

УДК 514.84

КРИВИЗНА ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

М. Г. Иванов

Московский физико-технический институт (государственный университет),
Россия, 141700, Московская область, Долгопрудный, Институтский переулок, 9.

E-mail: ivanov.mg@mipt.ru

Показывается, что электромагнитное поле в классической и квантовой механике естественным образом описывается через геометрию расширенного фазового пространства, в число координат которого входят время и сопряжённый ему импульс $p_0 = -E$.

Ключевые слова: фазовое пространство, квантовая механика, калибровочная симметрия, кривизна, некоммутативная геометрия.

Введение. Квантовое коммутационное соотношение между координатой и сопряжённым импульсом имеет вид $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$, оно часто переписывается через операторы конечных сдвигов по координате и импульсу [1, 2]:

$$\hat{U}(u) = e^{-\frac{i u \hat{P}}{\hbar}}, \quad \hat{U}(u)\psi(Q) = \psi(Q - u), \quad \hat{U}(u)\psi(P) = e^{-\frac{i u P}{\hbar}}\psi(P), \quad (1)$$

$$\hat{V}(v) = e^{-\frac{i v \hat{Q}}{\hbar}}, \quad \hat{V}(v)\psi(Q) = e^{-\frac{i v Q}{\hbar}}\psi(Q), \quad \hat{V}(v)\psi(P) = \psi(P + v). \quad (2)$$

Коммутационное соотношение записывается в виде группового коммутатора

$$\hat{U}(u)\hat{V}(v)\hat{U}^{-1}(u)\hat{V}^{-1}(v) = \hat{U}(u)\hat{V}(v)\hat{U}(-u)\hat{V}(-v) = e^{\frac{i u v}{\hbar}}. \quad (3)$$

Таким образом, последовательность сдвигов в фазовой плоскости (Q, P) по замкнутому прямоугольному контуру площади uv соответствует умножению волновой функции на фазовый множитель $e^{\frac{i u v}{\hbar}}$. Это означает, что фазовой плоскости можно приписать постоянную кривизну в расслоении над группой $U(1)$ аналогично кривизне, задаваемой в калибровочной $U(1)$ теории тензором электромагнитного поля.

Можно связать между собой две хорошо разработанные области математической физики: симплектическую геометрию и теорию калибровочных полей. Симплектическая форма и тензор электромагнитного поля объединяются в один объект, задающий кривизну в расслоении фазового пространства над группой $U(1)$. В литературе эта аналогия разрабатывается в одну сторону: квантовая механика как калибровочная теория в фазовом пространстве [4].

Для частицы во внешнем электромагнитном поле характеристики поля уже не должны входить в гамильтониан, вместо этого в духе общей теории относительности (ОТО) заряженная частица свободно движется в искривлённом фазовом пространстве.

Хотя исходная идея связана с квантовыми коммутационными соотношениями, подобная переформулировка возможна как для классической, так и для квантовой механики.

Михаил Геннадьевич Иванов (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. теоретической физики.

1. Коммутаторы и скобки Пуассона. Пусть X^K — координаты в фазовом пространстве. Для коммутаторов и классических скобок Пуассона имеем

$$[\hat{X}^K, \hat{X}^L] = i\hbar J^{KL}, \quad \{X^K, X^L\} = J^{KL}.$$

В нашей интерпретации J^{KL} — тензор кривизны фазового пространства (над группой $U(1)$).

