Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. № 1 (30). С. 369–378

УДК 51:530.145

ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

В. В. Михеев

Омский государственный технический университет,
Россия, 644050, Омск, пр. Мира, 11.

E-mail: vvm125@mail.ru

Предложен алгоритм построения высокотемпературного разложения матрицы плотности и статистической суммы на многообразиях некомпактных групп Ли, основанный на формализме некоммутативного интегрирования дифференциальных уравнений, базирующемся на методе орбит коприсоединенного представления. Рассмотрены приложения построенного метода для решения задач квантовой статистической механики и квантовой теории поля.

Ключевые слова: *матрица плотности, статистическая сумма, функция распределения, некоммутативное интегрирование, высокотемпературные асимптотики, эффективный лагранжиан.*

Введение. Настоящая работа посвящена решению основной задачи квантовой статистической механики, иными словами, нахождению статистической суммы, стандартным образом определяемой как

$$Z_\beta = \sum_n d_n \exp(-\beta E_n),$$

где $\beta = 1/kT$ — термодинамическая температура системы, d_n есть степень вырождения собственного значения гамильтониана E_n, соответствующего собственной функции ψ_n,

$$\hat{H}\psi_n = E_n \psi_n,$$

а под суммированием следует понимать в том числе и интегрирование, если спектр энергии является непрерывным [1]. Эквивалентным способом представления статистической суммы выступает след матрицы плотности (теплового ядра) $\rho_\beta(x,x)$:

$$Z_\beta = Tr\rho_\beta(x,x) = \int \rho_\beta(x,x) d\mu(x), \quad d\mu(x) = \sqrt{|g|}dx, \tag{1}$$

определяемой как

$$\rho_\beta(x,x') = \psi^*(x') exp(-\beta \hat{H})\psi(x),$$

которая, в свою очередь, удовлетворяет уравнению Блоха (уравнению теплового ядра) на однородном пространстве

$$\frac{\partial \rho_\beta(x,x')}{\partial \beta} + H(x)\rho_\beta(x,x') = 0, \quad \rho_\beta(x,x')|_{\beta=0} = \delta(x,x'). \tag{2}$$

Таким образом, если есть возможность проинтегрировать уравнение Блоха для заданного однородного пространства и гамильтониана $H(x)$ и найти

Виталий Викторович Михеев (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. комплексной защиты информации.

матрицу плотности, то поставленная задача будет решена. Но попытка непосредственного решения может быть связана с серьезными трудностями. Первая из них состоит в собственно интегрировании, особенно в случае, когда пространство исходной задачи не покрывается одной картой и требуется проводить процедуру сшивки решений в областях перекрывания карт атласа. Вторая трудность может быть связана с тем, что традиционно применяемый для интегрирования подобных уравнений метод разделения переменных едва ли может быть применен для (2) в силу начального условия специального вида [2–4]. Третья и, возможно, наиболее существенная проблема связана с расходимостями в (1), вызванными формально бесконечным объемом некомпактного многообразия. Так, в настоящее время большинство результатов в этой области получено или для компактных многообразий, или для многообразий конечного объема [5, 17]. В силу указанных причин возрастает важность построения новых методов интегрирования уравнения (2), которые бы позволяли справляться с упомянутыми трудностями и находить матрицу плотности и статистическую сумму либо точно, либо в виде степенного ряда высокотемпературного приближения.

В работе рассматривается основная проблема термодинамики однородных пространств для некомпактных групп Ли, во-первых, в качестве важного и иллюстративного примера, а во-вторых, в качестве первого шага для решения задачи в случае произвольного однородного пространства. Необходимо подчеркнуть, что настоящая работа не претендует на охват всех возможных приложений разложения матрицы плотности и статистической суммы в физических задачах, но демонстрирует важные случаи как примеры применения предлагаемого в работе метода.

1. Интегрирование уравнения Блоха на группах Ли. Ниже будет в общих чертах дано описание метода некоммутативного интегрирования уравнения Блоха на группах Ли, содержащее сведения, необходимые для построения ряда высокотемпературного разложения матрицы плотности и статистической суммы. Более строгое и последовательное изложение можно найти в цитируемой литературе.

