтерра—Лотки [2]. Рассмотрев анализ устойчивости нулевой стационарной точки, получаем, что собственные числа возмущённой задачи равны: $\lambda_{1,2,3,4,5,6} = 0$. Это означает условную устойчивость стационарного решения в первом порядке теории возмущений. В случае прецессии $I_1 = I_2$ для стационарной точки вида

$$\begin{gathered}
W_{10} = \frac{\sqrt{Z_1Z_3}}{\mathrm{const}}, \quad W_{20} = \frac{\sqrt{Z_2Z_3}}{\mathrm{const}}, \quad W_{30} = \mathrm{const},\\
R_{120} = \sqrt{Z_1Z_2}, \quad R_{130} = -\sqrt{Z_1Z_3}, \quad R_{230} = -\sqrt{Z_2Z_3},\\
U_{10} = 0, \qquad U_{20} = 0, \qquad U_{30} = 0
\end{gathered}$$

получаем следующие собственные числа:

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{3,4} = i\Big(\frac{I_3}{I_1} - 1\Big)C, \quad \lambda_{5,6} = -i\Big(\frac{I_3}{I_1} - 1\Big)C.$$

Здесь $C = \mathrm{const}$. Как и в предыдущем случае, получаем устойчивость в первом порядке возмущений. Однако для полного анализа устойчивости стационарных точек необходимо исследовать второй порядок возмущений переменных в усреднённой системе уравнений (18).

Отметим также, что для возмущенных уравнений Эйлера вращения твёрдого тела наблюдается устойчивость по Ляпунову в состоянии с максимальной энтропией. Это следует из ограниченности следующих решений для возмущений основных переменных:

$$w_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1}\frac{f_1(t)}{W_{10}}, \quad w_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2}\frac{f_2(t)}{W_{20}}, \quad w_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_3}\frac{f_3(t)}{W_{30}}.$$

Здесь $f_1(t)$, $f_2(t)$ и $f_3(t)$ — ограниченные функции времени.

Заключение. Из проведённого анализа СВ-моделей Ферхюльста, Вольтерра—Лотки и Эйлера следует, что динамика таких уравнений существенным образом зависит от величины дисперсии шума. При сравнительно небольших значениях этого параметра модели в среднем эволюционируют вблизи своего среднего значения, которое удовлетворяет невозмущенным уравнениям. Поэтому, как было показано для моделей Ферхюльста и Вольтерра—Лотки, все состояния с $Z \neq 0$ оказываются неустойчивыми в общем случае уже в первом порядке теории возмущений, а это означает, что очень быстро они переходят в первоначальное невозмущенное состояние. Стационарные точки усреднённой динамики уравнений Эйлера вращения твёрдого тела оказываются устойчивыми по отношению к возмущениям первого порядка малости. Однако для полного анализа свойств этой модели необходимо дополнительное исследование.

Настоящая работа выполнена в рамках федеральных целевых программ «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2012 годы» и «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 год», а также работ в рамках государственного задания Минобрнауки России № 2.1894.2011 и № 14.B37.21.1296, гранта для аспирантов Ульяновского государственного университета и при частичной поддержке РФФИ (проекты № 11–01–00747–а, 12–01–33074–мол–а-вед).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Г. Ю. Ризниченко*, Лекции по математическим моделям в биологии. Ч. 1. М., Ижевск: РХД, 2002. 231 с. [*G. Yu. Reznichenko*, Lectures on Mathematical Models in Biology. Part 1. Moscow, Izhevsk: RCD, 2002. 231 pp.]
2. *В. М. Журавлев, П. П. Миронов*, “Динамика случайно возмущенной системы Вольтерра—Лотки и метод максимальной энтропии” // *Нелинейный мир*, 2011. Т. 9, № 4. С. 201–212. [*V. M. Zhuravlev, P. P. Mironov*, “The dynamics of random-disturbed Volterra–Lotke system and the maximum entropy method” // *Nelineyniy mir*, 2011. Vol. 9, no. 4. Pp. 201–212].
3. *В. И. Арнольд*, «Жёсткие» и «мягкие» математические модели. М.: МЦНМО, 2000. 32 с. [*V. I. Arnold*, Hard and soft mathematical model. Moscow: MTsNMO, 2000. 32 pp.]