В канонических координатах

$$X^{Q^i} = Q^i, \quad X^{P_j} = P_j, \quad J^{Q^i P_j} = -J^{P_j Q^i} = \delta_j^i, \quad J^{Q^i Q^j} = J^{P_i P_j} = 0.$$

Переход от обобщённых импульсов P к кинематическим импульсам p позволяет исключить статическое магнитное поле из гамильтониана, описав его как добавку к кривизне фазового пространства. Для таких («новых канонических») координат x имеем

$$x^{q^i} = q^i = Q^i, \quad x^{p_j} = p_j = P_j - \frac{e}{c} A_j(Q), \quad \{x^K, x^L\} = I^{KL}, \quad (4)$$

$$I^{q^i p_j} = -I^{p_j q^i} = \delta_j^i, \quad I^{q^i q^j} = 0, \quad I^{p_i p_j} = \frac{e}{c} F_{ij} = \frac{e}{c} (\partial_i A_j - \partial_j A_i). \quad (5)$$

Симплектическая форма ω задаётся матрицей, обратной к матрице I , т. е. $\omega_{KL} I^{LM} = \delta_K^M$.

$$\omega_{q^i p_j} = -\omega_{p_j q^i} = -\delta_j^i, \quad \omega_{q^i q^j} = \frac{e}{c} F_{ij}, \quad \omega_{p_i p_j} = 0. \quad (6)$$

В случае статических (не зависящих от времени) полей переход к «новым каноническим» координатам — это всего лишь замена координат в фазовом пространстве, I^{KL} — это прежний тензор J^{KL} в новых координатах, гамильтониан — прежняя скалярная функции на фазовом пространстве, скобка Пуассона также остаётся прежней. Это автоматически доказывает (в силу произвольности выбора координат при тензорной записи скобки Пуассона), что и динамика системы остаётся прежней.

Поскольку между старыми и новыми координатами есть взаимно однозначное соответствие, мы будем нумеровать их одинаковыми индексами.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Движение классической или квантовой заряженной частицы во внешнем статическом магнитном поле $\mathbf{H}$ может быть описано гамильтонианом свободной частицы*

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m},$$

если на фазовом пространстве задана симплектическая форма вида (6), включающая в себя магнитное поле $F_{ij} = -e_{ijk} H_k$. Скобки Пуассона (классические или квантовые) задаются неканоническими соотношениями (5). Это описание соответствует гамильтониану

$$H = \frac{(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A})^2}{2m}$$

с векторным потенциалом $\mathbf{A}$ (где $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$), не зависящим от времени, в неканонических координатах x (4).

Похожий подход в рамках некоммутативной геометрии развивался Беллиссардом [3].

Чтобы в рамках данного подхода описать переменное электромагнитное поле, необходимо расширить фазовое пространство, рассматривая время $x^0 = t$ и соответствующий времени обобщённый импульс $p_0 = -E$ как дополнительные координаты.

2. Лагранжев формализм в расширенном конфигурационном пространстве. Пусть задан некий лагранжиан $L(t, q, \dot{q})$, который явно зависит от времени. Мы можем переписать неавтономную систему как автономную, записав время t как функцию от некоторого монотонного параметра τ :

$$S[q(t)] = \int L(t, q, \dot{q}) dt = \int L(t, q, q'/t') t' d\tau, \quad \dot{q} = \frac{dq}{dt}, \quad q' = \frac{dq}{d\tau}.$$

Мы получаем новый (расширенный) функционал действия $S_p[t(\tau), q(\tau)]$ с новым (расширенным) лагранжианом L_p , который для любой траектории совпадает с исходным действием $S[q(t)]$, но зависит от другого набора функций:

$$S_p[t(\tau), q(\tau)] = \int L_p(t, t', q, q') d\tau, \quad L_p(t, t', q, q') = L(t, q, q'/t') t'.$$

Легко проверить, что уравнения Эйлера для старого и расширенного лагранжианов эквивалентны, причём

$$p_i = \frac{\partial L_p}{\partial q^{i'}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad p_0 = \frac{\partial L_p}{\partial t'} = L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i = -E.$$