Рассмотрим уравнение (2) на n-мерной действительной связной группе Ли G, когда оператор H представляет собой квадратичную функцию левоинвариантных векторных полей $\xi_a = \xi_a^i(x)\partial_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, на группе. Тогда можно считать, что H представляет собой оператор Лапласа—Бельтрами на групповом пространстве с левоинвариантной римановой метрикой

$$g^{ij} = G^{ab}\xi_a^i(x)\xi_b^j(x),$$

причём для постоянной матрицы G^{ab} выполнено условие $\det = G^{ab} > 0$ и

$$H(-i\hbar\xi) = -\hbar^2 G^{ab}\xi_a\xi_b = -\hbar^2\Delta = -\hbar^2\frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}}\partial_i\sqrt{\det g_{ij}}\,g^{ij}p_j.$$

Такой вид оператора H соответствует газу свободных частиц в групповом пространстве.

Решение уравнения (2) на произвольной некомпактной группе Ли будет получено, с использованием формализма обобщённого Фурье-анализа на группах Ли, основанного на методе орбит [8, 6].

Для этого введём специальное неприводимое представление алгебры Ли $\mathcal{G}$ группы G(так называемое λ-представление) на лагранжевом подмногообразии Q орбиты присоединенного представления $\mathcal{O}_\lambda \in \mathcal{G}^*$:

$$[l_i(q, \partial_q, \lambda), l_j(q, \partial_q, \lambda)] = C_{ij}^k l_k(q, \partial_q, \lambda),$$

где C_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли $\mathcal{G}$. Можно показать, что любое неприводимое представление алгебры Ли может быть получено как определённое λ-представление, заданное выбором линейного функционала $\lambda \in \mathcal{G}^*$. Линейный функционал $\lambda \equiv \lambda(j)$, где число параметров j равно числу функций Казимира — индексу алгебры Ли $\mathcal{G}$. В силу этого мера $d\mu(\lambda)$ представляет собой спектральную меру операторов Казимира на группе Ли [7].

Рассмотрим далее представление группы Ли G в функциональном пространстве $C^\infty(Q)$, действующее на функции из этого пространства следующим образом:

$$T_g^\lambda \psi(q) = \int D_{q\overline{q'}}^\lambda(g)\psi(q')d\mu(q') \tag{3}$$

и являющееся поднятием λ–представления алгебры Ли

$$l_i(q, \partial_q, \lambda) = \frac{\partial}{\partial g^i} T_g^\lambda|_{g=e}. \tag{4}$$

Здесь под g, g' будем понимать элементы группы g, $g' \in G$, ниже равноправно будут использоваться обозначения x, x', под которыми следует понимать координаты соответствующих элементов на групповом многообразии.

Набор функций $D_{q\overline{q'}}^j(g)$, представляющий собой матричные элементы представления (3), может быть найден из системы уравнений

$$\left[\xi_i(g) + \overline{l_i(q', \partial_q', j)}\right] D_{q\overline{q'}}^\lambda(g) = 0, \quad D_{q\overline{q'}}^\lambda(e) = \delta(q, \overline{q'}).$$

Обобщённые функции $D_{q\overline{q'}}^\lambda(g)$ осуществляют обобщенное Фурье-преобразование на группе Ли, решая задачу гармонического анализа [9]

$$\varphi(g) = \int_{Q\times Q\times J} \hat{\varphi}_j(q, q') D_{q\overline{q'}}^\lambda(g)\, d\mu(q)d\mu(q')d\mu(\lambda). \tag{5}$$

Таким образом, действие право- и левоинвариантных векторных полей на группе переходит на лагранжевом подмногообразии орбиты присоединённого представления в действие операторов λ–представления:

$$\xi_i\varphi(g) \iff l_i(q', \partial_q', \lambda)\hat{\varphi}_j(q, q'); \quad \eta_i\varphi(g) \iff \overline{l_i(q, \partial_q, \lambda)}\hat{\varphi}_j(q, q').$$

После перехода с группового многообразия на лагранжево подмногообразие орбиты $\mathcal{O}_\lambda$ задача сводится к нахождению матрицы плотности $\mathcal{R}_\beta(q, \overline{\tilde{q}}, j)$, связанной с матрицей плотности $\rho_\beta(g, g')$ на исходном пространстве преобразованием Фурье (5):

$$\rho_\beta(g, g') = \int \mathcal{R}_\beta(q, \overline{\tilde{q}}, j) D_{\overline{q}\tilde{q}}^\lambda({g'}^{-1}g)d\mu(q)d\mu(\tilde{q})d\mu(\lambda). \tag{6}$$