4. *В. М. Журавлев, В. А. Шляпин*, "Принцип вторичного максимума энтропии и уравнения Рейнольдса в стохастической динамике одномерных нелинейных систем" // *Нелинейный мир*, 2008. Т. 6, № 7. С. 352–363. [*V. M. Zhuravlev, V. A. Shlaypin*, "Principle of second maximum entropy and Reynolds equations in stohastic dynamics of one dimension nonlinear systems" // *Nelineyniy mir*, 2008. Vol. 6, no. 7. Pp. 352–363].
5. *В. М. Журавлев*, "Турбулентность течений несжимаемой жидкости вблизи локального равновесия и принцип вторичного максимума энтропии" // *ЖТФ*, 2009. Т. 79, № 1. С. 16–27; англ. пер.: *V. M. Zhuravlev*, "Turbulence of incompressible liquid flow near local equilibrium and the principle of secondary maximum of entropy" // *Tech. Phys.*, 2009. Vol. 54, no. 1. Pp. 13–24.
6. *Ю. Л. Климонтович*, Введение в физику открытых систем. М.: Янус-К, 2002. 284 с. [*Yu. L. Klimontovich*, Introduction to Physics of Open Systems. Moscow: Yanus-K, 2002. 284 pp.]
7. *А. С. Монин, А. М. Яглом*, Статистическая гидромеханика. Т. 1: Механика турбулентности. М.: Наука, 1967. 639 с.; англ. пер.: *A. S. Monin, A. M. Yaglom*, Statistical Fluid Mechanics. Vol. 1: Mechanics of Turbulence. Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1971 totalpages xii+770.
8. *Б. Р. Фриден*, "Оценки, энтропия, правдоподобие" // *Тр. ин-та инж. по электротехнике и радиоэлектрон.*, 1985. Т. 73, № 12. С. 78–86. [*B. R. Friden*, "Estimates, entropy, plausibility" // *Tr. Inst. Inzh. Electron. Radioelectron.*, 1985. Vol. 73, no. 12. Pp. 78–86].
9. *R. L. Stratanovich*, Theory of Information. Moscow: Sov. Radio, 1975. 424 c.
10. *А. Д. Базыкин*, Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. М., Ижевск: ИКИ, 2003. 368 с.; англ. пер.: *A. D. Bazykin*, Nonlinear dynamics of interacting populations / World Scientific series on nonlinear science. Vol. 11. Singapore, River Edge, NJ: World Scientific, 1998. xxi+193 pp.

Поступила в редакцию 14/XI/2012;
в окончательном варианте — 22/I/2013.

MSC: 34F05, 34D20

THE RANDOM-DISTURBED DYNAMIC MODELS AND THE MAXIMUM ENTROPY METHOD

V. M. Zhuravlev, P. P. Mironov

Ulyanovsk State University,
42, L. Tolstoy st., Ulyanovsk, Russia, 432017.

E-mails: zhvictorm@gmail.com, museum86@mail.ru

In the work the behavior of random-disturbed equations is analysed on the basis of the Reynolds method and the maximum entropy principle. The stability of models is analysed. The general features of dynamics of Verhulst model, Volterra–Lotke model and Euler's equations of solid body rotation are revealed.

Key words: *random-disturbed dynamics equations, Reynolds method, maximum entropy method.*

Original article submitted 14/XI/2012;
revision submitted 22/I/2013.

Victor M. Zhuravlev (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Professor, Dept. of Teoretical Physics.
Pavel P. Mironov, Postgraduate Student, Dept. of Teoretical Physics.