Уравнения Лагранжа для расширенного лагранжиана для координат $q(\tau)$ и времени $t(\tau)$ с точностью до множителя t' совпадают с уравнениями Лагранжа и уравнением баланса энергии для исходного лагранжиана

$$\frac{\delta S_p}{\delta q^i(\tau)} = t' \frac{\delta S}{\delta q^i(t)} = t' \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{dp_i}{dt} \right), \quad \frac{\delta S_p}{\delta t(\tau)} = t' \left(\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{dE}{dt} \right).$$

«Энергия» для расширенного лагранжиана тождественно равна нулю:

$$\mathcal{E} = p_0 t' + p_i q^{i'} - L_p = t'(p_0 + E) \equiv 0.$$

Расширенное действие описывает ту же физическую систему, что и исходное, но поскольку выбор параметризации времени $t(\tau)$ произволен (любая гладкая монотонная функция), уравнения Лагранжа оказываются зависимыми (уравнение баланса энергии выражается через остальные уравнения).

3. Гамильтонов формализм в расширенном фазовом пространстве. Для расширенного фазового пространства перейдём к гамильтоновому формализму. Соответствующее преобразование Лежандра оказывается неоднозначным. «Энергию» для расширенного лагранжиана надо выразить через координаты и импульсы (включая t и p_0):

$$\mathcal{E} = t' p_0 + q^{i'} p_i - L_p = t'(p_0 + p_i \dot{q}^i - L) = t'(p_0 + H(t, p, q)),$$

t' не может быть определено из уравнений Лагранжа. Положим

$$t' = f(t, p_0, q, p),$$

где $f \neq 0$ — произвольная гладкая функция. Получается «гамильтониан»

$$\mathcal{H}(t, p_0, q, p) = f(t, p_0, q, p) \cdot (p_0 + H(t, q, p)). \quad (7)$$

Соответствующие уравнения Гамильтона («расширенные уравнения Гамильтона») имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_0} = f + \frac{\partial f}{\partial p_0}(p_0 + H), & \frac{dp_0}{d\tau} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -f \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}(p_0 + H), \\ \frac{dq^i}{d\tau} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = f \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i}(p_0 + H), & \frac{dp_i}{d\tau} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} = -f \frac{\partial H}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}(p_0 + H). \end{aligned}$$

«На энергетической поверхности», т. е. если задать начальные условия, для которых $p_0 = -H$, расширенные уравнения Гамильтона дают уравнение хода времени $\frac{dt}{d\tau} = f$, уравнение баланса энергии и уравнения Гамильтона для исходных координат и импульсов с новым временем τ . При этом воспроизводится гамильтонова динамика исходной системы.

Если $f = \text{const} \neq 0$, то для любых начальных условий воспроизводится гамильтонова динамика исходной системы, при этом

$$\frac{d}{dt}(p_0 + H) = 0,$$

т. е. начальное значение p_0 может быть произвольным и энергия $E = -p_0$ оказывается определена с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Можно сказать, что в этом случае интеграл движения $p_0 + H(t, q, p)$ — нулевой уровень энергии, который может быть выставлен произвольно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Движение классической заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле F_{ij} может быть описано «гамильтонианом» (7) свободной частицы*

$$\mathcal{H} = f \cdot (p_0 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m}),$$

если на расширенном фазовом пространстве (включающем время и энергию) задана симплектическая форма (6), включающая электромагнитное поле F_{ij} . Описание соответствует «гамильтониану»

$$\mathcal{H} = f \cdot \left(P_0 - \frac{e}{c} A_0 + \frac{(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A})^2}{2m} \right)$$

с потенциалом $A_i = (A_0, \mathbf{A})$ в неканонических координатах x (4) на расширенном фазовом пространстве.