Матрица плотности $\mathcal{R}_\beta(q,\overline{\tilde{q}},j)$ на орбите $\mathcal{O}_\lambda$ подчиняется редуцированному уравнению Блоха с меньшим числом независимых переменных

$$\frac{\partial\mathcal{R}_\beta(q,\overline{\tilde{q}},j)}{\partial\beta}+H(-i\hbar l)\mathcal{R}_\beta(q,\overline{\tilde{q}},j)=0,\quad \mathcal{R}_\beta(q,\overline{\tilde{q}},j)|_{\beta=0}=\delta(q,\overline{\tilde{q}}), \tag{7}$$

которое, как видно, интегрируется в квадратурах [10], если

$$(\dim G-\operatorname{ind}G)/2<2.$$

Из решения уравнения (7) можно получить статистическую сумму (формально бесконечную) на некомпактной группе Ли, используя свойства набора функций $D^{\lambda}_{q\overline{q'}}(g)$

$$Z_\beta=\int_G d\mu(g)\int_{Q\times J}\mathcal{R}_\beta(q,q,j)d\mu(q)d\mu(\lambda)=$$
$$=\mathrm{Vol}(G)\int_{Q\times J}\mathcal{R}_\beta(q,q,j)d\mu(q)d\mu(\lambda).$$

Здесь явно видна возможность осуществить факторизацию в выражении для статистической суммы членов, содержащих расходимости, связанные с бесконечным объемом многообразия, перейдя в дальнейшем к конечной удельной (по объёму) статистической сумме [11, 12]

$$z_\beta=\frac{Z_\beta}{\mathrm{Vol}(G)}=\int\mathcal{R}_\beta(q,q,j)d\mu(q)d\mu(\lambda). \tag{8}$$

2. Высокотемпературное разложение матрицы плотности на группах Ли. Представление функции распределения и самой матрицы плотности в виде степенного ряда по переменной β (так называемое высокотемпературное разложение) представляет собой важную и, в общем случае, непростую задачу. Стандартным образом это разложение для произвольного однородного пространства записывается в виде

$$Z_\beta=\frac{\mathrm{Vol}(M)}{(4\pi\beta)^{d/2}}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\beta^n,$$

где β — обратная термодинамическая температура.

Для нахождения коэффициентов высокотемпературного разложения статистической суммы на группах Ли представим решение уравнения Блоха в виде

$$\mathcal{R}_\beta(q,\overline{\tilde{q}},j)=\exp\Bigl(\frac{i}{\hbar}S_\beta(q,\overline{\tilde{q}},j)\Bigr),$$

где $S_\beta(q,\overline{\tilde{q}},j)$ — в общем случае комплексная функция.

Применим к функции $\mathcal{R}_\beta(q,\overline{\tilde{q}},j)$ стандартное Фурье преобразование по переменной $\tilde{q}$:

$$\phi(q,p)=\int\phi(q,\tilde{q})\exp\Bigl(\frac{ip\tilde{q}}{\hbar}\Bigr)d\tilde{q},$$

$$\phi(q,\tilde{q}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\dim \mathcal{O}_\lambda/2}} \int \phi(q,p) \exp\Bigl(-\frac{ipq}{\hbar}\Bigr) dp,$$

что даёт возможность перейти к рассмотрению функции $\mathcal{R}_\beta(q,p,j)$, которая также удовлетворяет уравнению теплового ядра

$$\frac{\partial \mathcal{R}_\beta(q,p,j)}{\partial \beta} + \hat{H}\bigl(-i\hbar l(q,\partial_q)\bigr)\mathcal{R}_\beta(q,p,j) = 0.$$

Уравнение на функцию $S_\beta(q,\bar{\tilde{q}},j)$ принимает вид

$$\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S_\beta(q,p,j)}{\partial \beta} + \exp\Bigl(-\frac{i}{\hbar}S_\beta(q,p,j)\Bigr)\hat{H}\bigl(-i\hbar l(q,\partial_q)\bigr)\exp\frac{i}{\hbar}S_\beta(q,p,j)) = 0 \qquad (9)$$

с начальным условием

$$S_\beta(q,p,j)|_{\beta=0} = pq.$$

Его решение также будем представлять в виде степенного ряда

$$S_\beta(q,p,j) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(q,p,j)\beta^n. \qquad (10)$$

Здесь $\hat{H}\bigl(-i\hbar l(q,\partial_q)\bigr)$ — дифференциальный оператор второго порядка, который может быть представлен в виде

$$\hat{H}\bigl(-i\hbar l(q,\partial_q)\bigr) = -\hbar^2 G^{ab} l_a(q,\partial_q) l_b(q,\partial_q) = \\ = h^{ab}(q)\frac{\partial^2}{\partial q_a \partial q_b} + h^a(q)\frac{\partial}{\partial q_a} + h(q), \qquad (11)$$

где коэффициенты h^{ab}, h^a, $h(q)$ могут быть выражены через операторы λ-представления (4). Выражение (11) может быть переписано, с использованием стандартных для квантовой механики обозначений $\hat{p}_a = i\hbar\frac{\partial}{\partial q_a}$:

$$\hat{H}\bigl(-i\hbar l(q,\partial_q)\bigr) = H^{ab}(q)\hat{p}_a\hat{p}_a + H^a(q)\hat{p}_a + H(q).$$

Так что уравнение (9) перейдёт в

$$\frac{i}{\hbar}\sum_{k=0}^{\infty} kS_k(q,p,j)\beta^{(k-1)} + \sum_{k=0}^{\infty}\Theta^{(k)}(q,p,j)\beta^k = 0$$

с обозначением

$$\Theta^{(k)}(q,p,j) = -i\hbar H^{ab}S_{k,ab}(q,p,j) + H^{ab}\sum_{m=0}^{k} S_{m,a}(q,p,j)S_{k-m,b}(q,p,j) + \\ + S^a S_{k,a}(q,p,j) + H\delta_k^0.$$

Это приводит к рекуррентным соотношениям для членов разложения $S_{k+1}(q,p,j)$:

$$S_{k+1}(q,p,j) = \frac{i\hbar}{k+1}\Theta^{(k)}(q,p,j).$$

Видно, что коэффициент, соответствующий первой степени параметра β в разложении (10), представляет собой $H(q,p)$ — qp-символ оператора $\hat{H}\big(-i\hbar l(q,\partial_q)\big)$. Это автоматически приводит к известной формуле для первого порядка высокотемпературного разложения функции распределения:

$$z_\beta \approx \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\dim \mathcal{O}_\lambda/2}} \int \exp\Big(\frac{i(q-\overline{q})}{h} - H(q,p)\Big) dpdqdj.$$

Степенной ряд высокотемпературного разложения матрицы плотности на симплектическом листе орбиты коприсоединенного представления $\mathcal{R}_\beta(q,p,j)$ получается с использованием коэффициентов $S_k(q,p,j)$ согласно следующего выражения:

$$\mathcal{R}_\beta(q,p,j) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{d}{d\beta^n}\prod_{k=1}^{n+1}\sum_{m=0}^{n+1-k}\frac{((\frac{i}{\hbar}S_k(q,p,j))\beta^k)^m}{m!}\Big|_{\beta=0}\beta^n.$$

Высокотемпературная асимптотика функции распределения (статистической суммы) находится по формуле (8), которая после применения обратного Фурье-преобразования принимает вид

$$z_\beta = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\dim \mathcal{O}_\lambda/2}} \int \mathcal{R}_\beta(q,p,j)\exp\Big(-\frac{ip\overline{q}}{\hbar}\Big) dpdqdj = \sum_{n=0}^{\infty} z_n\beta^n,$$

так что коэффициенты z_n разложения статистической суммы есть

$$z_n = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\dim \mathcal{O}_\lambda/2}} \int \frac{1}{n!}\frac{d}{d\beta^n}\prod_{k=1}^{n+1}\sum_{m=0}^{n+1-k}\frac{((\frac{i}{\hbar}S_k(q,p,j))\beta^k)^m}{m!}\Big|_{\beta=0}\times$$
$$\times \exp\Big(-\frac{ip\overline{q}}{\hbar}\Big) d\mu(p)d\mu(q)d\mu(\lambda),$$