4. Квантовая механика с расширенным гамильтонианом. В квантовом случае импульс в «координатном по времени» представлении $\hat{p}_0 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$. При $f = 1$ имеем

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{p}_0 + \hat{H}, \quad (8)$$

что даёт обычное уравнение Шрёдингера:

$$\hat{\mathcal{H}}\psi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \hat{H}\right)\psi(t) = 0. \quad (9)$$

При ином выборе функции $f \neq \text{const}$ мы можем также воспроизвести уравнение Клейна—Фока—Гордона:

$$\mathcal{H} = f \cdot (p_0 + H), \quad f = p_0 - H, \quad H = \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2},$$

$$\mathcal{H} = p_0^2 - H^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2 c^2 - m^2 c^4, \quad \hat{\mathcal{H}} = c^2 \hbar^2 \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \right) - m^2 c^4.$$

Вернёмся, однако, к случаю $f = 1$ как простейшему и, вероятно, наиболее фундаментальному.

В энергетическом (импульсном по времени) представлении $p_0 = -E$, и мы получаем стандартное стационарное уравнение Шрёдингера

$$(-E + \hat{H})\psi(E) = 0$$

с нормировкой на вероятность данной энергии $\langle \psi(E) | \psi(E) \rangle = p_E$ и нестандартной интерпретацией: $\psi(t)$ и $\psi(E)$ связаны между собой преобразованием Фурье.

Несмотря на то, что в расширенный классический гамильтониан время входит на общих основаниях с другими координатами, в квантовой механике между ними возникает различие за счёт определения пространства волновых функций, которые не являются квадратично интегрируемыми по времени.

Уравнение (9) имеет вид уравнения на собственную функцию оператора $\hat{\mathcal{H}}$ с собственным числом 0. Мы можем написать аналогичное уравнение для произвольного собственного числа $E_0 \in \mathbb{R}$:

$$\hat{\mathcal{H}}\psi_{E_0} = E_0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \hat{H}\right)\psi_{E_0}(t) = E_0. \quad (10)$$

Уравнения (10) описывает ту же самую динамику, что и уравнение (9), но с нулевым уровнем энергии, сдвинутым на E_0 . Решения этих уравнений отличаются на фазовый множитель

$$\psi_{E_0}(t) = e^{i\frac{E_0}{\hbar}t}\psi(t).$$

Ненормируемость волновых функций ψ_{E_0} при интегрировании по всем координатам, включая время, связана с тем, что функции относятся к непрерывному спектру. В стандартной формулировке квантовой механики, где время рассматривается не как координата, а как параметр, естественное пространство волновых функций — гильбертово пространство $L_2(\mathbb{R}^n)$, при включении времени в число координат волновая функция должна принадлежать оснащённому расширенному гильбертовому пространству $\Phi' \supset L_2(\mathbb{R}^{n+1}) \supset \Phi$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Движение квантовой заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле F_{ij} может быть описано волновой функцией из оснащённого расширенного гильбертова пространства $\Phi' \supset L_2(\mathbb{R}^4) \supset \Phi$,

которая является собственной функцией непрерывного спектра «гамильтониана» (8) свободной частицы

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{p}_0 + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}$$

для произвольного собственного числа. Квантовые скобки Пуассона задаются неканоническими соотношениями (5), включающими электромагнитное поле F_{ij} . Это описание соответствует стандартному временному уравнению Шрёдингера с гамильтонианом

$$\hat{H} = -\frac{e}{c}A_0 + \frac{(\hat{\mathbf{P}} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m},$$

с потенциалом $A_i = (A_0, \mathbf{A})$ (где $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$) в неканонических координатах на расширенном фазовом пространстве x (4) и с волновой функцией $\psi(t, \mathbf{r})$ которая рассматривается не как функция $t \rightarrow L_2(\mathbb{R}^3)$, а как элемент пространства $\Phi' \supset L_2(\mathbb{R}^4) \supset \Phi$.

5. Пространство волновых функций. Однако пока волновые функции — по-прежнему функции на конфигурационном пространстве, хотя и расширенном. Чтобы получить функции, зависящие как от координат (включая t), так и от импульсов (включая $p_0 = -E$), воспользуемся представлением волновых функций как элементов оснащённого пространства Фока.