и, соответственно, для коэффициентов разложения матрицы плотности имеем

$$\mathcal{R}_n(q,\overline{\tilde{q}},j) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\dim \mathcal{O}_\lambda/2}} \int \frac{1}{n!}\frac{d}{d\beta^n}\prod_{k=1}^{n+1}\sum_{m=0}^{n+1-k}\frac{((\frac{i}{\hbar}S_k(q,p,j))\beta^k)^m}{m!}\Big|_{\beta=0}\times$$
$$\times \exp\Big(-\frac{ip\overline{\tilde{q}}}{\hbar}\Big) d\mu(p).$$

Окончательный результат для членов высокотемпературного разложения матрицы плотности на пространстве группы Ли G получается после подстановки полученных коэффициентов (10) в формулу (6):

$$\rho_n(x,x') = \int \mathcal{R}_n(q,\overline{\tilde{q}},j) D^\lambda_{\overline{q}\tilde{q}}(g'^{-1}g) d\mu(q)d\mu(\tilde{q})d\mu(\lambda).$$

3. Приложения высокотемпературного разложения матрицы плотности. Матрица плотности и статистическая сумма находят свое приложение во многих областях теоретической физики, укажем лишь на некоторые. В первую очередь, статистическая сумма (1) может быть непосредственно использована для выявления термодинамических характеристик больцмановского газа (таких как энергия, энтропия и, в особенности, теплоёмкость) в заданном пространстве [14], а также определение влияния на эти характеристики геометрических и топологических свойств самого многообразия. Для простого, но иллюстративного примера влияния топологии пространства группы $E(2)$ на поведение теплоёмкости больцмановского газа частиц задача была решена в работе [13], а решение ее для группы Гейзенберга позволяет получить хорошо известную статистическую сумму для гармонического осциллятора. Отметим, что для вычисления термодинамических величин, таких как средняя энергия, теплоемкость, свободная энергия, энтропия системы существенна полученная выше удельная статистическая сумма z_β, поскольку в выражения для указанных величин входит производная $\ln Z_\beta$.

Энергия системы определяется как

$$\langle E\rangle = -\frac{\partial \ln Z_\beta}{\partial\beta} = -\frac{\partial \ln z_\beta}{\partial\beta},$$

поскольку производная факторизованной константы — логарифма объёма многообразия — обращается в нуль. То же самое относится к теплоёмкости

$$c_v = \frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T} = \beta^2 k_B \frac{\partial^2 \ln Z_\beta}{\partial\beta^2} = \beta^2 k_B \frac{\partial^2 \ln z_\beta}{\partial\beta^2},$$

свободной энергии

$$F = \beta \ln Z_\beta$$

и энтропии

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \beta^2 k_B \frac{\partial(\beta \ln Z_\beta)}{\partial\beta}.$$

В последних двух случаях формально бесконечный объём многообразия также сокращается при вычислении имеющих физический смысл приращений свободной энергии и энтропии.

Другая проблема, схожая с рассматриваемой в настоящей работе задачей о построении высокотемпературного разложения матрицы плотности, встает в квантовой электродинамике и связана с процедурой перенормировки эффективного лагранжиана в рамках так называемого формализма пятой переменной [15, 16]. Здесь будет рассмотрена указанная проблема для случая 4-мерной группы Ли, снабжённой левоинвариантной метрикой лоренцевой сигнатуры g^{ij}, которая строится уже рассмотренным образом с единственным отличием, состоящим в требовании $\det(G^{ab}) < 0$.

Рассмотрим в этом случае пятимерное уравнение Шрёдингера на функции $G_t(x, x')$ (здесь и ниже под x понимается набор локальных координат на группе, определяющих элемент $g \in G$):

$$i\hbar\frac{\partial G_t(x,x')}{\partial t} + (-\Delta + m^2)G_t(x,x') = 0, \quad G_t(x,x')|_{t=0} = \delta(x,x'), \tag{12}$$

которая связана с эффективным лагранжианом следующим соотношением:

$$\mathcal{L} = -\frac{i}{2}\sqrt{-g}\int_0^\infty G_t(x,x)\frac{dt}{t}. \tag{13}$$

Уравнение (12) полностью аналогично уравнению (2) после подстановки $t = i\hbar\beta$ и замены оператора $H(x)$ на $-\Delta + m^2$. Соответственно, оно может быть проинтегрировано тем же способом, который был эффективно применен к уравнению Блоха, и задача о нахождении $G_t(x,x)$ в (13) формально соответствует задаче о построении следа теплового ядра (1).

В рамках предложенного метода могут быть получены выражения для $G_t(x,x')$ и $G_t(x,x)$ в следующем виде:

$$G_t(x,x') = \int \tilde{G}_t(q,\tilde{q},j)D^j_{q\tilde{q}}(x'^{-1}x)d\mu(q)d\mu(\tilde{q})d\mu(j),$$

$$G_t(x,x) = \int \tilde{G}_t(q,q,j)d\mu(q)d\mu(j). \tag{14}$$

Очевидно, что элементы $G_t(x,x)$, которые образуют след, не зависят от координат на многообразии группы x и ниже будут обозначаться как G_t.

Расходимости в (13) при этом могут иметь различную природу, в том числе и отличную от описанной выше и связанную с бесконечным объемом многообразия: например, при $t = 0$ будут расходиться интегралы J_1, J_2, J_3. Здесь под J_n обозначаются интегралы вида

$$J_n = \int_0^\infty \frac{\exp(-x)}{x^n}dx,$$

так что коэффициенты при первых трёх степенях β в ряде высокотемпературного приближения a_0, a_1, a_2 соответствуют коэффициентам при формально расходящихся интегралах J_1, J_2, J_3.

Окончательно для функции G_t получается выражение через удельную статистическую сумму, полученную выше:

$$G_t = e^{-im^2t}z_{-it/\hbar}.$$

В силу этого, если имеется возможность выразить интеграл (14) в виде ряда высокотемпературного разложения, то перенормированная с учётом указанных расходимостей функция G_t легко выражается через $z^{(3)}_\beta$ (суммы первых трёх членов высокотемпературного разложения) окончательным образом