Далее будем считать, что координаты и импульсы безразмерены.

Когерентное состояние $\psi_{\mathbf{z}}$ (где $\mathbf{z} = \frac{\mathbf{q}_0 + i\mathbf{p}_0}{\sqrt{2}} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^n$) получается из основного состояния n -мерного изотропного гармонического осциллятора

$$\psi_0(\mathbf{q}) = \frac{1}{\pi^{n/4}} e^{-\frac{\mathbf{q}^2}{2}}$$

с помощью сдвига по координате на $\mathbf{q}_0$ и импульсу на $\mathbf{p}_0$, т. е. с помощью некоторой комбинации операторов (1) и (2) для разных координат и импульсов. В зависимости от того, вдоль какой траектории в фазовом пространстве осуществляется сдвиг, когерентные состояния с одинаковым $\mathbf{z}$ могут отличаться друг от друга на фазовый множитель, что связано с некоммутативностью сдвигов по координате и импульсу (3).

Набор когерентных состояний $\{\psi_{\mathbf{z}}\}_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n}$ не является базисом (поскольку переопределён), но образует ортоподобную систему:

$$\int_{\mathbb{C}^n} |\psi_{\mathbf{z}}\rangle \langle \psi_{\mathbf{z}}| d\mathbf{z} d\mathbf{z}^* = \pi^n \cdot \hat{1}. \quad (11)$$

Любой волновой функции $\psi(\mathbf{q})$ мы можем сопоставить функцию $\Psi(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) = \Psi(\mathbf{z})$:

$$\Psi(\mathbf{z}) = \langle \psi_{\mathbf{z}}^* | \psi \rangle.$$

В силу (11) функция Ψ обладает многими свойствами настоящей волновой функции, например,

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \frac{1}{\pi^n} \int \Psi_1^* \Psi_2 d\mathbf{z} d\mathbf{z}^*.$$

$|\Psi|^2$ в классическом пределе переходит в совместное распределение вероятности на фазовом пространстве.

Поскольку когерентные состояния определены с точностью до фазового множителя, функция $\Psi(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ определена с точностью до умножения на $e^{i\alpha(\mathbf{q}, \mathbf{p})}$, т. е. с точностью до локального калибровочного преобразования группы $U(1)$.

Если все когерентные состояния были получены из ψ_0 сдвигом вдоль прямой в фазовом пространстве (это условие фиксирует калибровку), то

$$\Psi(\mathbf{z}) = e^{-\frac{\mathbf{z}\mathbf{z}^*}{2}} f(\mathbf{z}), \quad (12)$$

где $f(\mathbf{z})$ — функция из пространства Фока.

Пространство Фока [2, 5] (в указанных книгах пространство Фока описывается, но термин «пространство Фока» не используется) — пространство аналитических функций $f(\mathbf{z})$ комплексных переменных $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$, на котором определено скалярное произведение

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{\pi^n} \int e^{-\mathbf{z}\mathbf{z}^*} f_1^* f_2 d\mathbf{z} d\mathbf{z}^*.$$

В пространство Фока $\mathcal{D}$ включаются только те функции, для которых скалярный квадрат (f, f) конечен.

На пространстве Фока

$$\hat{a}_k = \frac{\partial}{\partial z_k}, \quad \hat{a}_k^+ = z_k, \quad \hat{q}_k = \frac{\frac{\partial}{\partial z_k} + z_k}{\sqrt{2}}, \quad \hat{p}_k = \frac{\frac{\partial}{\partial z_k} - z_k}{i\sqrt{2}}, \quad (13)$$

что позволяет построить представление других операторов, выражающихся через координаты и импульсы.

Мы можем определить расширенное пространство Фока, добавив ещё одну комплексную переменную z_0 .

Пространство Фока является гильбертовым пространством, и мы можем определить оснащённое пространство Фока $F' \supset \mathcal{D} \supset F$, выделив в $\mathcal{D}$ линейное всюду плотное подпространство F .

Таким образом, в качестве аналога волновых функций на фазовом пространстве мы можем взять (12):

$$\Psi(q, p) = e^{-\frac{q^2 + p^2}{4}} f\left(\frac{q - ip}{\sqrt{2}}\right), \quad q = (q_0, q_1, \dots, q_n), \quad p = (p_0, p_1, \dots, p_n), \quad (14)$$

где функция $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ принадлежит оснащённому расширенному пространству Фока. Соответствующее представление гамильтониана может быть построено с помощью представления (13) операторов координаты и импульса, полагая $z = \frac{q - ip}{\sqrt{2}}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Собственная функция из оснащённого расширенного гильбертова пространства $\Phi' \supset L_2(\mathbb{R}^4) \supset \Phi$ (см. Утверждение 3) для «гамильтониана»

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{P}_0 - \frac{e}{c} \hat{A}_0 + \frac{(\hat{\mathbf{P}} - \frac{e}{c} \hat{\mathbf{A}})^2}{2m}$$

может быть представлена как элемент f оснащённого расширенного пространства Фока $F' \supset \mathcal{D} \supset F$, на котором «гамильтониан» (8) действует согласно правилу (13). Комплексной аналитической функции f можно сопоставить функцию на расширенном фазовом пространстве (14):

$$\Psi(q, p) = e^{-\frac{q^2 + p^2}{4}} f\left(\frac{q - ip}{\sqrt{2}}\right).$$

Локальные калибровочные преобразования с группой $U(1)$ для функции на расширенном фазовом пространстве имеют вид $\Psi(q, p) \rightarrow \Psi(q, p) \cdot e^{i\alpha(q, p)}$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 11–01–00828–а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *H. Weyl, The Theory of Groups and Quantum Mechanics*. New York: Dover, 1931. 444 pp.; русск. пер.: Г. Вейль, Теория групп и квантовая механика. М.: Наука., 1986. 496 с.
2. Л. Д. Фаддеев, О. А. Якубовский, Лекции по квантовой механике для студентов-математиков. М., Ижевск: РХД, 2001. 256 с.; англ. пер.: L. D. Faddeev, O. A. Yakubovskii, *Lectures on Quantum Mechanics for Mathematics Students / Student Mathematical Library*. Vol. 47. Providence, RI: American Mathematical Society, 2009. xii+234 pp.
3. J. Bellissard, “Noncommutative Geometry of Aperiodic Solids” / In: *Geometric and Topological Methods for Quantum Field Theory* (Villa de Leyva, 2001). River Edge, NJ: World Sci. Publishing, 2003. Pp. 86–156.
4. J. M. Isidro, M. A. de Gosson, “A gauge theory of quantum mechanics” // *Mod. Phys. Lett. A.*, 2007. Vol. 22, no. 3. Pp. 191–200.
5. М. Г. Иванов, Как понимать квантовую механику. М., Ижевск: РХД, 2012. 516 с. [M. G. Ivanov, How to understand quantum mechanics. Moscow, Izhevsk: RCD, 2012. 516 pp.]

Поступила в редакцию 17/XII/2012;
в окончательном варианте — 15/II/2013.

MSC: 51P05, 81Q70

PHASE SPACE CURVATURE

M. G. Ivanov

Moscow Institute of Physics and Technology (State University),
9, Institutskii per., Dolgoprudnyi, Moskovskaya obl., 141700, Russia.

E-mail: ivanov.mg@mipt.ru

Electromagnetic field in classical and quantum mechanics is naturally represented by geometry of extended phase space, with extra coordinates of time and canonically conjugate momentum $p_0 = -E$.

Key words: phase space, quantum mechanics, gauge symmetry, curvature, noncommutative geometry.

Original article submitted 17/XII/2012;
revision submitted 15/II/2013.

Mikhail G. Ivanov (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Theoretical Physics.