$$G^{ren}_t = e^{-im^2t}\big(z_{-it/\hbar} - z^{(3)}_{-it/\hbar}\big).$$

В заключение следует еще раз заметить, что приложения высокотемпературного разложения матрицы плотности ни в коем случае не ограничиваются рассмотренными примерами и охватывают более широкий спектр задач как теоретической физики, так и тесно связанных с ней областей математики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *N. E. Hurt*, Geometric quantization in action / Mathematics and Its Applications (East European Series). Vol. 8. Dordrecht-Boston, Mass.: D. Reidel Publishing Co., 1983. xiv+336 pp.; русск. пер.: *Н. Харт*, Геометрическое квантование в действии. М.: Мир, 1985. 343 с.
2. *В. Н. Шаповалов*, “Симметрия и разделение переменных в линейном дифференциальном уравнении второго порядка. I” // *Изв. вузов. Физика*, 1978. № 5. С. 116–132; англ. пер.: *V. N. Shapovalov*, “Symmetry and separation of variables in a linear differential equation of second order. I” // *Sov. Phys. J.*, 1978. Vol. 21, no. 5. Pp. 645–650.
3. *В. Н. Шаповалов*, “Симметрия и разделение переменных в линейном дифференциальном уравнении второго порядка. II” // *Изв. вузов. Физика*, 1978. № 6. С. 7–10; англ. пер.: *V. N. Shapovalov*, “Symmetry and separation of variables in second-order differential equations. II” // *Sov. Phys. J.*, 1978. Vol. 21, no. 6. Pp. 693–695.
4. *В. Н. Шаповалов*, “Разделение переменных в линейном дифференциальном уравнении второго порядка” // *Диффер. уравн.*, 1980. Т. 16, № 10. С. 1864–1874; англ. пер.: *V. N. Shapovalov*, “Separation of variables in a second-order linear differential equation” // *Differ. Equ*, 1981. Vol. 16, no. 10. Pp. 1212–1220.
5. *D. V. Vassilevich*, “Heat kernel expansion: user’s manual” // *Phys. Rep.*, 2003. Vol. 338, no. 5–6. Pp. 279–360.
6. *А. В. Шаповалов, И. В. Широков*, “Некоммутативное интегрирование линейных дифференциальных уравнений” // *ТМФ*, 1995. Т. 104, № 2. С. 195–213; англ. пер.: *A. V. Shapovalov, I. V. Shirokov*, “Noncommutative integration of linear differential equations” // *Theoret. and Math. Phys.*, 1995. Vol. 104, no. 2. Pp. 921–934.
7. *И. В. Широков*, “Координаты Дарбу на K-орбитах и спектры операторов Казимира на группах Ли” // *ТМФ*, 2000. Т. 123, № 3. С. 407–423; англ. пер.: *I. V. Shirokov*, “Darboux coordinates on K-orbits and the spectra of Casimir operators on Lie groups” // *Theoret. and Math. Phys.*, 2000. Vol. 123, no. 3. Pp. 754–767.
8. *А. А. Кириллов*, Элементы теории представлений. М.: Наука, 1978. 180 с.; англ. пер.: *A. A. Kirillov*, Elements of the theory of representations / Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Vol. 220. Berlin, New York, Heidelberg: Springer Verlag, 1976. xi+315 pp.
9. *A. O. Barut, R. Razcka*, Theory of group representations and applications. 2nd rev. ed. Singapore: World Scientific, 1986. xix+717 pp.
10. *С. П. Барановский, В. В. Михеев, И. В. Широков*, “Квантовые гамильтоновы системы на K-орбитах. Квазиклассический спектр асимметрического волчка” // *ТМФ*, 2001. Т. 129, № 1. С. 3–13; англ. пер.: *S. P. Baranovsky, V. V. Mikheyev, I. V. Shirokov*, “Quantum Hamiltonian systems on K-orbits: Semiclassical spectrum of the asymmetric top” // *Theoret. and Math. Phys.*, 2001. Vol. 129, no. 1. Pp. 1311–1319.
11. *V. Mikheyev., I. Shirokov*, “Building of heat kernel on non-compact homogeneous spaces” // *EJTP, Electron. J. Theor. Phys.*, 2006. Vol. 3, no. 13. Pp. 99–108.
12. *В. В. Михеев, И. В. Широков*, “Метод орбит коприсоединенного представления в термодинамике некомпактных групп Ли” // *Изв. вузов. Физика*, 2007. Т. 50, № 3. С. 84–89; англ. пер.: *V. V. Mikheyev., I. V. Shirokov*, “Method of orbits of coadjoint representation in thermodynamics of noncompact Lie groups” // *Russ. Phys. J.*, 2007. Vol. 50, no. 3. Pp. 290–295.
13. *V. V. Mikheyev, I. V. Shirokov*, “Application of coadjoint orbits in the thermodynamics of non-compact manifolds” // *EJTP, Electron. J. Theor. Phys.*, 2005. Vol. 2, no. 7. Pp. 1–10.
14. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Теоретическая физика. В 10 томах. Т. 5: Статистическая физика. Часть 1. М.: Наука, 1995. 606 с. [*L. D. Landau; E. M. Lifshits*, Theoretical physics. In 10 vols. Vol. 5: Statistical physics. Part 1. Moscow: Nauka, 1995. 606 pp.]
15. *А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко*, Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. М.: Энергоатомиздат, 1988. 288 с.; англ. пер.: *A. A. Grib, S. G. Mamayev, V. M. Mostepanenko*, Vacuum quantum effects in strong fields. St. Petrsburg: Friedmann Lab. Publ., 1994. 361 pp.

16. *N. D. Birrell, P. C. W. Davies*, Quantum Fields in Curved Space. Corrected reprint of the 1982 original. Cambridge: Cambridge University Press, 1984. ix+340 pp.; русск. пер.: *Н. Биррелл, П. Девис*, Квантованные поля в искривленном пространстве-времени.. М.: Мир, 1984. 357 с.
17. *O. A. Chalykh, A. P. Veselov*, "Integrability and Huygens' principle on symmetric spaces" // *Comm. Math. Phys.*, 1996. Vol. 178, no. 2. Pp. 311–338.

MSC: 22E70, 81S10; 35P99, 81Q05, 81Q99

HIGH TEMPERATURE HEAT KERNEL EXPANSION AND ITS APPLICATIONS

V. V. Mikheyev

Omsk State Technical University,
11, pr. Mira, Omsk, 644050, Russia.

E-mail: vvm125@mail.ru

The algorithm constructed to build the high-temperature heat kernel expansion and the statistic sum on the noncompact Lie groups manifolds is discussed in the article. The method is based on the formalism of non-commutative integration which originated from the coadjoint orbits' approach to the problems of integration and quantization. Applications of presented method to the problems of quantum statistic mechanics and quantum field theory are also discussed.

Key words: *heat kernel, statistic sum, partition function, non-commutative integration, high-temperature asymptotics, effective lagrangian.*

Original article submitted 16/XI/2012;
revision submitted 27/I/2013.

Vitaly V. Mikheyev (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Complex Information Security.